Intersecció d'un paraboloide hiperbòlic amb una esfera i un cilindre

Volem estudiar amb GeoGebra la intersecció d'un paraboloide hiperbòlic amb una esfra.

Com a equació del paraboloide hiperbòlic tindrem:

$$f(x, y) = z = x \cdot (y - m\,x)$$

Aquesta serveix per al cas general perquè les altres s'obtenen per rotacions i translacions de l'anterior.

Per a l'esfera:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

GeoGebra ens permet determinar el lloc geomètric a partir d'un punt en la corba implícita obtinguda igualant les dos expressions però no l'acaba de dibuixar i no podem treballar amb l'objecte obtingut.

Per això farem servir coordenades esfèriques.

Un punt sobre la esfera té per coordenades:

$$R \cos t \sin s$$

$$R \sin t \sin s$$

$$R \cos s$$

Si es troba a sobre del paraboloide hiperbòlic:

$$R \cos t \sin s \cdot (R \sin t \sin s - m\,R \cos t \sin s) = R \cos s$$

Desenvolupem aquesta expressió:

$$R^2 \cos t \sin t \sin^2 s - m\,R^2 \cos^2 t \sin^2 s = R \cos s$$

$$R \sin^2 s\,(\cos t \sin t - m \cos^2 t) = \cos s$$

$$R\,(1 - \cos^2 s)\,(\cos t \sin t - m \cos^2 t) = \cos s$$

$$R\;(\cos t \sin t - m \cos^2 t) \cos^2 s + \cos s - R\,(\cos t \sin t - m \cos^2 t) = 0$$

Es tracta d'una equació de 2n grau en cos s amb els coeficients en funció de cos t i de sin t. Com que volem obtenir la corba d'intersecció, farem servir t com a paràmetre.

Com a solució de l'equació prendrem:

$$\cos(s) = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4R^2 \cdot \left(\cos(t) \cdot \sin(t) - m\cos^2(t)\right)^2}}{2R \cdot \left(\cos(t) \cdot \sin(t) - m\cos^2(t)\right)}$$

que també ens servirà per a l'expressió del sin s a partir de la relació entre sinus i cosinus.

Per a un punt a sobre d'un cilindre tenim les coordenades:

$$R \cos t$$

$$R \sin t$$

$$s$$

Si es troba a sobre del paraboloide hiperbòlic:

$$R \cos t \cdot (R \sin t - m R \cos t) = s$$

Amb la qual cosa trobem fàcilment l’expressió de la corba d’intersecció.