ESPACIOS VECTORIALES

Índice:

1. El conjunto $\mathbb{R}^2$

El conjunto $\mathbb{R}^2$ es:

$$\mathbb{R}^2=\{(a,b)\in\mathbb{R}\,x\,\mathbb{R}\;:\;a,b\in\mathbb{R}\}$$

Los elementos de $\mathbb{R}^2$ son pares ordenados que representan puntos en el plano real, y los representamos con mayúsculas A, B, C, …

Dado un punto $A(a,b)$ de $\mathbb{R}^2$, denominamos

Primera coordenada o componente de A al valor a.

Segunda coordenada o componente de A al valor b.

Además, dados dos putos del plano A y B

$$A(a,b)=B(c,d)\Leftrightarrow a=c\;y\;b=d$$

 # Ejemplo.-

Para que $A(1,x)$ *y* $B(y,-5)$ *sean iguales, se debe de cumplir que:*

$$(1,x)=(y,-5)\Rightarrow x=-5\;e\;y=1$$

- Dados dos pares ordenados (a,b) y (c,d) , su suma es otro par ordenado que viene dado por

$$(a,b)+(c,d)=(a+b,c+d)$$

- Dados el par ordenado (a,b) y el número real k, el producto de k por (a,b) es otro par ordenado que viene dado por

$$k.(a,b)=(k.a\,,k.b)$$

 # Ejemplo.-

$$2.(1,5)-3.(-1,4)+4.(-3,0)=(2,10)-(-3,12)+(-12,0)=$$
$$=(2-(-3)+(-12),10-12+0)=(-7,-2)$$

2. El conjunto $\mathbb{R}^n$

El conjunto $\mathbb{R}^n$ es:

$$\mathbb{R}^n=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}\,x\,\mathbb{R}\;:\;x_1,x_2,\ldots.,x_n\in\mathbb{R}\}$$

 # Ejemplo.-

$$(0,1,2,3)\in\mathbb{R}^4$$

$$(1,2,3,\ldots,n)\in\mathbb{R}^n$$

- $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \Leftrightarrow x_1 = y_1, x_2 = y_2, \ldots, x_n = y_n$

En el conjunto $\mathbb{R}^n$, podemos definir las siguientes operaciones

- Suma:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

- Producto por un escalar λ (*número real*)

$$\lambda . (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda . x_1, \lambda . x_2, \ldots, \lambda . x_n)$$

Además estas operaciones cumplen las siguientes propiedades:

Respecto de la suma

- Asociativa respecto de la suma

$$[(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n)] + (z_1, z_2, \ldots, z_n) = \\ = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + [(y_1, y_2, \ldots, y_n) + (z_1, z_2, \ldots, z_n)]$$

- Conmutativa respecto de la suma

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_n) + (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

- Tiene elemento neutro

$$\exists (0, 0, \ldots, 0) \quad \text{tal que} \quad (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (0, 0, \ldots, 0) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

- Tiene elemento opuesto

$$\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \exists (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n) \quad \text{tal que} \\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n) = (0, 0, \ldots, 0)$$

Respecto del producto por un escalar

- Distributiva respecto de la suma

$$\lambda . [(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n)] = \lambda . (x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda . (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

- Distributiva respecto de la suma de escalares

$$(\lambda + \beta) . (x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda . (x_1, x_2, \ldots, x_n) + \beta . (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

- Asociativa respecto del producto de escalares

$$(\lambda . \beta) . (x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda . [\beta . (x_1, x_2, \ldots, x_n)]$$

- Tiene elemento unidad . El número $1 \in \mathbb{R} \Rightarrow 1 . (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

3. Espacios vectoriales

Un conjunto no vacío **V** se denomina **ESPACIO VECTORIAL V sobre** $\mathbb{R}$ [1], si existen dos operaciones (*una interna y otra externa*) en V, denominadas respectivamente

suma: $+: V\, x\, V \to V : (x, y) \to x+y$

producto por elementos de $\mathbb{R}$ $.: \mathbb{R}\, x\, V \to V : (\alpha, x) \to \alpha . x$

tal que se cumple:

