

Kompetent mit digitalen Werkzeugen Mathematik betreiben



CLASSPAD II: PRAKTISCH WIE EIN TABLET, SICHER WIE EIN SCHULRECHNER

DAS SMARTE MINT-WERKZEUG MIT TOUCHSCREEN UND APPS.

- Grafikrechner mit CAS
- Großes, drehbares Farbdisplay (4,8 Zoll)
- Bedienung wie bei Tablets
- Grafiken können mit den Fingern verschoben oder aufgezogen werden
- Zuverlässige Stromversorgung:
Laufzeit bis zu 130 Unterrichtsstunden¹
- Robuste Bauweise für langjährigen Schuleinsatz
- Einfacher Reset
- Keine Spiele-Apps, keine Schad-Software
- Keine drahtlose Kommunikation möglich



¹ Handelsübliche Batterien 4x AAA

Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich, Heinz Laakmann,
Hubert Langlotz, Michael Rüsing, Florian Schacht,
Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Werkzeugkompetenzen

Kompetent mit digitalen Werkzeugen Mathematik betreiben

Impressum

1. Auflage 2017

Autoren

Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich, Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing, Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Layout und Gestaltung

Klaus Jeunette, medienstatt GmbH, 58706 Menden (Sauerland)

Gestaltung Titelbild: Oliver Labs, math-sculpture.com

Druck, Bindung und Verarbeitung:

becker druck, F.W. Becker GmbH
Grafenstraße 46, 59821 Arnsberg

Verlag und Gesamterstellung

Verlag medienstatt GmbH – Die Werkstatt für Kommunikation,
Unnaer Straße 50, 58706 Menden (Sauerland), www.medienstatt.de.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

ISBN 978-3-938052-15-0

Das Werk einschließlich aller Inhalte ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte vorbehalten. Der Ausdruck und die Verwendung der Arbeitsblätter für unterrichtliche Zwecke sind erlaubt. Ansonsten sind der Nachdruck oder die Reproduktion (auch auszugsweise) in irgendeiner Form (Druck, Fotokopie oder anderes Verfahren) sowie die Einspeicherung, Verarbeitung, Vervielfältigung und Verbreitung mit Hilfe elektronischer Systeme jeglicher Art, gesamt oder auszugsweise, ohne ausdrückliche schriftliche Genehmigung des Verlages untersagt. Alle Übersetzungsrechte vorbehalten. © 2017 Verlag medienstatt GmbH

Arbeiten mit dem Buch

Dieses Buch gibt Ihnen in der elektronischen Version die Möglichkeit über interaktive Elemente zusätzliche Informationen abzurufen. Sprungbefehle zu Buchseiten, Links zu GeoGebra- und TI-Nspire-Aufgabendateien sowie Downloadlinks zu PDF-Kopiervorlagen nutzen digitale Möglichkeiten und ergänzen die Buchinhalte.

Interaktive Elemente sind im EPUB mit diesem Zeichen markiert.



Mit einem Klick / Touch auf den GeoGebra-, TI-Nspire- oder PDF-Button im Layout wird die entsprechende Datei über das Internet zugänglich gemacht. In der gedruckten Version müssen die Links im Browser eingegeben werden.



Die GeoGebra-Datei wird über GeoGebra-Tube bereitgestellt und öffnet sich in einer Browserumgebung mit der entsprechenden Aufgabe. Auf dem digitalen Endgerät muss dazu das Programm / die App GeoGebra nicht installiert sein.

Sie können die vollständige ggb-Datei aber auch downloaden und in der Programmumgebung damit weiterarbeiten.



Die TI-Nspire-Dateien werden zum Download angeboten. Sie benötigen für diese Anwendung die Software TI-Nspire.



Die Aufgabenblätter können als Kopiervorlage im pdf-Format geladen werden.



Bilder liegen im jpg-Format vor und können in den digitalen Aufgaben verwendet werden.

Danksagung

Der MNU - Verband zur Förderung des MINT-Unterrichts tritt seit 1891 für Qualität und Fortschritt in den mathematischen und naturwissenschaftlichen Schulfächern ein. Durch praxiserprobte Fortbildungen und fachlichen Dialog unterstützt MNU Lehrerinnen und Lehrer bei ihrer anspruchsvollen Arbeit und der Weiterentwicklung beruflicher Fähigkeiten.

Gemeinsames Ziel mit T³ (Teachers Teaching with Technology) ist ein Unterricht, der Schülerinnen und Schülern hilft, die Inhalte und Denkweisen des Faches zu verstehen und das Fach Mathematik als lebendig und sinnstiftend zu erleben, sodass es ihnen Freude macht, sich damit zu beschäftigen.

Das Lehrerfortbildungsprojekt T³ ist Lehrer*innen*netzwerk, das seit 20 Jahren national und international die Erfahrungen engagierter Lehrerinnen und Lehrer beim Einsatz digitaler Werkzeuge bündelt und analysiert, wissenschaftliche Studien unterstützt und entsprechende Ergebnisse interessierten Kolleginnen und Kollegen zur Verfügung stellt. Dies geschieht u. a. auf schulinternen Fortbildun-

gen, Regionaltagungen mit Vorträgen und Workshops und in Form von lehrplanrelevantem Unterrichtsmaterial für Lernende und Lehrende.

Der MNU setzt sich für einen zeitgemäßen Einsatz von digitalen Werkzeugen und für eine Bildung in der digitalen Welt ein. Deren Erwerb darf nicht irgendwelchen Zufälligkeiten überlassen werden. Deshalb begrüßt der MNU ausdrücklich die Bemühungen der KMK, das Thema „Digitalisierung“ in den Schulen zu stärken. Mit der Gründung der Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen hat er seine fachliche Expertise eingesetzt und exemplarisch für den Mathematikunterricht eine Handreichung ermöglicht und damit einen Dialog zwischen den Verbänden und Fachexperten zu dieser Thematik initiiert.

Die Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen (kurz: WeKo) wurde auf Initiative des Fördervereins MNU gegründet und zusammen mit T³ finanziell unterstützt. Auf zahlreichen gemeinsamen Arbeitstagungen wurden Erfahrungen ausgetauscht, praxistaugliche Beispiele ent-

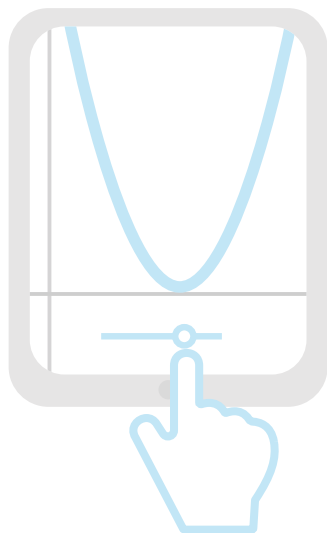
wickelt und Konzeptionen für ein schulinternes Medienkonzept aufgezeigt.

Wir danken Mario Poethke für seine zeitweise Mitarbeit in unserer Arbeitsgruppe, Ulla Schmidt für ihre Bereicherung durch Arbeitsmaterialien und Prof. Dr. Bärbel Barzel für die konstruktive Betreuung des WeKo- Projektes.

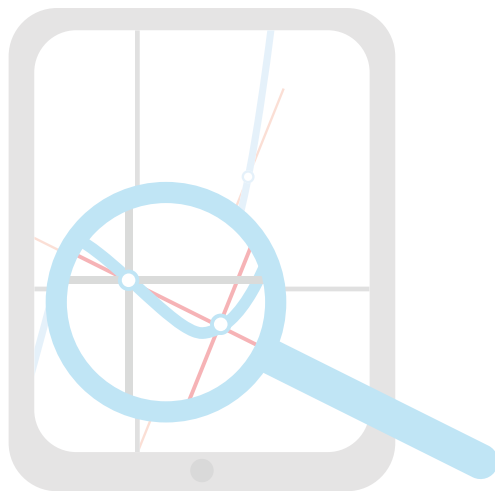
Unser Dank geht auch an alle Kolleginnen und Kollegen, die in Diskussionen Hinweise und Beiträge geliefert haben. Wir danken insbesondere der GDM und der gemeinsamen Mathematik-Kommission Übergang Schule-Hochschule von DMV, GDM und MNU für die Möglichkeit, auf ihren Tagungen schon Zwischenergebnisse unserer Arbeit vorzustellen und darüber mit den Kolleginnen und Kollegen zu diskutieren.

Die Autoren

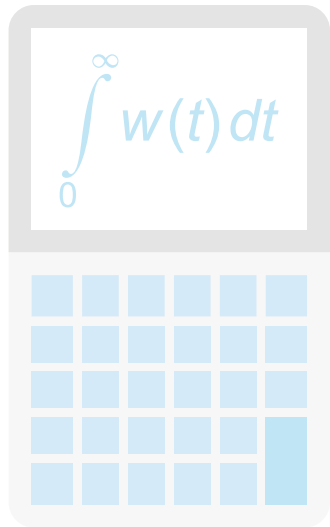
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich, Dr. Heinz Laakmann, Dr. Hubert Langlotz, Michael Rüsing, Prof. Dr. Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Dr. Carsten Tietz



1. VORWORT	10
2. DIGITALE WERKZEUGE	12
3. WERKZEUGKOMPETENZEN	20
3.1 Begriffsklärung	20
3.2 Auswahl und Bedienung	23
3.3 Dokumentation und Reflexion	27
4. SUKZESSIVER AUFBAU VON DIGITALEN WERKZEUGKOMPETENZEN IN DER PRAXIS	29
4.1 Werkzeugkompetenzen in curricularer Perspektive	29
4.2 Beispiel für die Integration in ein Medienkonzept in der Schule	31
5. BEISPIELE FÜR ALLE JAHRGANGSSTUFEN	36
5.1 Achsensymmetrie	38
5.2 Satz des Thales	44
5.3 Besondere Punkte im Dreieck	52
5.4 Mittenviereck	56
5.5 Radius gesucht. Üben und Problemlösen	60



5.6	Verteilung der Körpergröße	64
5.7	Fernsehverhalten von Jugendlichen (Boxplot)	68
5.8	Mit Simulationen zum Hypothesentest	72
5.9	Quadratische Funktionen	80
5.10	Parametervariation bei Exponentialfunktionen	84
5.11	Wachstum	96
5.12	Ableitungsfunktion – ein handlungsorientierter Zugang	102
5.13	Funktionenlupe	108
5.14	Einstieg in die Differentialrechnung	114
5.15	Einführung in die Integralrechnung	124
5.16	Freifallturm	138
5.17	Rotationskörper	144
5.18	Übergangsmatrizen	148
6.	MATHEMATIK ZU PAPIER BRINGEN: DOKUMENTATIONEN IM LERNPROZESS UND IN (ABITUR-)KLAUSUREN	156
6.1	Dokumentation und Reflexion bei der Arbeit mit digitalen Werkzeugen	157
6.2	Eine prozessorientierte Sicht auf Dokumentationen	161



