

Ober- und Untersummen

Mit der Berechnung von Ober- und Untersummen können Flächen unter Funktionen näherungsweise bestimmt werden. Dabei werden Rechtecke gebildet, die aufsummiert eine größere Fläche (Obersumme) bzw. kleinere Fläche (Untersumme) bilden als die tatsächliche Fläche.

Bei der Erarbeitung der Flächeninhaltsfunktionen konnten wir die Fläche unter der Funktion $f(x) = x^2$ nur graphisch abschätzen. Verwende nun das GeoGebra-Applet „Ober- und Untersumme“ um die Funktion $f(x) = x^2$ im Intervall $[0; 4]$ mit $n = 8$ Unterteilungen zu betrachten. Hinweis: Passe den Maßstab der Achsen so an, dass die Rechtecke gut zu sehen sind.

Die Obersumme beträgt: $O = 25.5$

Die Untersumme beträgt: $U = 17.5$

Wie verändern sich Ober- und Untersumme, wenn die Anzahl der Unterteilungen vergrößert wird?

Die Obersumme wird kleiner und die Untersumme wird größer. Sie nähern sich dabei dem gleichen Wert an.

Die Folge der Obersummen $\langle O_n \rangle$ ist monoton **fallend** die Folge der Untersummen $\langle U_n \rangle$

ist monoton **steigend** bzw. besitzen sie monotone Teilfolgen.

Was passiert mit der Differenz aus Ober- und Untersumme, wenn die Anzahl der Unterteilungen vergrößert wird?

Die Differenz aus Ober- und Untersumme für große n gegen 0.

Die Folge der Obersummen $\langle O_n \rangle$ und die Folge der Untersummen $\langle U_n \rangle$ besitzen daher einen gemeinsamen **Grenzwert**.

Sie **nähern** sich also dem Wert von $\int_a^b f(x)dx$ an.

Betrachte nun mithilfe des Applets die Ober- und Untersumme der Funktion $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x + 2$ im Intervall $[0; 3]$ für $n = 12$ Unterteilungen.

Vergleiche die Bildung der Rechtecke in Intervallen mit monoton steigenden und fallenden Funktionswerten. Welche Funktionswerte wurden jeweils für die Höhen der Rechtecke verwendet?

Es wird nicht immer der linke bzw. der rechte Funktionswert verwendet, sondern der maximale bzw. minimale Funktionswert in jedem Unterteilungsintervall.

Für die Obersumme wird der **maximale** Funktionswert und für die Untersumme der

minimale Funktionswert in jedem Unterteilungsintervall verwendet.