- $(V, +)$ es un grupo conmutativo. Es decir dicha operación cumple las propiedades:
  - Asociativa: $x+(y+z)=(x+y)+z ; \forall\ x, y, z \in V$
  - Conmutativa: $x+y=y+x ; \forall\ x, y \in V.$
  - $\exists$ neutro 0 tal que $x+0=x ; \forall\ x \in V.$
  - $\exists$ simétrico de x , $-x$ tal que $x+(-x)=(-x)+x=0$
- El producto . de elementos de $\mathbb{R}$ por elementos de V, cumple:
  - $\alpha .(x+y)=\alpha . x+\alpha . y ; \forall\ \alpha \in \mathbb{R}, \forall x, y \in V$
  - $(\alpha+\beta). x=\alpha . x+\beta . x ; \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x, y \in V$
  - $(\alpha \beta). x=\alpha .(\beta . x) ; \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x, y \in V$
  - $1 . x=x ; \forall x, y \in V$

Un **espacio vectorial** se expresa mediante la terna $(V, +, .)$

 # Ejemplos.-

- $(\mathbb{R}^{2,} +, .)$ *es un espacio vectorial. Donde,* $\mathbb{R}^2$ *es el conjunto de los pares ordenados de números reales, + es la suma de pares ordenados y . es el producto de un número real por un par ordenado, definidas en el apartado 1.*
- $(\mathbb{R}^n, +, .)$ *es un espacio vectorial. Donde,* $\mathbb{R}^n$ *es el conjunto de n-tuplas de números reales, + es la suma de n-tuplas y . es el producto de un número real por una n-tupla, definidas al principio de la U. D.*
- $(\mathbb{R}_n(x), +.)$ *es un espacio vectorial. Donde,* $\mathbb{R}_n(x)$ *es el conjunto de polinomios de grado menor o igual que n, + es la suma de polinomios y . es el producto de un número real por un polinomio.*

1 *Esta definición se cumple para cualquier cuerpo K conmutativo, y en caso de que K sea un anillo conmutativo con elemento unidad se denomina módulo*

- Los elementos de un espacio vectorial $(V,+,.)=V$ se representan como $\vec{v}\in V$.
- A partir de la definición de espacio vectorial $(V,+,.)$, se deducen las siguientes propiedades
  - $\forall \vec{a}\in V, 0.\vec{a}=\vec{0}, con\, 0\in \mathbb{R}$.
  - $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha.\vec{0}=\vec{0}, siendo\, \vec{0}\, el\ vector\ nulo$,
  - $Si\, \alpha.\vec{v}=\vec{0}\Rightarrow \alpha=0\ o\, \vec{v}=\vec{0}, con\, \alpha\in\mathbb{R}\ y\, \vec{v}\in V$.
  - $\forall \vec{v}\in V\ y\, \forall\alpha\in\mathbb{R}\ se\ cumple\, (-\alpha.\vec{v})=-(\alpha.\vec{v})=\alpha.(-\vec{v})$.
  - $\forall \vec{v}\in V\ y\, \forall\alpha\in\mathbb{R}\ se\ cumple\, (-\alpha).(-\vec{v})=\alpha.\vec{v}$.
  - $\forall\alpha\in\mathbb{R},-\{0\}, si\, \alpha.\vec{a}=\alpha.\vec{b}\Rightarrow \vec{a}=\vec{b}$.

    $\forall\vec{v}\in\mathbb{R},-\{\vec{0}\}, si\, \alpha.\vec{a}=\beta.\vec{a}\Rightarrow \alpha=\beta$.

4. Combinaciones lineales

Sea $(V,+,.)$ un espacio vectorial, $S=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_n\}\subset V$ (*un conjunto de en vectores de V*) y $\vec{v}\in V$ (*un vector de V*). Diremos que $\vec{v}$ **es combinación lineal de S**, cuando $\exists\, a_{1,} a_{2,} \ldots, a_n$ (*existen n números reales*) tal que

$$\vec{v}=a_1.\vec{v}_1+a_2.\vec{v}_2+\ldots+a_n.\vec{v}_n$$

Y diremos que $\vec{v}$ **depende linealmente de S** ($\vec{v}$ *d. l. S*)

