Adjuk meg a következő sorozat első *n* tagjának összegét!

$$a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n + 1$$

Állítások: (1) $a_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ és (2) $S_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$

II. megoldás:

Legyen $c_n = a_{n+1} - a_n$! Ekkor $c_{n+1} - c_n = 1 = \textit{állandó}$ miatt a $\{c_n\}$ számtani sorozat, $c_1 = 2$ és $d = 1$. Így a $\{c_n\}$ számtani sorozat első $n-1$ tagjának összege egyfelől $S_{n-1,c} = \dfrac{(n-1)(n+2)}{2}$

, másrészt $\sum_{k=1}^{n-1} c_k = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \ldots + (a_{n-1} - a_{n-2}) + (a_n - a_{n-1}) = a_n - a_1 = a_n - 1$.

Innen adódik, hogy $a_n = \dfrac{(n-1)(n+2)}{2} + 1 = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Ezzel az (1) állítást beláttuk.

(2)Bizonyítása : Mivel $a_n = \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n^2}{2} + \dfrac{n}{2}$, így

$$S_n = \frac{1}{2}\sum_1^n n^2 + \frac{1}{2}\sum_1^n n = \frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{12}(2n+1+3) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

. Ezzel az (2) állítást beláttuk.