MEDIA ARITMÉTICA SIMPLE

Por Inga. Karim Paz, kspaz@url.edu.gt

RESUMEN

Por lo general cuando se hace referencia al término media, las personas piensan de manera inmediata en media aritmética, sin embargo existen otros tipos de medias que tienen usos distintos y aplicaciones específicas. En el quehacer de la Ingeniería se suelen utilizar esos diversos tipos de medidas de tendencia central. En este artículo la autora trata en forma breve las definiciones y usos de los distintos tipos de medias y las ventajas y desventajas de cada una de ellas.

DESCRIPTORES

Media aritmética. Media ponderada. Media geométrica. Media armónica. Media cuadrática.
.

ABSTRACTS

In general terms, whenever a reference is done to Mathematical Mean definition, people think immediately in arithmetic mean. Although, there are several others measures with their own definitions and specific applications. In engineering applications all these diverse tools for central tendency measurement are currently used. In this article author refers briefly to definitions and uses of different central means and their advantages and troubles when used in specific applications.

KEYWORDS

Arithmetic Mean. Weighed mean. Geometric mean. Harmonic mean. Quadratic mean.

MEDIA ARITMÉTICA SIMPLE

La media aritmética o promedio simple ($\overline{X}$) muestra el valor central de los datos constituyendo ser la medida de ubicación que más se utiliza. En general, es calculada sumando los valores de interés y dividiendo entre el número de valores sumados.

Propiedades

- Si multiplicamos o dividimos todas las observaciones por un mismo número, la media queda multiplicada o dividida por dicho número
- Si le sumamos a todas las observaciones un mismo número, la media aumentará en dicha cantidad.

Ventajas y desventajas del uso de la media aritmética

- La media aritmética viene expresada en las mismas unidades que la variable. - En su cálculo intervienen todos los valores de la distribución.
- Es el centro de gravedad de toda la distribución, representando a todos los valores observados.
- Es única.
- Su principal inconveniente es que se ve afectada por los valores extremadamente grandes o pequeños de la distribución.

Datos No Agrupados

La media aritmética ($\overline{X}$), de una cantidad finita de números (X_1, X_2, X_3….X_n), es igual a la suma de todos ellos dividida entre el número de sumandos (n). Simbólicamente se expresa así:

$$\overline{X} = \frac{(X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_n)}{n}$$

Datos Agrupados

La fórmula correspondiente para su cálculo es la siguiente:

$$\bar{X} = \frac{f_1X_1 + f_2X_2 + f_3X_3 + ... + f_nX_n}{f_1 + f_2 + f_3 + f_n}$$

¿Cuándo se debería utilizar este tipo de media?

Para responder a esta interrogante se presentan una ilustración sobre la aplicación de esta medida de tendencia central.

APLICACIONES DE LA MEDIA ARITMÉTICA

Ilustración 1. Se desea estimar el rendimiento promedio de las llantas de cierta marca. Para ello se toma una muestra de cuatro automóviles a los que se les coloca esta marca de llanta. Una vez las llantas se desgastan completamente se anota el número de kilómetros recorridos por cada auto, encontrándose los siguientes valores:

Número de Auto	Recorrido (kms)
1	56,000
2	42,000
3	23,000
4	73,000

Con base a la tabla anterior, se procede a calcular el promedio de la siguiente manera:

$$\overline{X} = \frac{(56,000 + 42,000 + 23,000 + 73,000)}{4} = 48,500 \text{ Kilómetros}$$

Por tanto, se puede concluir que el rendimiento promedio de las llantas de esta marca (vida útil) es de 48,500 kilómetros.

MEDIA PONDERADA

Una media ponderada ($\overline{X}_w$) es una media o promedio de cantidades a las que se ha asignado una serie de coeficientes, llamados pesos, para tener en cuenta adecuadamente su importancia relativa.

Datos No Agrupados

La media ponderada de un grupo de datos X_1, X_2, ...X_n, con sus correspondientes pesos w_1, w_2, ...,w_n, pude obtenerse a través de la siguiente fórmula:

$$\overline{X}_w = \frac{(w_1 X_1 + w_2 X_2 + ... + w_n X_n)}{(w_1 + w_2 + ... w_n)}$$

¿Cuándo se debería utilizar este tipo de media? Se incluye una ilustración para responder a esta pregunta.