Como consecuencia de esta definición, observamos que

- $\forall\vec{v}\in V,\vec{v}$ es combinación lineal de si mismo, ya que

  $$\vec{v}=1.\vec{v}$$

- El vector nulo $\vec{0}$ es combinación lineal de $\{\vec{v},\vec{-v}\}\forall v\in V$, ya que

  $$\vec{0}=\alpha.\vec{v}+\alpha.\vec{-v},\forall\alpha\in\mathbb{R}$$

- El vector nulo $\vec{0}$ es combinación lineal de cualquier conjunto de vectores $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_n\}\forall v\in V$, ya que

  $$\vec{0}=0.\vec{v}_1+0.\vec{v}_2+\ldots+0,\vec{v}_n$$

 # Ejemplos.-

- $\vec{v}=(-4,10,6)\in\mathbb{R}^3$ *es combinación lineal de* $\{v_1,v_2\}=\{(1,2,-3),(-2,2,4)\}$, *dado que* $\vec{v}=(-4,10,6)=2.(1,2,-3)+3.(-2,2,4)=2.\vec{v}_1+3.\vec{v}_2$

- *Sean los vectores* $\vec{v}=(2,-17,4),\vec{v}_1=(0,-3,2),\vec{v}_2=(-1,4,1)\in\mathbb{R}^3$ *, tenemos que* $\vec{v}$ *es combinación lineal de* $\{v_1,v_2\}$ *, ya que si si buscamos un* $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ *, tal que*

  $$\vec{v}=(2,-17,4)=\alpha.(0,-3,2)+\beta.(-1,4,1)=\alpha.\vec{v}_1+\beta.\vec{v}_2$$

  Que desarrollando será

  $$(2,-17,4)=(0,-3\alpha,2\alpha)+(-\beta,4\beta,\beta)=(-\beta,,-3\alpha+4\beta,2\alpha+\beta)$$

  Que equivale a resolver el sistema

  $$2=-\beta$$

  $$-17=-3\alpha+4\beta$$

  $$4=2\alpha+\beta$$

  Obteniendo como solución $\alpha=3$ *y* $\beta=-2$ *, luego*

  $$\vec{v}=3.\vec{v}_1-2.\vec{v}_2$$

  Y por tanto

  $\vec{v}$ *es combinación lineal de* $\{v_1,v_2\}$

5. Sistemas generadores

Sea $(V,+,.)$ un espacio vectorial, un conjunto de vectores $S=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_n\}\subset V$ es un **sistema generador** de V, si $\forall\vec{v}\in V$ es combinación lineal de S,

 # Ejemplos.-

- *El conjunto* $S=\{(2,1),(1,-1),(1,0)\}$ *es un sistema generador de* $\mathbb{R}^2$ *, ya que si consideramos un vector cualquiera* $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ *, podemos encontrar* $r_1,r_2,r_3\in\mathbb{R}$ *tal que*

  $$(x,y)=r_1.(2,1)+r_2.(1,-1)+r_3.(1,0)$$

  Ya que resolviendo el sistema de ecuaciones de incógnitas r_1,r_2 *y* r_3 *,*

  $$x=2r_1+r_2+r_3$$

  $$y=r_1-r_2$$

  Que es un sistema compatible determinado, obtenemos la solución general es

  $$(r_1,r_2,r_3)=\left(\frac{x+y-r}{3},\frac{x-2y-r}{3},r\right);\ r\in\mathbb{R}$$

- *El conjunto formado por los polinomios* $P(x)=1$ *;* $Q(x)=x$ *y* $R(x)=x^2$ *es un sistema generador del espacio vectorial de los polinomios reales de grado menor o igual que dos. Puesto que para cualquier polinomio de este espacio vectorial,* $H(x)=a_0+a_1 x+a_2 x^2$ *, con* $a_{0,} a_{1,} a_2 \in \mathbb{R}$ *, lo podemos escribir como* $H(x)=a_0 . P(x)+a_1 . Q(x)+a_2 . R(x)$ *.*

Sea $(V,+,.)$ un espacio vectorial y $S=\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}\subset V$ un conjunto de vectores, denominamos **envoltura convexa** de S, y denominamos $L(S)$ ó $\langle S\rangle$, al conjunto de todos los vectores que son combinación lineal de S (*es decir el menor espacio vectorial generado por S*).

 # Ejemplo

- *Si* $S=\{\vec{v}_1=(3,-1,3), \vec{v}_2=(2,0,-4)\}$ *, el vector* $\vec{v}=(13,-3,1)$ *pertenece a* $L(S)$ *ya que* $\vec{v}=3,\vec{a}_1+2,\vec{a}_2$

6. Dependencia e independencia lineal

Sea $(V,+,.)$ un espacio vectorial y $S=\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}\subset V$ un conjunto de vectores, decimos que los vectores de S son **linealmente dependientes**, cuando alguno de ellos es combinación lineal de los demás. Al conjunto $S=\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}\subset V$, se le denomina **conjunto ligado o linealmente dependiente**.