6.3	Praxishilfen für die Arbeit im Unterricht	163
6.4	Dokumentation der Lösung einer Klausuraufgabe zur Analysis	164
6.4.1	Vorbemerkungen	164
6.4.2	Aufgabenstellung	165
6.4.3	Sequenz von Screenshots aus einer möglichen Schülerbearbeitung	166
6.4.4	Dokumentation der Schülerlösung	167
6.4.5	Praxishilfen für die Lernerfolgskontrolle	169
7.	KONSEQUENZEN	170
7.1	Entschleunigung und Zielgerichtetheit, systematische Variation und dynamische Visualisierung	170
7.2	Aufbau von Werkzeugkompetenzen – Einsteigen über „Handytarife“	172
7.3	Ausbildung und Fortbildung als Unterstützungsmaßnahme	178
8.	ABSCHLUSS: ZU GUTER LETZT	178
	Literatur	179
	Index	182
	Bildnachweis	183
	Autoren	184

1. Vorwort

Die Arbeitsgruppe „Werkzeugkompetenzen“ aus Vertretern des Fachlehrerverbandes MNU-Verband zur Förderung des MINT-Unterrichts und des Lehrerfortbildungsprojekts T³ (Teachers Teaching with Technology) beschäftigt sich mit der Frage, über welche Kompetenzen Lernende zum Abitur bzw. nach Abschluss der Sekundarstufe I beim Umgang mit digitalen Werkzeugen im Fach Mathematik verfügen sollen.

Digitale Medien gehören in vielfältigen Bereichen zum festen Bestandteil des gesellschaftlichen (und damit unterrichtlichen) Alltags. Schülerinnen und Schüler wachsen mit Medien auf, und die digitalen Medien prägen unser gesellschaftliches Leben entscheidend mit. Es ist eine gesellschaftliche Aufgabe und damit auch eine Aufgabe von Schule, den Nutzen, das Potential, aber auch die Grenzen solcher Medien zu vermitteln.

Im Mathematikunterricht können digitale Medien heutzutage insbesondere als digitale Werkzeuge genutzt werden, um mit ihnen mathematische Sachverhalte zu erkunden und mathematische Probleme zu bearbeiten.

Die Betonung des Werkzeugcharakters macht hier insbesondere deutlich, dass diese Hilfsmittel im Mathematikunterricht einem ganz spezifischen Zweck unterliegen: Sie werden genutzt bzw. können genutzt werden, um in kompetenter Weise Mathematik zu betreiben. Mit dieser Betonung wird auch deutlich, dass zentraler Kern des Mathematikunterrichts nach wie vor die Mathematik ist, die je nach Gegenstandsbereich mit unterschiedlichsten Werkzeugen erfahren werden kann – etwa mit Zirkel und Lineal, mit dem Geodreieck oder mit digitalen Werkzeugen.

Dabei ergeben sich Herausforderungen für fachdidaktische und unterrichtliche Weiterentwicklungen auf verschiedenen Ebenen:

- **Lernkontexte und Aufgabenkultur**

Die Nutzung digitaler Werkzeuge im Mathematikunterricht hat zwangsläufig Auswirkungen auf die Aufgabenkultur. Auch wenn bereits vielfältige praxiserprobte und wissenschaftlich beforschte Lernkontexte vorliegen, so zeigt ein Blick in die unterrichtliche Praxis, dass solche Veränderungsprozesse der Aufgabenkultur und häufig

damit verbunden auch der Unterrichtskultur nicht immer reibungsfrei verlaufen. Für die Kolleginnen und Kollegen im Fachunterricht stellen sich bei einer Nutzung solcher digitalen Werkzeuge neben der Frage nach dem Einsatz und der Bedienung des Werkzeugs an sich auch Fragen nach geeigneten und produktiven Aufgabenformaten, nach schüleraktivierenden Arbeitsformen mit den digitalen Werkzeugen sowie nach praxistauglichen Prüfungsformaten, die etwa auch rechnerfreie Teile umfassen.

- **Werkzeugkompetenzen**

Das Potential digitaler Werkzeuge für den Mathematikunterricht ist bereits anhand von Forschungsergebnissen und unterrichtspraktischen Beiträgen belegt, wie etwa das M³-Projekt von Weigand & Bichler (2003 – 2012) oder das Calimero-Projekt von Bruder & Pinkernell (2005 – 2013). Unklarheit besteht aber noch darüber, über welche Werkzeugkompetenzen die Schülerinnen und Schüler jeweils verfügen sollten, um sich in adäquater Weise mit den mathematischen Gegenständen in den unterschiedlichen Jahrgangsstufen auseinander

zu setzen. In diesem Zusammenhang ist insbesondere der Begriff der Werkzeugkompetenz bisher sehr wenig fundiert.

Gerade die Beantwortung dieser letzten Frage, was digitale Werkzeugkompetenz eigentlich meint und über welche digitalen Werkzeugkompetenzen die Schülerinnen und Schüler, etwa zum Ende der Jahrgangsstufen 6, 8, 10, Q2 verfügen sollten, ist eine der wesentlichen Voraussetzungen, um in überzeugender Weise unterrichtliche und aufgabenbezogene Neuerungen im Mathematikunterricht in Gang zu setzen (Stichwort: Aufgabenkultur) und für diese (etwa im Rahmen von Fortbildungen) zu werben.

Digitale Werkzeugkompetenzen sind nicht einfach irgendwelche Kompetenzen neben anderen, sondern liegen quer zu allen inhaltlichen Kompetenzen/Leitideen und allen anderen prozessbezogenen Kompetenzen und spielen bei allen drei oft zitierten Grunderfahrungen nach Heinrich Winter (1996) eine wesentliche Rolle.

Der Mathematikunterricht ist dadurch allgemeinbildend, dass er drei Grunderfahrungen ermöglicht:

(G1) „Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,

(G2) mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen,

(G3) in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinausgehen, (heuristische Fähigkeiten) zu erwerben.“

Tabelle 1: Grunderfahrungen nach Winter

Stark verkürzt könnte man die Aussagen von Winter zusammenfassen zu: G1: mathematische Anwendungen, G2: innermathematisches Arbeiten, G3: Problemlösen, Heuristik. Sicherlich muss man konstatieren, dass im derzeitigen Mathematikunterricht nicht alle drei Grunderfahrungen gleich stark berücksich-

sichtigt werden. In keinem Fall sollte aber eine außer Acht gelassen werden.

In  **Kapitel 2** des vorliegenden Werkes wird zunächst grundsätzlich ausgeführt, was wir unter digitalen Werkzeugen und in  **Kapitel 3** unter Werkzeugkompetenzen verstehen, und dann ein Überblick über den aktuellen Stand der digitalen mathematischen Werkzeuge gegeben.

In  **Kapitel 4** wird diese systematische Perspektive konkret ergänzt um eine jahrgangsstufenbezogene Perspektive, bei der jeweils der Nutzen und die Potentiale digitaler Werkzeuge zu unterschiedlichen mathematischen Gegenständen exemplarisch entlang Jahrgangsstufen aufgezeigt werden

In  **Kapitel 5** werden Beispiele zum Einsatz digitaler Werkzeuge in den Klassen 5 - Q2 vorgestellt, die sowohl in Papierform als auch digital zur Verfügung stehen.

In  **Kapitel 6** wird die Problematik der Dokumentation aufgegriffen.

2. Digitale Werkzeuge

Zunächst macht es Sinn, den Begriff des Werkzeugs zu klären.

„Ein Werkzeug ist ein Hilfsmittel, um auf etwas einzuwirken. Unter Werkzeug im unterrichtlichen Zusammenhang verstehen wir flexibel einsetzbare Hilfsmittel beim Lehren und Lernen, Lernwerkzeuge also. (...) Gute Lernwerkzeuge sorgen für eine Arbeitserleichterung und ermöglichen bzw. unterstützen wichtige Lernaktivitäten.“ (Elschenbroich 2011)

Werkzeuge spielen eine bedeutsame Rolle im Mathematikunterricht. Mit den Fortschritten in der Mathematik und mit den neuen Werkzeugen änderte sich im Laufe der Geschichte auch der Mathematikunterricht in seinen Zugängen zu Themen, didaktischen Möglichkeiten und letztlich auch in seinen Inhalten. Werkzeuge an sich sind nicht gut oder schlecht. Das gilt für das Geodreieck und den grafikfähigen Taschenrechner wie für alltägliche Werkzeuge wie Hammer oder Kettensäge. Es kommt auf den Gebrauch an und ggf. dabei auch auf den Kontext. Die Aufgabe muss zum Werkzeug passen und das Werkzeug zur Aufgabe.

Werkzeuge werden aber gerne verabsolutiert und dabei glorifiziert („*Der Computer macht schlau.*“) oder dämonisiert („*Der Taschenrechner ist schuld.*“). Für den Mathematikunterricht gilt in diesem Zusammenhang, dass digitale Werkzeuge nicht um ihrer selbst willen genutzt werden sollten. Vielmehr muss der wohlreflektierte Einsatz solcher Werkzeuge dazu beitragen, die Mathematik besser zu verstehen und angemessen zu erfahren. Die in dieser Handreichung beschriebenen unterrichtspraktischen Beispiele sollen die Möglichkeiten und den Mehrwert digitaler Werkzeuge deutlich machen.

Die Neuentwicklung von Werkzeugen, die in der Mathematik für die Bearbeitung von Problemen genutzt werden, ist kein neues Phänomen – Heft und Stift, Tafel und Kreide, Zirkel und Lineal, Logarithmentafeln bis zu Taschenrechnern und Computerprogrammen markieren allesamt Weiter- und Neuentwicklungen von Werkzeugen, die historisch gesehen für mathematisches Arbeiten genutzt wurden. Mit digitalen Werkzeugen ändern sich insbesondere das Verständnis von Operationen und

der Grad ihrer Verfügbarkeit.

Dieser Abschnitt hat neben einer grundlegenden Begriffsklärung das Ziel, den Nutzen und Zweck digitaler Werkzeuge für den Mathematikunterricht im Allgemeinen zu beleuchten.

Tabelle 2a stellt zunächst zentrale Aspekte von digitalen Medien im Allgemeinen und demgegenüber digitalen Werkzeugen im Besonderen gegenüber.