APLICACIONES DE LA MEDIA PONDERADA:

Cuando se trabaja con la media aritmética simple, se asume que a cada observación se le da la misma importancia. Sin embargo, en ciertos casos, puede querer darse mayor peso o importancia a algunas de las observaciones y entonces se plica la media ponderada.

A continuación se muestran algunos ejemplos de aplicación de la media ponderada.

Ilustración 2. En la clase de Probabilidad y Estadística, para determinar la nota que un alumno obtendrá en el curso se asignan pesos de importancia, de la siguiente forma: Unidad I (20% del curso), Unidad II (35% del curso), Unidad III (20% del curso), Unidad IV (15% de la calificación), Unidad V (20% de la calificación).

Si las calificaciones de un alumno son 80 en la primera unidad, 50 en la segunda, 80 en la tercera unidad, 100 en la cuarta unidad y 80 en la última unidad, obtiene la siguiente tabla:

Unidad	Ponderación (w_i)	Datos (X_i)
I	20% = 0.2	80
II	25% = 0.35	50
III	20% = 0.2	80
IV	15% = 0.15	100
V	20% = 0.10	80

La media ponderada de las notas del alumno se determina de la siguiente manera:

$$\bar{X}_w = 80(0.2) + 50(0.35) + 80(0.20) + 100(0.15) + 80(0.10)/1 = 72.50$$

El promedio ponderado entonces para este alumno es de una calificación de 72.50 puntos sobre 100, que era el total máximo.

Ilustración 3. En tarde calurosa del sábado, Cristian un empleado de un kiosco de bebidas sirvió en total 50 bebidas durante la mañana de ese día. Vendió 5 bebidas de \$0.50, 15 de \$0.75, otras 15 de \$0.90, y otras 15 de \$1.10. A continuación se muestra la media ponderada del precio de las bebidas vendidas por Cristian para ese día:

$$\bar{X}\ w = 5(\$0.50) + 15(\$0.75) + 15(\$0.90) + 15(\$1.15)\ /50 = \$0.89$$

La media ponderada para el precio de las bebidas despachadas por Cristian en su kiosco, con base a los datos del día sábado, fue de \$0.89 por bebida.

MEDIA GEOMÉTRICA

La media geométrica (*MG*) de un conjunto de *n* números positivos se define como la enésima raíz del producto de *n* números.

Ventajas y desventajas:

- En su cálculo intervienen todos los valores de la distribución.
- Los valores extremos tienen menor influencia que en la media aritmética.
- Es única.
- Su cálculo es más complicado que el de la media aritmética.

- Solo se puede calcular si no hay observaciones negativas.

Datos no Agrupados
La fórmula para su cálculo es:

$$MG = \sqrt[n]{(X_1)(X_2)(X_3)...(X_n)}$$

donde MG es media geométrica, *n* es el número total de datos y *X* es el valor de cada observación de la variable de interés.

Datos Agrupados

$$MG = \sqrt[\sum f_i]{(y_1^{f_1})(y_2^{f_2})...(y_n^{fn})}$$

donde MG es media geométrica, y_i es marca de clase, f_i la frecuencia de clase correspondiente, n el número total de datos utilizados.

¿Cuándo se debería utilizar este tipo de media? Lo veremos a través de un par de ilustraciones.

APLICACIONES DE LA MEDIA GEOMÉTRICA:

- Es útil para encontrar el promedio de porcentajes, razones, índices o tasas de crecimiento.
- Se usa cuando se trabaja con observaciones, donde cada una tiene una razón aproximadamente constante respecto a la anterior.
- Para mostrar los efectos multiplicativos en el tiempo de los cálculos del interés compuesto, la inflación y el crecimiento poblacional.
- En estadística para calcular el crecimiento o decrecimiento de las poblaciones, en donde los valores están dados en sucesión geométrica.
- Se sugiere usar la media geométrica siempre que se desee calcular el cambio porcentual promedio en el tiempo para algunas variables.
- En ciertas situaciones, las respuestas obtenidas con la media aritmética no difieren mucho de las correspondientes a la media geométrica, pero incluso diferencias pequeñas pueden generar malas decisiones.