Sea $(V,+,.)$ un espacio vectorial y $S=\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}\subset V$ un conjunto de vectores , decimos que los vectores de S son **linealmente independientes**, cuando no es ligado, es decir, cuando ninguno de sus vectores se puede expresar como combinación lineal de los demás vectores de S.

 # Ejemplos.-

- $S=\{(3,-1,3),(13,-3,1),(1,0,-2)\}$ *es un sistema ligado, ya que* $(13,-3,1)=3.(3,-1,3)+4.(1,0,-2)$
- $S=\{(3,0,1),(0,2,-5),(4,3,0)\}$ *es un sistema linealmente independiente o libre, pues ningún vector se puede poner como combinación lineal de los otros dos.*

Un conjunto $S=\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}\subset V$ de un espacio vectorial $(V,+,.)$ es **linealmente dependientes** si y solo si existen $r_{1,} r_2, \dots, r_n \in \mathbb{R}$ no todos nulos tal que $r_1 . \vec{v}_1+r_2 . \vec{v}_2+\dots+r_n . \vec{v}_n=0$.

Un conjunto $S=\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}\subset V$ de un espacio vectorial $(V,+,.)$ es **linealmente independientes** si y solo si para cualquier $r_{1,} r_2, \ldots, r_n \in \mathbb{R}$, tales que $r_1.\vec{v}_1+r_2.\vec{v}_2+\ldots, r_n.\vec{v}_n=0$ se cumple $r_1=r_2=\ldots=r_n=0$.

 # Ejemplo.

- *Para estudiar la dependencia o independencia lineal del conjunto de vectores*

$$S=\{(-1,3,0),(0,4,-2),(-6,0,7)\}$$

Suponemos que existen $r_{1,} r_2, r_3 \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$r_1.(-1,3,0)+r_2.(0,4,-2)+r_3.(-6,0,7)=(0,0,0)$$

Que efectuando los operaciones e igualando las componentes, obtenemos el sistema

$$-r_1-6r_3=0$$

$$3r_1+4r_2=0$$

$$-2r_2+7r_3=0$$

Que es un sistema compatible determinado de solución $r_1=r_2=r_3=0$ *; por tanto el conjunto S es linealmente independiente.*

Sea $(V,+,.)$ un espacio vectorial, $\vec{v}\in V$. $S=\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}\subset V$ es un conjunto de vectores **linealmente independientes**. Si se cumple:

$$\vec{v}=r_1.\vec{v}_1+r_2.\vec{v}_2+\ldots, r_n.\vec{v}_n$$

$$\vec{v}=s_1.\vec{v}_1+s_2.\vec{v}_2+\ldots, s_n.\vec{v}_n$$

entonces, tenemos que: $r_1=s_{1,} r_2=s_2, \ldots, s_n=s_n$

7. Bases de un espacio vectorial

Sea $(V,+,.)$ un espacio vectorial y $B=\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}\subset V$ un conjunto de vectores , decimos que los vectores de B son **una base de V**, cuando B es un sistema linealmente independiente y es, además sistema generador de V.

 # Ejemplos.-

Sea $B=\{\vec{a}_1=(0,4), \vec{a}_2=(-2,6)\}$ *un conjunto de vectores del espacio vectorial* $\mathbb{R}^2$ *, Vamos a comprobar si forman una base de dicho espacio.*

- *Primero, comprobamos que son linealmente independientes, ya que*

$$r_1.\vec{a}_1+r_2.\vec{a}_2=(0,0)$$

Que equivalente a resolver el sistema

$$-2r_2=0$$

$$4r_1+6r_2=0$$

Cuya, solución es $r_1=r_2=0$ *, y por tanto B es un sistema linealmente independiente.*

- *Segundo,comprobamos que es un sistema generador de* $\mathbb{R}^2$ *, ya que si (x,y) es un vector de* $\mathbb{R}^2$ *, podemos encontrar* $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ *, tal que* $(x, y)=r_1.\vec{a}_1+r_2.\vec{a}_2$

  Que es equivalente a resolver el sistema

$$-2r_2=x$$

$$4r_1+6r_2=y$$

Cuya, solución es $r_1=\frac{3x+y}{4}; r_2=-\frac{x}{2}$ *, y por tanto B es un sistema generador de* $\mathbb{R}^2$ *,*

Luego B es una base de $\mathbb{R}^2$ *.*

Sea $(V,+,.)$ un espacio vectorial, si $B=\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}\subset V$ es una base de V, cualquier vector de V, se puede poner como combinación lineal única de los vectores de B.