	Digitale Medien im Mathematikunterricht	Digitale Werkzeuge im Mathematikunterricht
Charakteristische Eigenschaften	Digitale Medien dienen als Träger oder Übermittler von Informationen.	Digitales (Lern-)Werkzeug dienen als flexibel einsetzbares Hilfsmittel beim Lehren und Lernen.
Didaktisches Potential	Medien dienen der Informationsvermittlung zwischen Lehrkraft und Lernenden und unterstützen als Werkzeuge in Schülerhand die mathematischen Handlungen der Schüler.	Ihr didaktisches Potential entfalten digitale Werkzeuge insbesondere, wenn sie vielfältig und flexibel eingesetzt werden können und sich deren Einsetzbarkeit nicht ausschließlich auf einen speziellen Aspekt eines Themas beschränkt (etwa Übungsprogramme zur Multiplikation von Brüchen). Es ist wichtig beim Umgang mit digitalen Werkzeugen, dass Schülerinnen und Schüler ein passendes Werkzeug eigenständig und situationsangemessen auswählen können.
Beispiele	Die Bandbreite reicht von Computer und zugehöriger Software bis MP3-Player, Digitalkamera, Spielkonsole, DVD-Player, Smartphone und Tablet.	Digitale Werkzeuge sind Programme, die flexibel im Mathematikunterricht eingesetzt werden können wie Tabellenkalkulation, Dynamische Geometrie-Software und Computeralgebra, aber auch allgemeine Software wie Textverarbeitung, Präsentations-Software, Internet-Browser, Mindmapping-Software etc. Diese sind auf verschiedener Hardware (z. B. Computer, Laptop, Tablet oder Handheld wie moderne Grafiktaschenrechner) nutzbar.

Tabelle 2a: Digitale Werkzeuge und digitale Medien

Dass wir im Zusammenhang mit der Nutzung digitaler Werkzeuge im Mathematikunterricht überhaupt von Werkzeugen sprechen, ist relativ neu. Vorher wurde meist von Medien und speziell „neuen“ Medien gesprochen. Die Fokussierung auf den Werkzeugaspekt betont in diesem Zusammenhang insbesondere, dass es darum geht, als Lernende mathematisch aktiv zu sein, um Mathematik besser zu verstehen oder authentischer zu erfahren. Wir sprechen daher hier nicht von neuen Medien, weil dies doppelt daneben trifft: Erstens sind es keine neuen Medien mehr und zweitens geht es nicht um Medien allgemein (die ja auch mit einer Konsumhaltung verbunden sind), sondern spezifisch um didaktische Werkzeuge.

Digitale Werkzeuge entfalten ihr Potential im Mathematikunterricht insbesondere dadurch, dass die Schülerinnen und Schüler selbstständig im Unterricht durch ihre eigene Lerntätigkeiten mathematische Objekte und Zusammenhänge entdecken und erfassen. Hier ist ein Unterschied allgemein zu digitalen Medien, bei denen ein konsumierender Aspekt häufig dominiert, wie z. B. das Anschauen eines Videos auf YouTube.

Digitale Werkzeuge sollen nicht um ihrer selbst willen eingesetzt werden, sondern um in kompetenter Weise Mathematik zu betreiben und mathematische Gegenstände sinnstiftend zu erfahren. Eine kompetente Nutzung digitaler Werkzeuge beinhaltet auch, dass die Schülerinnen und Schüler ihr Werkzeug auswählen können und somit die Art ihres Zugangs und die Darstellungsform selbst bestimmen können. Deswegen werden wir uns hier auch besonders mit Multirepräsentationswerkzeugen beschäftigen. Im Optimalfall sollten die Schülerinnen und Schüler auch Potentiale und Grenzen reflektieren und ihre Werkzeugwahl auch begründen können. Dazu gehört weiter, den Werkzeugeinsatz auch in angemessener Form zu dokumentieren.

Digitale Werkzeuge sind kein Gegenpol zu den analogen Werkzeugen wie Zirkel, Rechenschieber, Tabellenwerke und Formelsammlungen, sondern eine Weiterentwicklung und Ergänzung.

Auf der Hardware-Seite haben wir die Taschenrechner vom wissenschaftlichen Taschenrechner (WTR) bis zum Graphik-Taschenrechner (GTR) und Computeralgebra-Taschenrech-

ner (CAS-TR), oft auch zusammenfassend als Handhelds bezeichnet. Daneben gibt es das breite Angebot an Computern vom Desktop-PC bis zum Laptop und Tablet, die natürlich entsprechende Software benötigen. Entsprechend der unterschiedlichen Herstellerfirmen werden jeweils auch unterschiedliche Betriebssysteme an den Schulen genutzt.

Weiter halten digitale Tafeln (interactive boards) zunehmend Einzug in den Schulen. Diese sind auch mit eigener Software ausgestattet. Es ist aber unserer Ansicht nach aber sinnvoller, diese Tafeln als großen Wand-Touchscreen mit Notiz-Fähigkeit und Speicher-Fähigkeit zu nutzen und ansonsten die Standard-Software von der jeweiligen Hardware zu projizieren. Deswegen werden sie hier nicht als eigenständiges Werkzeug thematisiert.

Auf der Softwareseite gibt es neben unzähligen Programmen und Apps umfassendere mathematische Werkzeuge, auf die wir uns hier konzentrieren wollen, denn aus schulischer Sicht ist der Umgang mit diesen spezifischen Programmen aufgrund der jeweils eigenen Benutzerlogik und der oft nicht transportablen Dateiformate eher unbefriedigend.

- **Tabellenkalkulation (z. B. Excel, OpenCalc)**
Schulische Anwendungsbereiche sind das Rechnen mit Zahlen, Variablen und Termen, die Visualisierung großer Datenmengen in Diagrammen, Boxplots und die Visualisierung von Funktionen durch ihre Funktionsgraphen.
- **Dynamische Geometrie-Software (DGS, z. B. GeoGebra, GeoNext, DynaGeo, Cinderella)**
DGS können genutzt werden für geometrische Konstruktionen für den Einsatz von Zugmodus und Ortslinien bei Entdeckungen geometrischer Objekte, von Zusammenhängen, Lagebeziehungen und Invarianzen. Wir führen hier Raumgeometrie-Software nicht als eigenes Werkzeug auf, sondern verstehen sie als Teil der (dynamischen) Geometrie-Software.
- **Funktionenplotter**
Sie werden genutzt für Visualisierung von Funktionen und funktionalen Zusammenhängen (auch Funktionenscharen); für numerische Berechnungen von Ableitungen und Integralen sowie für Regressionsfunktionen. Funktionenplotter sind heute meist Teil von DGS und CAS.

- **Computeralgebrasysteme (CAS z.B. TI-Nspire CAS und als Vorläufer Derive, CASIO Classpad, Maxima, GeoGebra; für die Hochschule eher Maple oder Mathematica)**
Schulische Anwendungsbereiche liegen in der symbolischen Berechnung mit Hilfe von allgemeinen Termen mit Variablen, beim Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen, beim symbolischen Differenzieren und Integrieren.

Besonders sinnvoll erscheinen uns Multirepräsentationssysteme (wie z.B. TI-Nspire, GeoGebra, Classpad), bei denen die verschiedenen Mathematikwerkzeuge gleichberechtigt nebeneinanderstehen und die Lernenden eigenständig entscheiden können, womit sie beginnen. Sie verbinden DGS, TK, Funktionsplotter und optional CAS wie in einem Werkzeugkoffer. Auf diese Weise wird ein flexibler Wechsel der Repräsentationsformen ermög-

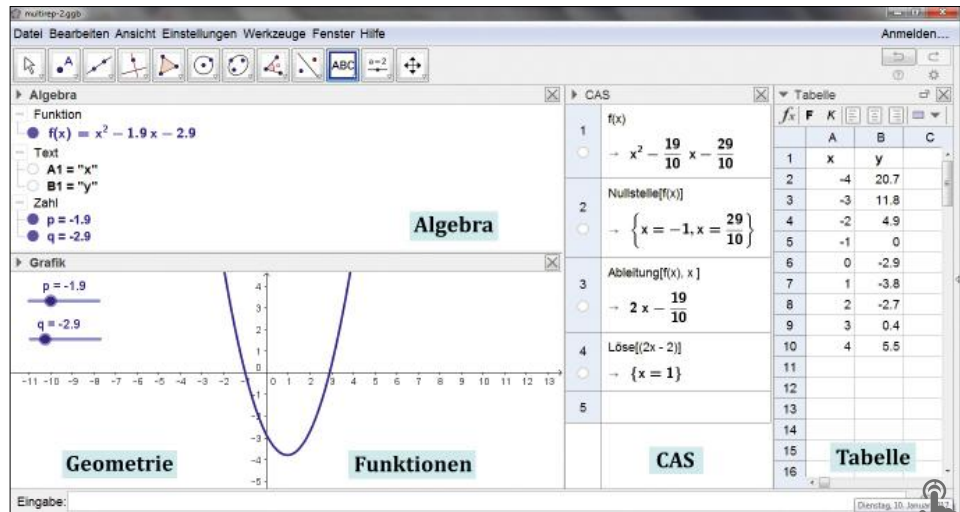


Abbildung 2a: Multirepräsentationsoftware zur Einführung quadratischer Funktionen

licht, der auch aus fachdidaktischer Sicht als wertvoll betrachtet wird, weil er einen reichhaltigen Zugang zu mathematischen Begriffen ermöglicht (Duval 2002, Bruner 1971). So zeigt die Abbildung 2a, wie mit Hilfe von Multirepräsentationssoftware ein Zugang zu quadratischen Funktionen sowohl graphisch als auch mit Hilfe einer Tabellenkalkulation oder des symbolischen Terms erfolgen kann.

Die Multirepräsentationswerkzeuge sind somit einerseits umfassende Software-Werkzeuge und andererseits auch hardwareübergreifend. Dadurch kann ein und dasselbe digitale Arbeitsblatt als Lern- und Arbeitsumgebung weitgehend identisch auf unterschiedlichen Geräten eingesetzt und parallel genutzt werden.

Die jeweiligen Tools (DGS, CAS etc.) sind dabei gleichberechtigt, sie sind miteinander vernetzt, und die Nutzer können auswählen und entscheiden. Es gibt insbesondere keine Präferenz für den Start, d. h. es wird nicht grundsätzlich mit DGS oder CAS angefangen.

Dies ist ein bedeutender Unterschied zu der Fülle von Apps zu allen möglichen Anwendungen, die aber kein durchgängiges didakti-

sches Konzept haben bzw. ermöglichen. Mit der Konzentration auf wenige, betriebssystemübergreifende Werkzeuge kann man besser auf die Mathematik und die Aufgabenstellung fokussieren und wird sich weniger in gerätespezifischen Besonderheiten verlieren. Wir haben uns entschieden, die Beispiele ausschließlich für GeoGebra und/oder TI-Nspire auszuarbeiten.