Ilustración 4. Las tasas de interés vigentes de tres bonos son 5%, 7% y 4%. La media geométrica es por lo tanto:

$$MG = \sqrt[3]{(7)(5)(4)} = 5.192\%$$

Comparativamente, la media aritmética correspondiente sería de:

$$\overline{X} = (5 + 7 + 4)/3 = 5.333\%.$$

Como puede observase, la *MG* da una cifra de ganancia más conservadora porque no tiene una ponderación alta para la tasa de 7%.

OTRA APLICACIÓN DE LA MEDIA GEOMÉTRICA

Otra aplicación de la media geométrica es para determinar el porcentaje promedio del incremento en ventas, producción u otros negocios o series económicas de un periodo a otro. La fórmula para este tipo de problema es:

$$MG = \sqrt[n]{(valor\ al\ \ final\ del\ período)/(valor\ al\ inicio\ del\ período)} - 1$$

donde *n* es el número de años comprendido entre el inicio del período y el final del período de interés.

Se ejemplifica la aplicación de la media geométrica utilizando la fórmula anterior.

Ilustración 5. El número total de mujeres inscritas en las distintas universidades del país aumentó de 755,000 en 1996 a 835,000 en el año 2005.

Aquí n = 10 (años comprendidos entre 1996 y 2005), así (n - 1) = 9.

Es decir, la media geométrica de la tasa de crecimiento del número de mujeres inscritas en las distintas universidades del país es 1.27%.

Ilustración 6. A continuación se muestra el crecimiento de un depósito de ahorro de $100 durante cinco años, de acuerdo a las tasas de interés de 7, 8, 10, 12 y 18% para los años 1, 2, 3, 4 y 5 respectivamente.

Crecimiento de un Depósito de $100 en una Cuenta de Ahorro

Año	Tasa de interés %	Factor de crecimiento	Ahorros al final del año ($)
1	7	1.07	107.00
2	8	1.08	115.56
3	10	1.10	127.12
4	12	1.12	142.37
5	18	1.18	168.00

Si se usa la media aritmética simple sería:

$$\overline{X} = (1.07 + 1.08 + 1.10 + 1.12 + 1.18)/5 = 1.11$$

Por lo que si se multiplica el promedio de la tasa de interés de los cinco años por la inversión inicial, se obtiene:

$$\$100 \text{ x } 1.11 \text{ x } 1.11 \text{ x } 1.11 \text{ x } 1.11 \text{ x } 1.11 = \$168.51$$

Como puede verse en la tabla anterior, la cifra real ganada fue sólo de $168.00. Por lo tanto, el factor de crecimiento promedio correcto debe ser ligeramente menor a 1.11.

Para obtener el valor exacto, se debe de utilizar la media geométrica:

$$MG = \sqrt[5]{(1.07)(1.08)(1.10)(1.12)(1.18)} = \sqrt[5]{1.679965} = 1.109328$$

Así, el factor de crecimiento es de 1.10

Ilustración 7. En las economías con un alto índice de inflación, los bancos deben pagar altas tasas de inflación y los bancos deben pagar altas tasas de interés para atraer clientes. Suponga que en un período de cinco años, en una economía con inflación alta los bancos pagan tasas de interés anual de 100, 200, 250, 300 y 400%.

Año	Tasa de interés %	Factor de crecimiento	Ahorros al final del año ($)
1	100	2	200
2	200	3	600
3	250	3.5	2,100
4	300	4	8,400
5	400	5	42,000

Por lo tanto, la tasa media de crecimiento geométrico se calcula así:

$$MG = \sqrt[5]{(2)*(3)*(3.5)*(4)*(5)} = 3.347$$

Este factor de crecimiento corresponde a una tasa de:

$$3.347 - 1 = 2.347 = 234.7\%$$

El factor de crecimiento como media aritmética sería de:

$$\overline{X} = (2+3+3.5+4+5)/5 = 3.5$$

que corresponde a una tasa de interés promedio anual del 250%.