Sea $(V,+,.)$ un espacio vectorial, $\vec{v} \in V$ y $B=\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}\subset V$ una base de V tal que

$$\vec{v}=r_1.\vec{v}_1+r_2.\vec{v}_2+\ldots, r_n.\vec{v}_n$$

Los coeficientes $r_1, r_2, \ldots, r_n$ son las **coordenadas de** $\vec{v}$ **respecto de la base B**, y lo expresamos

$$\vec{v}=(r_1, r_2, \ldots, r_n)$$

 # Ejemplo.-

Si $\vec{v}=(23,1,-1)$ *respecto de la base canónica de* $\mathbb{R}^3$ *, hallamos las coordenadas* r_1, r_2, r_3 *de este vector respecto de la base* $B=\{(1,1,0),(0,1,-2),(4,0,-1)\}$ *:*

$$r_1.(1,1,0)+r_2.(0,1,-2)+r_3.(4,0,-1)=(23,1,-1)$$

Que equivale a resolver el sistema

$$r_1+4r_3=23$$

$$r_1+r_2=1$$

$$-2r_2-r_3=-1$$

Que resolviendo el sistema obtenemos que $r_1=3, r_2=-2, r_3=5$ *. Así las coordenadas de* $\vec{v}$ *respecto de la base B, son* $\vec{v}=(3,-2,5)$

Todas las bases de un espacio vectorial tienen el mismo número de vectores.

Sea $(V,+,.)$ un espacio vectorial, se llama **dimensión de V, dim(V),** al número de vectores que tiene una cualquiera de sus bases

 # Ejemplos.-

a) Como $B=[(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)]$ *es una base de* $\mathbb{R}^3$ *,* $dim(\mathbb{R}^3)=3$

b) Como $B=[1,x,x^2]$ *es una base de* $P_2(x)$ *, que es el espacio de los polinomios de grado menor o igual que dos, entonces,* $dim(P_2(x))=3$

Si $(V,+,.)$ es un espacio vectorial de dimensión n, cualquier conjunto formado por n+1 vectores de V es linealmente dependiente es una base de V.

Si $(V,+,.)$ es un espacio vectorial de dimensión n, cualquier conjunto formado por n vectores de V linealmente independiente es una base de V.

 # Ejemplos.-

a) Los vectores $(2,0)$ *y* $(1,-3)$ *son linealmente independientes y, por ello, forman una base de* $\mathbb{R}^2$ *, ya que* $dim(\mathbb{R}^2)=2$

b) Sea $S=[(1,2),(3,-5),(9,-4)]$ *, Este conjunto está formado por tres vectores de* $\mathbb{R}^2$ *; como sabemos que* $dim(\mathbb{R}^2)=2$ *, podemos asegurar que S no es una base de V.*

8. Subespacios vectoriales

Sea $(V,+,.)$ un espacio vectorial y $W\subset V$ un conjunto de vectores , decimos W es un **subespacio vectorial de V** si es, a su vez W espacio vectorial real.

Sea $(V,+,.)$ un espacio vectorial y $W\subset V$ un conjunto de vectores , W es un **subespacio vectorial de V** si y solo si se verifica

- Para cualesquiera $\vec{a},\vec{b}\in W \Rightarrow \vec{a}+\vec{b}\in W$.
- Para cualesquiera $\vec{a}\in W\ y\ \alpha\in\mathbb{R}\Rightarrow \alpha.\vec{a}\in W$.

 # Ejemplo.-

Consideramos el subconjunto

$$W=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\ Tal\ que\ x_1-x_2=0\}$$

Veamos que se cumplen las condiciones de subespacio vectorial.