Es geht im Mathematikunterricht um das Erlernen von Mathematik, und die Werkzeuge dürfen kein Selbstzweck sein. Digitale Werkzeuge eröffnen mathematische Erfahrungsräume, die ohne diese nur schwer zugänglich wären. Wir sehen dabei im Wesentlichen zwei Ebenen, die den Nutzen digitaler Werkzeuge verdeutlichen: die systematische Variation und die dynamische Visualisierung.

Das Prinzip der systematischen Variation lässt sich am Beispiel der Erkundung der Kettenregel mit einem CAS verdeutlichen, siehe Tabelle 2b. Dabei wird das CAS in dem Beispiel als Black Box genutzt, mit dessen Hilfe die mathematische Struktur der abgeleiteten Exponentialfunktionen untersucht werden kann, siehe mögliche Lösung in Abbildung 2b.

Die gegebenen Funktionsterme sind so gewählt, dass die Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit haben, das bei der Bildung der Ableitungsfunktion entstehende Muster zu entdecken, zu beschreiben und auf dieser Grundlage eine Idee für die Bildung der jeweiligen Ableitungsfunktionen zu erhalten und damit eine Vermutung der Kettenregel selbst zu formulieren. Daran anschließend erfinden die Schülerinnen und Schüler selbst passende Beispiele von Funktionstermen und prüfen die zuvor aufgestellte Vermutung. Anschließend kann die Kettenregel in geeigneten Lerngruppen bewiesen werden.

Aufgabenstellung zur Erkundung der Kettenregel:

Bilden Sie mit dem CAS die Ableitungen der verketteten Funktionen. Erkennen Sie eine Gesetzmäßigkeit? Formulieren Sie die Gesetzmäßigkeit.

$$f_1(x) = e^{2x} \quad f_2(x) = e^{3x} \quad f_3(x) = e^{0,5x} \quad f_4(x) = e^{-x} \quad f_5(x) = e^{-2x}$$

$$f_6(x) = e^{x^2} \quad f_7(x) = e^{3x^2+4x}$$

Bilden Sie die Ableitungen der verketteten Funktionen. Wenden Sie dabei die von Ihnen vermutete Gesetzmäßigkeit an. Überprüfen Sie anschließend mit dem CAS.

Funktionsgleichung	Meine Ableitung	Ergebnis der CAS-Überprüfung
$g_1(x) = e^{4x}$		
$g_2(x) = e^{4x^2}$		
$g_3(x) = e^{-x^2+2x}$		
$g_4(x) = \sqrt{2x^2+3x}$		

Tabelle 2b: Ein Beispiel zur systematischen Variation mit CAS

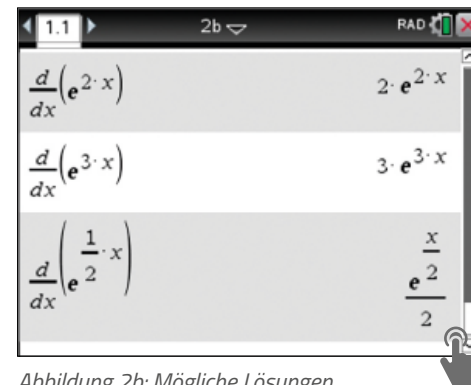


Abbildung 2b: Mögliche Lösungen

Die Kraft von Visualisierungen lässt sich anhand des Funktionenplotters verdeutlichen, siehe Tabelle 2c. So kann etwa ein Schieberegler die Auswirkungen der Variation eines Parameters bei der Funktion f auf den Funktionsgraphen verdeutlichen, siehe Abbildung 2c.

Aufgabenstellung für Funktionenplotter:

- Stelle die Graphen von $y = (x-a)^2$ mit geeignetem a dar. Verändere a mit dem Schieberegler
- Beschreibe deine Entdeckungen und formuliere eine Gesetzmäßigkeit.
- Verändere nun den Exponenten $n=2$ und untersuche zum Beispiel die Funktionen $y = (x-a)^3$ und $y = (x-a)^{-1}$. Halte deine Ergebnisse fest.

Tipp: Nutze einen Schieberegler.

Tabelle 2c: Visualisierungen mit einem Funktionsplotter

Die Vorteile des Werkzeugs liegen in der dynamischen Visualisierung. Durch den Einsatz des Funktionenplotters wird die Veränderung des Parameters a sofort in den Funktionsgraphen umgesetzt, und die Schülerinnen und Schüler können entdecken, was passiert, wenn sie den Schieberegler nach rechts oder links ziehen. Der Aufgabenteil c) erfordert eine höhere Werkzeugkompetenz, ein Begriff, der zunächst noch geklärt werden muss.

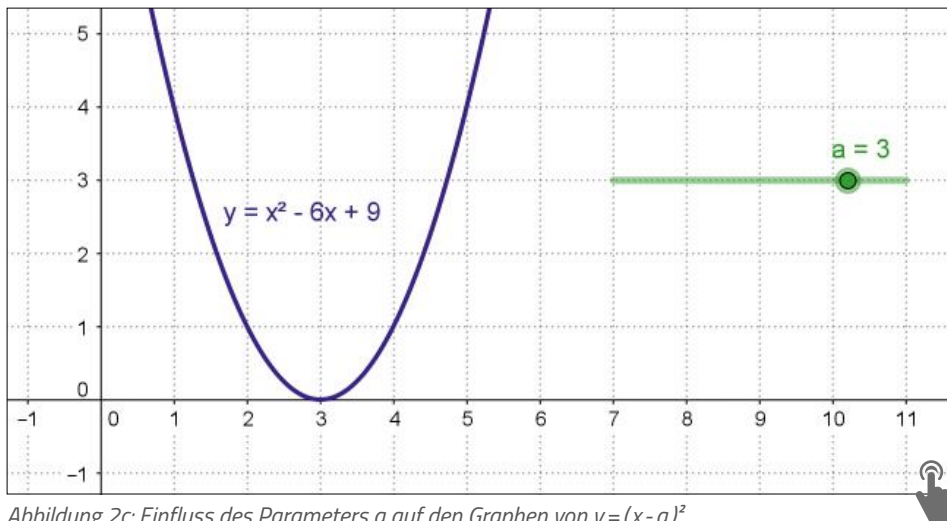


Abbildung 2c: Einfluss des Parameters a auf den Graphen von $y = (x-a)^2$

VORLIEGENDE DATEIEN

2a_multirepsys.ggb

↓ www.geogebra.org/m/eYrn45MX



2b_systematische-variation.tns

↓ www.mnu.de/weko/2b_systematische-variation.tns



2a_multirepsys.tns

↓ www.mnu.de/weko/2a_multirepsys.tns



2c_funktionenplotter.ggb

↓ www.geogebra.org/m/mB9V5psy



2b_systematische-variation.ggb

↓ www.geogebra.org/m/E93ncnyP



2c_funktionenplotter.tns

↓ www.mnu.de/weko/2c_funktionenplotter.tns



Mathe sehen, Mathe verstehen.



GTReasy

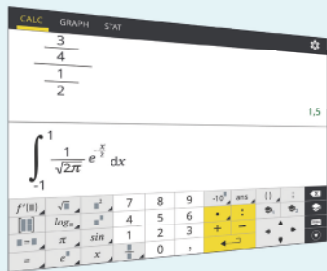


CAsEasy

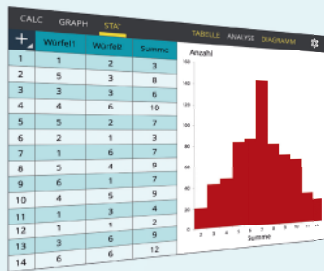
Zwei Apps, die Schule machen:

GTReasy und **CAsEasy**

Mit **GTReasy** und **CAsEasy** bieten wir zwei starke Alternativen zum herkömmlichen grafikfähigen Taschenrechner. Die beiden Apps lassen sich einfach und intuitiv bedienen und wurden speziell für den Einsatz in der Schule entwickelt. So wird die Arbeit mit dem Taschenrechner einfach easy – probieren Sie es aus!

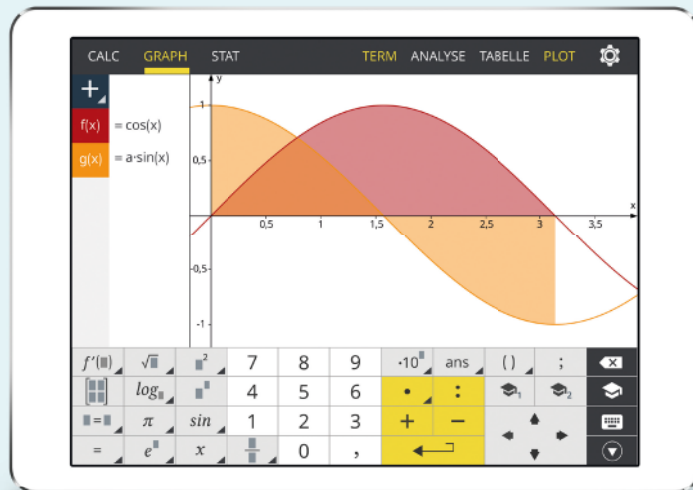


Rechenkommandos direkt – wie ausgesprochen – eingeben



Daten erfassen, analysieren und in Diagrammen darstellen

Intuitive Erzeugung von Integralen und Kurvendiskussionen



Sie möchten mehr erfahren?
Jetzt Testversion downloaden.



Mehr als
leicht – easy!

3. Werkzeugkompetenzen

3.1 Begriffsklärung

Die für den Begriff der Kompetenz im didaktischen Bereich derzeit gängige Definition stammt von Weinert. Kompetenzen sind bei ihm „die bei Individuen verfügbaren oder durch sie erlernbaren kognitiven Fähigkeiten und Fertigkeiten, um bestimmte Probleme zu lösen, sowie die damit verbundenen motivationalen, volitionalen und sozialen Bereitschaften und Fähigkeiten, um die Problemlösungen in variablen Situationen erfolgreich und verantwortungsvoll nutzen zu können.“ (Weinert 2001, S. 27f).

Die EU formuliert: „Mathematische Kompetenz ist die Fähigkeit, mathematisches Denken zu entwickeln und anzuwenden, um Probleme in Alltagssituationen zu lösen. Ausgehend von guten Rechenkenntnissen liegt der Schwerpunkt sowohl auf Verfahren und Aktivität als auch auf Wissen.“ (Europäisches Parlament, Rat der Europäischen Union 2006)

Bemerkenswert ist hier die explizite Erwähnung der Gleichwertigkeit von Verfahren und von Wissen.