Como se puede apreciar en la tabla a continuación:

Año	Tasa de interés %	Factor de crecimiento	Ahorros al final del año $
1	250	3.5	350
2	250	3.5	1,225
3	250	3.5	4,288
4	250	3.5	15,006
5	250	3.5	52,522

MEDIA ARMÓNICA

La media armónica (*MH*) se define como la recíproca de la media aritmética de los recíprocos de un conjunto de datos.

Datos no agrupados

La fórmula correspondiente para su cálculo es la siguiente:

$$\boxed{MH = \frac{n}{\sum(1/y_i)}}$$

donde *MH* es la media armónica, *n* es el numero de datos, y_i cada valor observado correspondiente a la variable de interés.

Obsérvese que la inversa de la media armónica es la media aritmética de los inversos de los valores de la variable. No es aconsejable en distribuciones de variables con valores pequeños.

Ventajas y desventajas:

- En su cálculo intervienen todos los valores de la distribución
- Su cálculo no tiene sentido cuando algún valor de la variable tomo valor cero
- Es única

Datos agrupados

La fórmula correspondiente para su cálculo es la siguiente:

$$\boxed{MH = \frac{n}{\sum (f_i / y_i)}}$$

donde *MH* es la media armónica, *n* es el numero de datos, f_i el valor de cada frecuencia, y_i cada valor observado correspondiente a la variable de interés.

¿Cuándo se debería utilizar este tipo de media?

APLICACIONES DE LA MEDIA ARMÓNICA

Esta medida se emplea para promediar variaciones con respecto al tiempo tales como productividades, tiempos, rendimientos, cambios, etc., tal como se describe a continuación.

Precio promedio

Si se compran varios tipos de productos con distintas cantidades de unidades de cada tipo, pero gastando en ellos igual cantidad de dinero, el precio promedio por unidad es igual a la media armónica de los precios por unidad de cada tipo de producto.

Rendimiento promedio de producción

En un grupo puede haber operarios con distinta velocidad para producir un artículo. Si cada una de estas personas tiene que elaborar igual cantidad de artículos, el promedio de velocidad de rendimientos de tal grupo, es igual al promedio armónico de las velocidades de rendimiento de cada una de los operarios que lo integran.

Rendimiento Promedio de la Producción

Si $v_1, v_2, \ldots v_n$ son las velocidades de rendimiento de cada uno de las operarios, que aunque sea en distinta cantidad de tiempo, producen igual cantidad de productos, el promedio de velocidad de rendimiento del grupo es:

$$MH = n / (1/v_1 + 1/v_2 + \ldots 1/v_n)$$

donde *n* es el número de operarios.

Ilustración 8. Se compran 4 cajas de bolígrafos. Las cuatro cajas costarán Q20.00 cada una. El precio de cada lapicero es:

Caja	Precio de cada lapicero (Q)
1	0.50
2	1.00
3	1.25
4	2.00

Este problema puede ser resuelto por dos métodos, los cuales se describen a continuación:

Primer Método
Precio promedio = cantidad total gastada / cantidad total de lapiceros comprada
Número de lapiceros = precio de la caja / precio de cada lapicero

Caja	Precio de cada lapicero (Q.)	Número de lapiceros
1	0.50	40
2	1.00	20
3	1.25	16
4	2.00	10

Total gastado = Q.20.00/caja * 4 cajas = Q80.00 en total
Total de lapiceros comprados = 40 + 20 + 16 + 10 = 86 lapiceros
Precio promedio = Q.80.00 / 86 lapiceros = Q.0.93 / lapicero

Segundo Método:
Como las 4 cajas cuestan 20 quetzales, el precio promedio de los lapiceros que contienen es igual al promedio armónico de los precios de los lapiceros de cada caja.

$MH = n$ / [$(1/p_1) + (1/p_2) + (1/p_3) + (1/p_4)$]

MH = 4 / [(1/0.50) + (1/1.00) + (1/1.25) + (1/2.00)]

MH = Q.0.93 / lapicero

Ilustración 9. Si un mensajero conduce 100 millas en una vía rápida a 60 millas/hora y las siguientes 10 millas después de la vía rápida las conduce a 30 millas/hora. ¿Cuál es la velocidad promedio?