- *Si* $\vec{x}=(x_1, x_2, x_3), \vec{y}=(y_1, y_2, y_3) \in W$

  $\vec{x}+\vec{y}=(x_1, x_2, x_3)+(y_1, y_2, y_3)=(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)$

  Que como se cumple

  $x_1+y_1-(x_2+y_2)=x_1-x_2+y_1-y_2=0+0=0$

  Luego

  $\vec{x}+\vec{y} \in W$

- *Si* $\vec{x}=(x_1, x_2, x_3) \in W$ *y* $\alpha \in \mathbb{R}$

  $\alpha.\vec{x}=\alpha.(x_1, x_2, x_3)=(\alpha.x_1, \alpha.x_2, \alpha.x_3)$

  Que como se cumple

  $\alpha.x_1-\alpha.x_2=\alpha.(x_1-x_2)=\alpha.0=0$

  Luego

  $\alpha.\vec{x} \in W$

Sea $(V,+,.)$ un espacio vectorial y $W \subset V$ un conjunto de vectores , W es un **subespacio vectorial de V** si y solo si se verifica

- Para cualesquiera $\vec{a}, \vec{b} \in W$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha.\vec{a}+\beta.\vec{b} \in W$.

 # Ejemplos.-

- *Hallemos una base del subespacio vectorial*

  $W=\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \, tal\, que\; x_1+2x_3-x_4=0\}$

  Pero, primero comprobemos que es W es un subespacio vectorial:

  $Si\; a, b \in \mathbb{R}; \vec{x}=(x_1, x_2, x_3, x_4), \vec{y}=(y_1, y_2, y_3, y_4) \in W$

  Como

  $\vec{z}=a.\vec{x}+b.\vec{y}=(z_1, z_2, z_3, z_4) \in W$

  puesto que $z_1+2z_3-z_4=a.(x_1+2x_3-x_4)+b.(y_1+2y_3-y_4)=a.0+b.0=0$ *, resulta que W es subespacio vectorial.*

  Para hallar una base de W, despejamos x_4 *de la ecuación* $x_1+2x_3-x_4=0$ *y obtenemos*

  $x_4=x_1+2x_3$

  y damos valores simples, y de forma ordenada, al resto de variables, hasta obtener tres *vectores linealmente independientes. Es decir:*

$$Si \quad x_1=1, x_2=0, x_3=0 \Rightarrow x_4=1, luego\, \vec{b}_1=(1,0,0,1)$$

$$Si \quad x_1=0, x_2=1, x_3=0 \Rightarrow x_4=0, luego\, \vec{b}_2=(0,1,0,0)$$

$$Si \quad x_1=0, x_2=0, x_3=1 \Rightarrow x_4=2, luego\, \vec{b}_3=(0,0,1,2)$$

Luego, $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ *forman una base de W, ya que el número de vectores de la base vectorial es igual al número de componentes de sus vectores menos el número de sus ecuaciones lineales que definen el subespacio, y además son vectores independientes*

- *Encontraremos las ecuaciones paramétricas del subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^4$

$$W=\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4\, tal\, que\, 3x_1-3x_2+x_3=0 ; -x_1-x_2+x_4=0\}$$

Si consideramos el sistema formado por su dos ecuaciones implícitas y lo resolvemos aplicando el método de Gauss

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{3.F_2+F_1}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Que es un sistema compatible indeterminado; así tomando $x_3=\alpha$ *y* $x_4=\beta$ *, obtenemos las ecuaciones paramétricas del subespacio*

$$x_1=-\frac{1}{6}.\alpha+\frac{1}{2}.\beta$$

$$x_2=\frac{1}{6}.\alpha+\frac{1}{2}.\beta$$

$$x_3=\alpha$$

$$x_4=\beta$$

- *Sean las ecuaciones paramétricas correspondientes al subespacio vectorial* $\mathbb{R}^4$

$$\begin{aligned} x_1&=\alpha+2\gamma-\mu \\ x_2&=2\alpha+\beta+3\gamma-\mu \\ x_3&=2\alpha-\beta+3\gamma-2.\mu \\ x_4&=2.\beta-2.\gamma+2.\mu \end{aligned}$$

Que resolviendo el sistema, considerando $\alpha, \beta, \gamma\, y\, \mu$ *como variables, obtenemos, por ejemplo utilizando el método de Gauss a la matriz ampliada del sistema, se obtiene*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & x_1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & x_2 \\ 1 & -1 & 3 & -2 & x_3 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & x_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} F1 \\ F_2-2F_1 \\ F_3+F_2-3F_1 \\ F_4-2F_2+4F_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2x_1+x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3x_1+x_2+x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4x_1-2x_2+x_4 \end{pmatrix}$$

Luego, como en las dos últimas filas todos los coeficientes de las incógnitas son cero, las ecuaciones implícitas serán

$$-3x_1+x_2+x_3=0 \quad y \quad 4x_1-2x_2+x_4=0$$