Die Begrifflichkeit der mathematischen Kompetenzen ist dann in der didaktischen Diskussion weiter durch die Bildungsstandards der KMK geprägt worden. Insbesondere wird in den Bildungsstandards zur allgemeinen Hochschulreife und für den mittleren Schulabschluss zwischen allgemeinen mathematischen Kompetenzen und mathematischen Leitideen unterschieden. Tabelle 3.1a stellt die jeweiligen Kompetenzen und Leitideen der Bildungsstandards nebeneinander und verdeutlicht, dass prozessbezogene Kompetenzen und Inhalte nicht zu trennen sind. Digitale Werkzeuge werden für alle prozessbezogenen Kompetenzen sowie für alle mathematischen Inhaltsbereiche genutzt.

Hieraus folgt, dass für uns Werkzeugkompetenz bedeutet, kompetent Mathematik zu betreiben und nicht nur kompetent Geräte zu bedienen.

Zum Werkzeugeinsatz gibt es in den KMK-Bildungsstandards für die allgemeine Hochschulreife einen eigenen Abschnitt. Dieser hat

Bedeutung für alle Länder, weshalb er hier in Gänze wiedergegeben wird:

„Die Entwicklung mathematischer Kompetenzen wird durch den sinnvollen Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge unterstützt. Das Potenzial dieser Werkzeuge entfaltet sich im Mathematikunterricht:

- *beim Entdecken mathematischer Zusammenhänge, insbesondere durch interaktive Erkundungen beim Modellieren und Problemlösen,*
- *durch Verständnisförderung für mathematische Zusammenhänge, nicht zuletzt mittels vielfältiger Darstellungsmöglichkeiten,*
- *mit der Reduktion schematischer Abläufe und der Verarbeitung größerer Datenmengen,*
- *durch die Unterstützung individueller Präferenzen und Zugänge beim Bearbeiten von Aufgaben einschließlich der reflektierten Nutzung von Kontrollmöglichkeiten.*

Bildungsstandards Mittlerer Schulabschluss (KMK 2003)	Bildungsstandards Allgemeine Hochschulreife (KMK 2012)
Allgemeine mathematische Kompetenzen im Fach Mathematik: • Mathematisch argumentieren • Probleme mathematisch lösen • Mathematisch modellieren • Mathematische Darstellungen verwenden • Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen • Kommunizieren	Allgemeine mathematische Kompetenzen im Fach Mathematik: • Mathematisch argumentieren • Probleme mathematisch lösen • Mathematisch modellieren • Mathematische Darstellungen verwenden • Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen • Mathematisch kommunizieren
Mathematische Leitideen: • Zahl • Messen • Raum und Form • Funktionaler Zusammenhang • Daten und Zufall	Mathematische Leitideen: • Algorithmus und Zahl • Messen • Raum und Form • Funktionaler Zusammenhang • Daten und Zufall

Tabelle 3.1a: Allgemeine mathematische Kompetenzen und Mathematische Leitideen im Sinne der Bildungsstandards im Überblick.

Einer durchgängigen Verwendung digitaler Mathematikwerkzeuge im Unterricht folgt dann auch deren Einsatz in der Prüfung.“ (KMK 2012)

Wie oben bereits hervorgehoben, ist für uns die Betonung des Werkzeugcharakters digitaler Medien im Mathematikunterricht ein wichtiges Merkmal. Diese Werkzeuge werden im Mathematikunterricht nicht um ihrer selbst willen eingesetzt, sondern um kompetent Mathematik zu betreiben. Wir haben für uns die Frage, was im Fach Mathematik unter Werkzeugkompetenzen zu verstehen ist, so beantwortet (Tabelle 3.1b).

Werkzeugkompetenz bedeutet, mit Werkzeugen kompetent Mathematik zu betreiben.

Tabelle 3.1b: Definition Werkzeugkompetenz

Diese allgemeine Charakterisierung von Werkzeugkompetenz soll die Bedeutung der Mathematik selbst hervorheben, für deren besseres Verständnis Werkzeuge zielgerichtet eingesetzt werden sollen. Aus der obigen Charakterisierung lassen sich auch insbesondere die folgenden Fragen ableiten, die wir im Rahmen dieser Handreichung beantworten

möchten und die damit einen Beitrag für die Diskussion um die Frage sein sollen, was Werkzeugkompetenzen ausmacht.

- *Was müssen Schülerinnen und Schüler können, um im obigen Sinne über angemessene Werkzeugkompetenzen zu verfügen?*

Im Rahmen dieser Handreichung stellen wir vier Aspekte heraus, die allesamt unabdingbar sind, wenn Schülerinnen und Schüler in kompetenter Weise mit digitalen Werkzeugen arbeiten.

Die (Teil-)Kompetenzen sind:

- ein passendes Werkzeug je nach Situation in angemessener und zielgerichteter Weise auszuwählen (👉 Kapitel 3.2),
- das genutzte Werkzeug zu bedienen (👉 Kapitel 3.2),
- das Potential, die Grenzen und den jeweiligen Nutzen des Werkzeugs kritisch zu reflektieren (👉 Kapitel 3.3) und
- die Bearbeitungsprozesse und die Ergebnisse in angemessener Weise zu dokumentieren (👉 Kapitel 3.3 und 👉 6).

In diesem Sinne konkretisieren wir unser Verständnis von Werkzeugkompetenz in den folgenden Kapiteln.

- *Was sind Beispiele für Lernumgebungen, bei denen Werkzeugkompetenz in diesem Sinne erforderlich ist und gefördert wird?*

Neben der weiteren systematischen Konkretisierung der Frage, was digitale Werkzeugkompetenzen sind, geben wir im Rahmen dieser Handreichung praxistaugliche Beispiele für Lernumgebungen, die digitalen Werkzeugkompetenzen von Schülerinnen und Schülern fördern (siehe 👉 Kapitel 5 und das digitale Zusatzmaterial in Form von ggb- und tns-Dateien).

- *Wie lässt sich Werkzeugkompetenz in diesem Sinne systematisch aufbauen im Rahmen eines konsistenten Curriculums?*

Neben den Beispielen in 👉 Kapitel 5 veranschaulichen wir entlang eines exemplarischen Curriculums, wie digitale Werkzeugkompetenzen in unterschiedlichen mathematischen Gegenstandsbereichen in verschiedenen Jahrgangsstufen sukzessive aufgebaut werden können (siehe 👉 Kapitel 5).

Auf diese Weise bieten wir im Rahmen dieser Handreichung aus drei verschiedenen Perspektiven Vorschläge,

- was wir unter digitaler Werkzeugkompetenz verstehen,
- wie sich diese systematisch in ein mathematisches Curriculum integrieren lässt und
- was praxistaugliche Beispiele für die Förderung von Werkzeugkompetenzen sein können.

Werkzeugkompetenzen liegen so verstanden quer zu den inhalts- und prozessbezogenen Kompetenzbereichen in Kernlehrplänen und Bildungsstandards, und sie können bei allen drei Grunderfahrungen nach Winter eine wesentliche Rolle spielen.

In unseren Beispielen wollen wir deshalb in 👉 Kapitel 5 die Rolle der digitalen Werkzeuge mit Bezug auf die Grunderfahrungen von Winter verdeutlichen.

3.2 Auswahl und Bedienung

Unter Bedienkompetenz werden im Folgenden all diejenigen Fähigkeiten und Fertigkeiten verstanden, die zur Bedienung des jeweiligen digitalen Werkzeugs benötigt werden. Bei Konstruktionen mit DGS umfassen diese Kompetenzen etwa die Erstellung von Punkten, Strecken und Geraden, Kreisen, Vielecken, die Verwendung von Spur und Ortslinie, den Einsatz von Abbildungen, das Messen von Längen, Flächen und Winkeln.

Beim Lösen einer quadratischen Gleichung unter Einsatz eines CAS kann dies etwa – je nach Werkzeug – die Kenntnis der Syntax, zum Beispiel des Löse-Befehls, umfassen. Je nach Werkzeug und Problemsituation sind spezifische Bedienkompetenzen erforderlich. So müssen die Schülerinnen und Schüler bei DGS wissen, dass Schnittpunkte von Linien nicht automatisch da sind, wo sich die Linien anscheinend schneiden, sondern durch einen entsprechenden Befehl als Objekt erzeugt werden müssen. Bei der Tabellenkalkulation müssen Schülerinnen und Schüler z.B. den Unterschied zwischen relativer und absoluter Adressierung kennen und nutzen können.

Eine Geometrie-Konstruktion, ein Tabellenkalkulationsblatt, eine Folge von CAS Befehlen ergeben noch keine Lernumgebung. Damit daraus ein dynamisches Schülerarbeitsblatt entsteht, bedarf es sorgfältiger Überlegungen zum Vorwissen der Schülerinnen und Schüler, zur Zielanalyse und zu sinnvollen (nicht zu großen und nicht zu kleinen) Zwischenschritten.

Auswahlkompetenz meint dagegen die Möglichkeit, je nach gegebener Problemsituation ein passendes digitales Werkzeug auszuwählen. Das Beispiel zur Bestimmung von Nullstellen, siehe Abbildung 3.2a, zeigt etwa, dass hierfür ganz unterschiedliche Werkzeuge zum Einsatz kommen können. Manchmal kann es sich anbieten, Applets im Rahmen des Unterrichtsgangs zu nutzen. Das Angebot an digitalen Werkzeugen wird so für die Schülerinnen und Schüler durch eine geeignete Vorauswahl eingeschränkt – im Anhang etwa bei den Symmetriebetrachtungen (siehe 🐼 *Kapitel 5.1*), bei der mit Hilfe von DGS faszinierende Phänomene durch die Schülerinnen und Schüler erkundet werden können. In vielen Situationen hingegen kann es sich anbieten, die Vorauswahl

an digitalen Werkzeugen nicht zu beschränken, etwa um eine Bearbeitungsvielfalt und damit unterschiedliche Problemlöseprozesse bewusst zu initiieren.

Anhand des Beispiels der Nullstellenbestimmung der Funktion f mit $f(x) = x^2 + 1,1x - 6,2$, siehe Abbildung 3.2a, wird dargestellt, welche Bedeutung jeweils Auswahl- und Bedienkompetenzen für den Umgang mit digitalen Werkzeugen zukommen. Dabei soll einerseits deutlich werden, was genau unter diesen beiden Kompetenzdimensionen verstanden werden kann. Weiterhin wird hier sichtbar, inwiefern Auswahl- und Bedienkompetenz sehr eng miteinander zusammenhängen. Es ist für uns eine zentrale Überzeugung, dass Werkzeugkompetenz selbst weitaus mehr umfasst als die reine Bedienung von Werkzeugen. Wir nutzen hier in unserem Beispiel die Funktionalität des Multirepräsentationssystems GeoGebra.