Distancia recorrida = 20 millas
Tiempo recorrido:

- Vía rápida = 0.1667 horas
- Vía normal = 0333 horas
- Tiempo total = 0.5 horas

El promedio del tiempo es 20/0.5 = 40 millas / h

$$MH = n / \Sigma\ (1/yi) = 2 /(1/60+1/30) = 40 \text{ millas/h}$$

Por lo tanto, el promedio de la velocidad en que conduce el mensajero es de 40 millas por hora.

MEDIA CUADRÁTICA

Una media cuadrática (*MC*) se define como la raíz cuadrada de la media aritmética de los cuadrados de los valores de la variable.

Datos No Agrupados
Para datos no agrupados su fórmula puede expresarse como:

$$MC = \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{n}}$$

donde *MC* es la media cuadrática, y_i el valor correspondiente a cada dato observado de la variable de interés, *n* el número total de datos.

Datos Agrupados
Para datos agrupados se puede encontrar mediante la siguiente fórmula:

$$MC = \sqrt{\frac{\sum \left(y_i^2\right)\left(f_i\right)}{n}}$$

donde *MC* es la media cuadrática, y_i el valor correspondiente a cada dato observado de la variable de interés, f_i la frecuencia correspondiente a cada valor observado, *n* el número total de datos.

¿Cuándo se debería utilizar este tipo de media? Este tipo de media se utiliza mucho en cálculos científicos.

APLICACIONES DE LA MEDIA CUADRÁTICA

Ilustración 10. A continuación se muestra una serie de datos (agrupados en intervalos) de 56 mediciones de temperatura en grados centígrados. Se va a calcular la media geométrica, armónica y cuadrática para mostrar la diferencia que se obtiene con cada medida.

Por medio de la fórmula de la media geométrica se obtienen los siguientes resultados:

$$\log MG = (\Sigma f_i * \log y_i)/n = 94.3322/56 = 1.6845$$
$$MG = 48.36\ °C$$

Si se aplica la media armónica se obtiene el siguiente resultado:

$$MH = n / \Sigma (f_i/y_i) = 56 / 1.170 = 47.86°C$$

Y con el uso de la media cuadrática se obtiene el siguiente resultado:

$$MC = \sqrt{\sum y_i^2 f_i / n} = \sqrt{136,076/56} = 49.29°C$$

Límites reales		y_i	f_i	f_i*log y_i	f_i/y_i	$f_i.y_i^2$
27.5	32.5	30	1	1.4771	0.0333	900
32.5	37.5	35	2	3.0881	0.0571	2450
37.5	42.5	40	5	8.0103	0.1250	8000
42.5	47.5	45	12	19.8386	0.2667	24300
47.5	52.5	50	24	40.7753	0.4800	60000
52.5	57.5	55	7	12.1825	0.1273	21175
57.5	62.5	60	3	5.3345	0.0500	10800
62.5	67.5	65	2	3.6258	0.0308	8450
TOTAL			56	94.3322	1.1702	136,075

RELACIÓN ENTRE LAS MEDIAS ARITMÉTICA, GEOMÉTRICA, ARMÓNICA Y CUADRÁTICA

La relación entre la media armónica, la media geométrica y la media cuadrática puede expresarse de la siguiente manera:

$$\boxed{MH \le MG \le MC}$$

Como puede observarse a través de la relación anterior, el máximo valor medio de una serie de datos se tiene al calcular la media cuadrática (*MC*) y el mínimo valor medio se obtiene al calcular la media armónica (*MH*)

En distribuciones simétricas los valores de las medias armónica, aritmética, geométrica y cuadrática, son iguales entre sí, es decir:

$$\boxed{MH = MA = MG = MC}$$

A continuación se describe un ejemplo en donde se aplica la media cuadrática y la armónica, para ilustrar estas relaciones.

Ilustración 11. Un ingeniero obtuvo los siguientes datos de concentración de mercurio en partes por millón (ppm) en ocho localidades a lo largo de un arroyo:

0.064	0.071	0.066	0.062	0.073	0.065	0.061	0.066

Desea determinar la concentración máxima y la concentración mínima de mercurio.