Die Nullstellen der Funktion f lassen sich auf vielfältige Weise und mit jeweils unterschiedlichen digitalen Werkzeugen bestimmen. Je nach Wahl des Werkzeugs treten immer

auch spezifische Merkmale der funktionalen Betrachtungen in den Vordergrund.

Eine erste Variante ist besteht darin, den Graphen der quadratischen Funktion zu visualisieren. Die Nullstelle $x=2$ lässt sich aus dem Graphen recht exakt ablesen, während man bei der anderen Nullstelle zunächst ungefähr sagen kann, dass sie irgendwo ziemlich mittig zwischen -4 und -2 liegt, ohne sie jedoch genau ablesen zu können. Mit dem Zoomwerkzeug könnten die Nullstellen genauer, aber dennoch nicht exakt bestimmt werden. Wenn die Schülerinnen und Schüler den Grafik-Modus auswählen, dann werden bei dieser Aufgabe die Schnittpunkte mit der x -Achse betont.

GeoGebra liefert mit dem Befehl „Nullstelle [$f(x)$]“ die Punkte $A(-3,1|0)$ und $B(2|0)$, insofern sind die Nullstellen $x_1=-3,1$ und $x_2=2$. Diese Nullstellen werden numerisch berechnet.

Wählen die Schülerinnen und Schüler dagegen ein CAS zur Bestimmung der Nullstellen, so lässt sich die Aufgabe auch mit diesem digitalen Werkzeug auf unterschiedliche Weise lösen. So liefert das CAS in diesem Fall mit dem Befehl „Löse [$f(x)=0, x$]“ direkt die Lösungs-

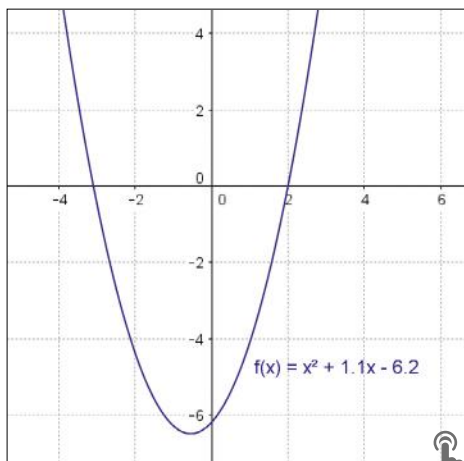


Abbildung 3.2a: Nullstellen

menge $\{x=2, x=-3,1\}$. Eine andere Möglichkeit der Nullstellenbestimmung liefert das CAS mit dem Befehl „Faktoriere [$f(x)$]“, indem es den Term $(x+3,1)(x-2)$ ermittelt. Auch hier lassen sich direkt die beiden Nullstellen ablesen. Darüber hinaus lassen sich hier zusätzlich die Vielfachheiten der jeweiligen Nullstellen ablesen (in diesem Falle beide Eins) und so weitergehende (hier nicht geforderte) Entdeckungen zu machen. Die Zusammenhänge zu

Vielfachheiten sind insbesondere bei Potenzfunktionen höherer Ordnung allein mit Hilfe grafischer Werkzeuge im Allgemeinen nicht zu ermitteln. Je nach Interesse im Rahmen des Problembearbeitungsprozesses wählen die Schülerinnen und Schüler daher ein passendes Werkzeug aus. Außerdem ermöglicht das CAS eine erweiterte Fragestellung, z. B. für welche Werte die Funktionenschar ganzzahlige Nullstellen liefert.

Ebenso lässt sich eine Tabellenkalkulationssoftware (TK) zur Bestimmung der Nullstellen nutzen. Mit Hilfe einer Wertetabelle über eine festgelegte Intervallgröße und den entsprechenden Funktionswerten lassen sich wichtige Eigenschaften der Funktion erkunden. In Abbildung 3.2b reicht die Schrittlänge von Eins nicht, um die (rationale) Nullstellen direkt zu erhalten. In diesen Fällen kann die tabellarische Betrachtung aber erste Hinweise auf die Existenz einer Nullstelle und ihre Lage geben.

So gesehen kann die Nullstellenbestimmung entweder mit drei kleineren Programmen geschehen oder mit unterschiedlichen Werkzeugen der Multirepräsentationsprogramme wie oben, die die Schülerinnen und Schüler auswählen.

Tabelle				
	A	B	C	D
1	-5	13.3		
2	-4	5.4		
3	-3	-0.5		
4	-2	-4.4		
5	-1	-6.3		
6	0	-6.2		
7	1	-4.1		
8	2	0		
9	3	6.1		
10	4	14.2		
11	5	24.3		
12				

Abbildung 3.2b: Nutzung einer Tabellenkalkulation

Die digitalen Repräsentationswerkzeuge entfalten ihre Stärke aber erst dann ganz, wenn mehrere Darstellungsformen miteinander verbunden werden und nicht, wenn wie oben einzelne Zugänge einzeln bearbeitet werden.

Ein typisches Beispiel für die Verknüpfung unterschiedlicher Darstellungsformen liefert das Newton-Verfahren (Abbildung 3.2c). Dessen algorithmische Funktionsweise erfahren die Schülerinnen und Schüler durch die

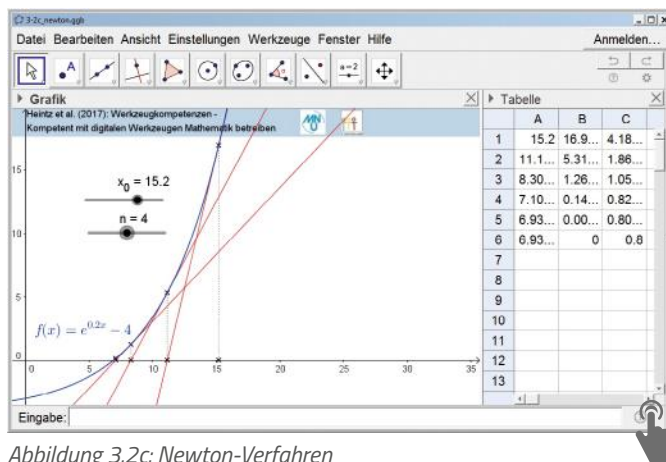


Abbildung 3.2c: Newton-Verfahren

dynamische Visualisierung und können so die Funktionsweise und Leistungsfähigkeit des Algorithmus erkennen. Die Konvergeschwindigkeit des Verfahrens zum Finden der Nullstelle wird insbesondere in der tabellarischen Darstellungsform sichtbar.

Ein weiteres typisches Beispiel für die Verknüpfung unterschiedlicher Darstellungsformen liefert die Einführung in die quadratischen Funktionen in Kapitel 5.9. Hier entdecken die

Lernenden das mathematische Konzept quadratischer Abhängigkeiten auf unterschiedlichen Repräsentationsebenen, Geometrie, Funktionen und Tabelle (Abbildung 3.2d).

Deutlich wird in diesem Zusammenhang, dass je nach Wahl des digitalen Werkzeugs unterschiedliche Aspekte der funktionalen Betrachtung im Vordergrund stehen und dass jedes einzelne digitale Werkzeug seine unterschiedlichen Stärken und Eigenschaften hat.

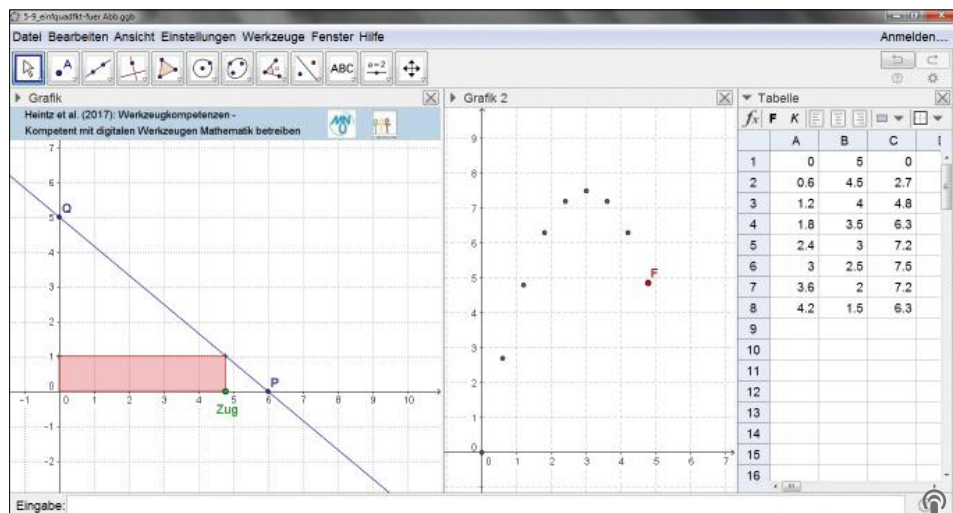


Abbildung 3.2d: Einführung quadratische Funktionen

Um das jeweils angemessene Werkzeug allerdings in kompetenter Weise auswählen zu können, müssen die Schülerinnen und Schüler es hinreichend gut bedienen können, ansonsten ist die jeweilige Wahl zwecklos.

Insofern bedingen sich Bedien- und Auswahlkompetenz: Die kompetente Auswahl des passenden Werkzeuges setzt ein Mindestmaß an Bedienkompetenz der zur Verfügung stehenden Werkzeuge voraus.

VORLIEGENDE DATEIEN

3-2a_nullstellen.ggb

↓ www.geogebra.org/m/tG3cDgfH

3-2a_nullstellen.tns

↓ www.mnu.de/weko/3-2a_nullstellen.tns

3-2c_newton.ggb

↓ www.geogebra.org/m/z9M59MCp

3-2c_newton.tns

↓ www.mnu.de/weko/3-2c_newton.tns

5-9_einfQuadFkt.ggb

↓ www.geogebra.org/m/VqfJuq32

5-9_einfQuadFkt.tns

↓ www.mnu.de/weko/5-9_einfQuadFkt.tns



3.3 Dokumentation und Reflexion

Für einen kompetenten Umgang mit digitalen Werkzeugen ist es neben der angemessenen Auswahl und der entsprechenden Bedienung eine wesentliche Teilkompetenz, den jeweiligen Nutzen aber auch die Grenzen des Werkzeugs zu kennen und zu reflektieren. Aus unserem Verständnis, dass Werkzeugkompetenz meint, in kompetenter Weise Mathematik zu betreiben, ergibt sich auch die Notwendigkeit, die Zielführung und den jeweiligen Nutzen des digitalen Werkzeugs beim Mathematiklernen kritisch einschätzen zu können. Dies ist in verschiedenen Situationen wichtig im Mathematikunterricht.