La concentración máxima y mínima de mercurio corresponde a la media cuadrática y a la media armónica, ya que estos datos dan los valores extremos de la serie de datos:

$MC = \sqrt{0.064^2 + 0.071^2 + ... + 0.066^2} = 0.066113$ (máximo)
$MH = 8 / (1/0.064 + 1/0.071 + ... + 1/0.066) = 0.06577$ (mínimo)

Concentración máxima de mercurio = 0.0661 ppm
Concentración mínima de mercurio = 0.06577 ppm

CONCLUSIONES

- La media cuadrática tiene aplicaciones científicas. El máximo valor medio de una serie de datos se tiene al calcular la media cuadrática (*MC*) y el mínimo valor medio se obtiene al calcular la media armónica (*MH*).

- En distribuciones simétricas los valores de las medias armónica, aritmética, geométrica y cuadrática, son iguales entre sí.

- Se suele utilizar para promediar variables tales como productividades, velocidades, tiempos, rendimientos, cambios, etc.

- La media geométrica se utiliza para determinar el porcentaje promedio del incremento en ventas, producción u otros negocios o series económicas de un periodo a otro.

- Para mostrar los efectos multiplicativos en el tiempo de los cálculos del interés compuesto, la inflación y el crecimiento poblacional.

- También se utiliza en estadística para calcular el crecimiento o decrecimiento de las poblaciones, en donde los valores están dados en sucesión geométrica.

BIBLIOGRAFÍA

1. **WEBSTER, ALLEN** (2000). "*Estadística Aplicada a los negocios y la economía*". Editorial Mc Graw- Hill. México. Tercera edición.

2. **ANDERSON, SWEENEY & WILLIAMS** (2004) "*Estadística para administración y Economía*". Octava edición. Editorial Thomson. México.

3. **TRIOLA, MARIO** (2004). "*Estadística*" Editorial Pearson. México. Novena edición.

4. **SPIEGEL, MURRAY** (1990). "*Estadística*". Serie Schaum. Editorial Mc Graw-Hill. México. Primera edición.

5. **NAVIDI** (2006). "*Estadística para Ingenieros y científicos*". Editorial Mc Graw Hill. México. Primera edición en español.

E-GRAFIAS

1. **CIENCIA Y TÉCNICA ADMINISTRATIVA**. *Descripción de los datos: medidas de ubicación*. Que es la estadística. Volumen 6 - Número 32 – 2007. Consultado en: http://www.cyta.com.ar/biblioteca/bddoc/bdlibros/guia_estadistica/modulo_3.htm

2. **CONDE, EDUARDO**. Página Personal. Consultado en: http://educon.us.es/ed/traspas/tras160305.pdf

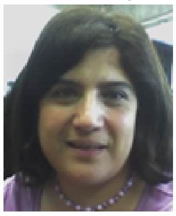
3. **SOCIEDAD ANDALUZA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA THALES**. *Medidas de Centralización*. Consultado en: http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd97/UnidadesDidacticas/53-1-u-punt151.html

4. **UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA**. Unidad 1 *Estadística Descriptiva*. Consultado en: http://www.virtual.unal.edu.co/cursos/ciencias/2001065/lecciones_html/un1/1_8_3.html

5. **UNIVERSITAT JAUME I**. *Media Aritmética*. Consultado en: www.uji.es/~mateu/Tema2-D37.doc

6. **WIKIPEDIA**. *Media aritmética*. Consultado en: http://es.wikipedia.org/wiki/Media_aritm%C3%A9tica

PAZ ABDO, KARIM SOFÍA



Graduada en Ingeniería Química de la Universidad Rafael Landívar, laboró en la industria de cosméticos en los departamentos de envasado de productos y de costos. Fue coordinadora de la Carrera de Ingeniería Industrial de la Universidad Landívar. Actualmente catedrática de dedicación completa de la Facultad de Ingeniería. Ha impartido cátedras en las Universidades Landívar y Francisco Marroquín en los cursos de estadística, aseguramiento y control total de la calidad, seguridad industrial, productividad total, ingeniería de costos, fundamentos de economía, contabilidad gerencial, manufactura de clase mundial, organización y métodos de investigación de operaciones.