Einerseits sollten die Lernenden ein Bewusstsein darüber entwickeln, dass ein digitales Werkzeug nicht auf alle Fragen im Mathematikunterricht eine Antwort geben kann. Eine Beurteilung mathematischer Zusammenhänge und Strukturen etwa kann ein digitales Werkzeug nicht übernehmen. So lassen sich beispielsweise unterschiedliche quadratische Funktionsgraphen visualisieren und es lassen sich qualitative Aussagen erschließen, etwa so: *„Je größer der Parameter, desto weiter verschiebt sich der Hochpunkt nach links“*. Wie

allerdings der Einfluss der Parameter auf die entsprechenden Graphen genau ist, wird durch die reine Visualisierung nur schwer erschlossen. Vielmehr ist die Begriffsbildung ein (langwieriger) Prozess, den Schülerinnen und Schüler hier – zwar mit Unterstützung durch das digitale Werkzeug, aber letztlich kognitiv – zu bewältigen haben. Eine kognitive Aktivierung wird in solchen Situationen nicht trotz, sondern gerade wegen der Nutzung digitaler Werkzeuge erzeugt, weil beurteilende Aspekte der mathematischen Begriffsbildung etwa durch die Nutzung unterschiedlicher Repräsentationsformen eine stärkere Rolle spielen.

Weiterhin steigt durch die Nutzung digitaler Werkzeuge die Möglichkeit, komplexe Rechenoperationen an den Rechner abzugeben. Dabei gewinnt die Frage nach rechnerfreien Fertigkeiten, die die Lernenden beherrschen müssen, eine ebenso wichtige Bedeutung. Wir meinen, dass Schülerinnen und Schüler in einem Mathematikunterricht, in dem Werkzeuge sinnvoll verwendet werden, auch grundlegende Rechenfertigkeiten im Kopf durchführen können müssen. So gehört es zu einer wesentlichen (allgemeinen) mathe-

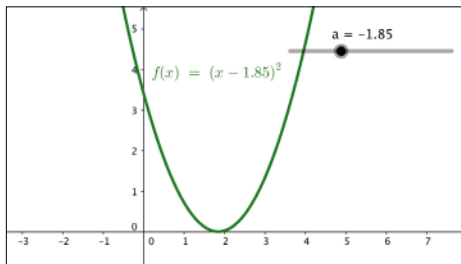
matischen Kompetenz, Abschätzungen (etwa durch Überschlag) vornehmen zu können, ein Gespür für Größen und Mengen zu bekommen oder etwa Zahlen systematisch darzustellen und zu ordnen. Wir betonen, dass in einem Mathematikunterricht, der digitale Werkzeuge in didaktisch sinnvoller Weise einsetzt, solche Inhalte in vielfältigen Situationen im Kopf und per Hand bearbeitet werden können müssen.

Andererseits ist mit der in Abschnitt 3.2 thematisierten Auswahlkompetenz auch die Notwendigkeit der Reflexion über die jeweiligen Potenziale und Grenzen des Werkzeugs verbunden. So lassen sich etwa Wertetabellen nutzen, um die Symmetrie funktionaler Zusammenhänge auf numerischer Basis zu erkunden und bestimmte Werte (wie z.B. Nullstellen) direkt bestimmen zu können. In diesem Sinne bieten unterschiedliche Repräsentationsformen spezifische Zugänge zu mathematischen Begriffen (Bruner 1971). Damit direkt verbunden sind dann auch die jeweiligen Potentiale und Grenzen.

Nicht nur in Reflexionsphasen ist die Dokumentation von Ergebnissen und Bearbeitungswegen im Mathematikunterricht von ganz wesentlicher Bedeutung; die mathematischen Kompetenzen an sich entwickeln sich im Unterricht ständig weiter, damit auch die Fähigkeit, über die mathematischen Zusammenhänge zu kommunizieren und sie entsprechend zu dokumentieren.

In  Kapitel 6 werden wir ausführlich unterschiedliche Situationen im Mathematikunterricht beschreiben, in denen die Lernenden über Mathematik kommunizieren. Wir stellen für Lernsituationen (etwa zu Beginn einer Unterrichtsreihe) und Leistungssituationen (etwa in einer zentralen Prüfung) heraus, inwiefern die Lernenden die Mathematik und ihre Bearbeitungswege zum Teil sehr unterschiedlich dokumentieren.

Auftrag: Begründe, wie sich die Variation des Parameters a der Funktion f mit $f(x) = (x - a)^2$ auf den Graphen der Funktion auswirkt



Wie sollen wir bei der Aufgabe vorgehen?

Lass uns die Situation erst einmal graphisch darstellen, dann sehen wir es vielleicht direkt.

Ja stimmt, das sieht man direkt: Je größer der Parameter, desto weiter verschiebt sich der Hochpunkt nach links.

Wie hast du das so schnell gemacht?

Einfach den Parameter erstellen, Funktionsterm eingeben – und fertig!

Nein, ich meine nicht die Bedienung. Ich meine einfach, dass wir das doch noch gar nicht begründet haben, oder?

Gute Frage... Nein, so richtig begründet haben wir es noch nicht.

Ich glaub ich hab's: Schau dir den Funktionsterm doch noch einmal an – da sieht man es am besten dran...

Abbildung 3.3: Reflexions-, Auswahl- und Bedienungsebene in einem Schülerdialog

4. Sukzessiver Aufbau von digitalen Werkzeugkompetenzen in der Praxis

In diesem Kapitel werden die Ideen für ein Medienkonzept in der Schule entwickelt werden (Bezüge zu KMK Standards). Der erste Abschnitt stellt einen möglichen Rahmen für eine schulinterne Konzeption zur systematischen Nutzung digitaler Werkzeuge im Mathematikunterricht dar. Im zweiten Abschnitt wird ein konkretes Medienkonzept vorgestellt.

4.1 Werkzeugkompetenzen in curricularer Perspektive

Werkzeugkompetenz kann nur sukzessive aufgebaut werden. Wir beschreiben in Anlehnung an die in NRW gültigen Kernlehrpläne Kompetenzerwartungen am Ende der Jahrgangsstufe 6, 8, 10 und 12.

Die Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss fordern im Rahmen der Kompetenz *„Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen“* (K5) u. a., dass die Lernenden *„Werkzeuge (wie Formelsammlungen, Taschenrechner, Software) in Situationen nutzen, in denen ihr Einsatz geübt wurde“*, und *„mathematische Werkzeuge verständlich auswählen und einsetzen.“* (KMK 2003, S. 15)

Daraus lässt sich ableiten, dass der Aufbau von Werkzeugkompetenz bereits in der Sekundarstufe I so angelegt sein muss, dass Vor- und Nachteile sowie Möglichkeiten und Grenzen der unterschiedlichen Werkzeuge reflektiert werden, weil die Schülerinnen und Schüler nur so in Umgang und Auswahl der digitalen Werkzeuge handlungs- und entscheidungsfähig werden.

Die Schülerinnen und Schüler sollen *„mit Variablen, Termen, Gleichungen, Funktionen, Tabellen und Diagrammen arbeiten (...) und Möglichkeiten und Grenzen der Nutzung mathematischer Werkzeuge reflektieren“* können (KMK 2003, S. 15).

Die Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (KMK 2012, S. 12–13) gehen weiter und skizzieren die Zielvorstellung beim Aufbau von digitalen Werkzeugkompetenzen noch präziser, indem sie etwa die Potentiale digitaler Werkzeuge für Modellierungs- und Problemlöseaktivitäten oder die vielfältigen Darstellungsmöglichkeiten sowie die damit verbundenen unterschiedlichen Zugänge zu mathematischen Problemstellungen betonen. Die in den Bildungsstandards beschriebenen Kompetenzen liefern in diesem Sinne zwar wichtige Anhaltspunkte für den intendierten Aufbau von digitaler Werkzeugkompetenz, müssen für die Umsetzung in einem schulinternen Curriculum

oder im konkreten Unterricht noch ergänzt und weiter ausdifferenziert werden.

Um die Werkzeugkompetenz in einem schulinternen Curriculum zu verankern, sollten unabhängig von den jeweiligen fachlichen Inhalten folgende allgemeine Aspekte beachtet werden, die für alle Jahrgangsstufen gültig sind:

1. Gemäß des Dictums ‚Köpfchen statt Knöpfchen‘ darf nicht das Erlernen der Funktionsweise eines Programms oder eines Geräts im Vordergrund stehen, sondern das, was man mit dem Programm oder dem Gerät machen kann. Daher sollen nach Möglichkeit nur wenige digitale Werkzeuge (im besten Fall nur ein einziges) verwendet werden. Ein wichtiges Gütekriterium für die Auswahl des digitalen Werkzeugs ist seine intuitive Bedienung.
2. Bei jedem Einsatz von digitalen Werkzeugen soll die Frage im Vordergrund stehen, ob es Mathematik fördert oder ggf. sogar verhindert, etwa dadurch, dass die Lernenden dazu eingeladen werden, bei den Phänomenen stehen zu bleiben. Wie jedes Werkzeug müssen auch digitale Werkzeuge sinnvoll eingesetzt werden. Mit einem

nichtsachgemäßem Einsatz kann man auch Schaden anrichten.

3. Die Medienkompetenz wird Schritt für Schritt aufgebaut. Zunächst lernen die Lernenden das digitale Werkzeug kennen, dann können sie es erst unter Anleitung, später selbstständig bedienen, schließlich setzen sie es gezielt und reflektiert als Werkzeug ein.
4. Mathematikprogramme sollen mit Methode eingesetzt werden. Das bedeutet einerseits, dass Computer- oder Taschenrechnereinsatz selbst noch keine Methode ist, sondern die Frage nach einem passenden methodischen Arrangement aufwirft. Andererseits bedeutet es, dass digitale Werkzeuge sehr unterschiedlich eingesetzt werden können und je nach Zielsetzung die passende Einsatzmöglichkeit (dynamische Arbeitsblätter, Arbeit vom leeren Bildschirm aus, dynamische Visualisierung, Exploration, heuristisches Werkzeug, Rechenknecht, Kontrollinstanz, Simulation, Modell, Präsentation, Lehrervortrag ...) ausgewählt werden muss.

5. Digitale Werkzeuge sollen unterschiedliche Zugänge unterstützen (numerische, algebraische und geometrische) und Einsichten ermöglichen, wie die unterschiedlichen Zugänge zusammenhängen.
6. Digitale Werkzeuge existieren nicht als Selbstzweck sondern als Mittler im Mathematikunterricht. Sie verbinden die Kompetenzbereiche Kommunizieren, Argumentieren, Problemlösen und Begriffslernen. (Barzel 2005, 2015, Duval 2002)
7. Digitale Werkzeuge ersetzen nicht händisches Rechnen. Dort, wo sie den Lernenden das Rechnen abnehmen, sollten diese in der Regel über sichere Kompetenzen in den entsprechenden Rechnungen verfügen. Überschlagsrechnungen gehören z. B. immer zum Werkzeugeinsatz dazu. Gleichwohl werden mit digitalen Werkzeugen auch Rechnungen ausgeführt, die händisch nicht oder nur schwer machbar sind wie z. B. umfangreiche stochastische Simulationen oder das Invertieren einer 4×4 -Matrix.
8. Digitale Werkzeuge leisten einen wichtigen Beitrag im Bereich von Lernkompetenzen. (Elschenbroich & Heintz 2008)

4.2 Beispiel für die Integration in ein Medienkonzept in der Schule

Im Folgenden konkretisieren wir die in 📖 *Kapitel 2* formulierten Werkzeugkompetenzen entlang eines beispielhaften Curriculums (Tabelle 4.2). Hier formulieren wir digitale Kompetenzerwartungen für die unterschiedlichen Jahrgangsstufen.

Dabei unterscheiden wir zwei verschiedene Ebenen:

Auf der Ebene der allgemeinen Kompetenzerwartungen konkretisieren wir die in 📖 *Kapitel 2* systematisch formulierten Werkzeugkompetenzen für die unterschiedlichen Jahrgangsstufen. Demgegenüber beschreiben die jeweiligen Unterrichtsgegenstände, wie sich die allgemeinen Kompetenzerwartungen für die verschiedenen Jahrgangsstufen entlang mathematischer Gegenstandsbereiche manifestieren können. Ein schulinternes Curriculum, das den Aufbau digitaler Werkzeugkompetenzen konsequent mit in den Blick nimmt, sollte in diesem Sinne beide Ebenen transparent machen. In 📖 *Kapitel 5* dieser Handreichung geben wir schließlich konkrete Unterrichtsbeispiele und Aufgaben, die die hier formulierten Kompetenzerwartungen fördern können.

Allgemeine Kompetenzerwartungen	Unterrichtsgegenstände
Klasse 5/6 Die Lernenden... • arbeiten in vorbereiteten Lernumgebungen (ggf. mit eingeschränkter Werkzeugleiste), • variieren zielgerichtet geometrische Situationen, z. B. mit Hilfe des Zugmodus, • beschreiben Phänomene beim gezielten Erkunden im Zugmodus, • nutzen die Phänomene als Ausgangspunkt für mathematische Argumentation, • können Daten mit einer Tabellenkalkulation darstellen, • wählen geeignete Bildausschnitte für ihre Erkundungen.	Klasse 5/6 Digitale Werkzeuge werden benutzt, um mathematische Begriffe zu erkunden. 1. Erkunden elementargeometrischer Begriffe - digitale Werkzeuge als Black Box 2. Erkunden von (Achsen-)Symmetrie (siehe 📖 <i>Kapitel 5.1</i>) 3. Erkunden von Eigenschaften besonderer Vierecke (siehe 📖 <i>Kapitel 5.4</i>) 4. Erste Erfahrungen im Koordinatensystem 5. Aufbau von Grundvorstellungen zum Flächenvergleich und zur Flächenberechnung 6. Aufbau von Raumvorstellung: 7. Dynamische Visualisierung von Körpern und ihren Netzen In Klasse 6 werden digitale Werkzeuge eingesetzt, um verschiedene Darstellungen zu verbinden; der Schwerpunkt liegt auf dem Vernetzen, inhaltlich liegen die Schwerpunkte bei folgenden Themen: 1. Geometrisierung der Bruchrechnung und Automatisierung der Rechenverfahren 2. Datenanalyse

Tabelle 4.2: Erwartungen an die digitale Werkzeugkompetenz am Ende der Jahrgangsstufen 6, 8, 9 und 12
 > Fortsetzung der Tabelle auf nächster Seite

Allgemeine Kompetenzerwartungen	Unterrichtsgegenstände
Klasse 7/8 Die Lernenden... • nutzen digitale Werkzeuge als Kontrollinstanz, • stellen Funktionsgraphen mit digitalen Werkzeugen dar (z. B. mit einem Funktionenplotter) und wählen ein passendes Koordinatensystem, • wechseln unter Anleitung die Darstellungsform (Tabelle, Graph, Term), • verwenden Simulation zur Untersuchung stochastischer Situationen, • vergleichen größere Datensätze und wählen geeignete Kenngrößen und dazu passende Darstellungsformen aus, • reflektieren über die Grenzen der unterschiedlichen Darstellungsformen und manipulieren gezielt vorgegebene Datensätze, • verwenden dynamische Geometriesoftware als heuristisches Instrument in vorbereiteten.	Klasse 7/8 Digitale Werkzeuge werden im Rahmen der Stochastik für Simulationen genutzt. Im Zentrum der Überlegungen steht die Entwicklung stochastischen Denkens mit den Elementen Hypothese, Simulation und Experiment (siehe 📖 Kapitel 5.6 und 📖 Kapitel 5.7). Beim Thema Zuordnungen werden die digitalen Werkzeuge genutzt, um die verschiedenen Darstellungen Tabelle - Graph - Algebra nebeneinanderzustellen und Zusammenhänge zu erkunden. (siehe 📖 Kapitel 5.9). In der Geometrie werden digitale Werkzeuge als heuristisches Instrument für geometrische Erkundungen verwendet (Problemlösen, Grunderfahrung nach H. Winter); digitale Werkzeuge sollen helfen, dem Beweisen und mathematischen Argumentieren wieder einen größeren Stellenwert zu geben. Außerdem dienen sie dem Experimentieren und dem Kontrollieren. (siehe 📖 Kapitel 5.5).

Tabelle 4.2: Erwartungen an die digitale Werkzeugkompetenz am Ende der Jahrgangsstufen 6, 8, 9 und 12 > Fortsetzung der Tabelle auf nächster Seite

Allgemeine Kompetenzerwartungen	Unterrichtsgegenstände
Klasse 9/10 Die Lernenden... • wählen in Abhängigkeit von der Problemstellung ein geeignetes Werkzeug (Stift und Papier, Tabellenkalkulation, DGS, CAS ...) aus und nutzen es, • nutzen digitale Werkzeuge als ‚Rechenknecht‘, um sich von langwierigen und fehleranfälligen Rechnungen zu entlasten, • variieren systematisch Parameter in Funktionsdarstellungen, • nutzen digitale Werkzeuge, um grundlegende mathematische Ideen situationsangemessen zu verdeutlichen (z.B. als Funktionenmikroskop zur Einführung in die Steigung von Funktionen), • verwenden Tabellenkalkulation als heuristisches Instrument ‚vom leeren Blatt‘ aus (z. B. absolute und relative Zellbezüge, grundlegende Befehle, ...), • manipulieren gezielt algebraische Ausdrücke (CAS), • reflektieren über die Grenzen des Werkzeugs.	Klasse 9/10 Digitale Werkzeuge helfen, unterschiedliche Aspekte von Funktionen mit Hilfe von unterschiedlichen digitalen Werkzeugen deutlich zu machen. DGS, Tabellenkalkulation, Funktionsplotter und CAS ermöglichen jeweils spezifische Aussagen und Erkenntnisse zu quadratischen Funktionen. (siehe 🖱️ Kapitel 5.9) Darüber hinaus werden digitale Werkzeuge verwendet, um einfache Modellierungsaufgaben zu unterstützen (quadratische Funktionen, exponentielles Wachstum, siehe 🖱️ Kapitel 5.9 und 🖱️ Kapitel 5.11). Jahrgangsstufe 10 (NRW: Einführungsphase S II) Digitale Werkzeuge werden zum Systematisieren und zum Entdecken von Strukturen eingesetzt. Außerdem werden verschiedene mathematische Darstellungen (Tabelle, Geometrie, Funktionsgraph, Algebra) zur Lösung mathematischer Probleme verwendet und kriteriengeleitet verglichen, insbesondere im Rahmen der Differenzialrechnung. (siehe 🖱️ Kapitel 5.13 und 🖱️ Kapitel 5.14)

Tabelle 4.2: Erwartungen an die digitale Werkzeugkompetenz am Ende der Jahrgangsstufen 6, 8, 9 und 12 > Fortsetzung der Tabelle auf nächster Seite

Allgemeine Kompetenzerwartungen	Unterrichtsgegenstände
Klasse 11/12 Die Lernenden... - entscheiden, welche Möglichkeiten der digitalen Werkzeuge (z.B. Tabellenkalkulation, Graphikansicht, CAS) sie nutzen und welche nicht, - nutzen digitale Werkzeuge für die Verarbeitung großer Datenmengen oder für komplexe Rechnungen im Rahmen von Modellierungsaufgaben, - nutzen digitale Werkzeuge beim Problemlösen und beim Entdecken mathematischer Zusammenhänge, insbesondere durch interaktive Erkundungen, - verknüpfen gezielt verschiedene Darstellungsmöglichkeiten und variieren mathematische Objekte bidirektional, - nutzen digitale Werkzeuge, um individuelle Zugänge zu realisieren, - nutzen digitale Werkzeuge reflektiert als Kontrollmöglichkeiten.	Klasse 11/12 Digitale Werkzeuge werden von den Lernenden gezielt als universelles Werkzeug eingesetzt. Insbesondere werden sie zum Modellieren einfacher Probleme aus der Realität und zum Simulieren einfacher Prozesse genutzt (siehe 🖱️ Kapitel 5.16 und 🖱️ Kapitel 5.18). In der Vektoriellen Geometrie werden die digitalen Werkzeuge zur Visualisierung, Unterstützung des räumlichen Vorstellungsvermögens und als heuristisches Werkzeug genutzt. Dadurch können beispielsweise lineare Gleichungen mit drei Unbekannten mit Ebenen im Raum assoziiert werden und lineare Gleichungssysteme einen verständnisorientierten Einstieg in die Vektorgeometrie liefern.

Tabelle 4.2: Erwartungen an die digitale Werkzeugkompetenz am Ende der Jahrgangsstufen 6, 8, 9 und 12