hoja de trabajo #1

21/Feb/2021

2.1.5 Campo pendiente (Isoclinas)

→ Muchas veces las ED no se pueden resolver si la variable dependiente esta en la ecuación

↳ Ejemplo: $\frac{dy}{dx} = x^2 + 2y^2$

PERO nos podemos aproximar a la solución

* Sabemos que $\frac{dy}{dx}$ (primera derivada) representa la pendiente $\frac{dy}{dx} = m$

Entonces, si tenemos $\frac{dy}{dx} = F(x,y)$ significa que tenemos una formula para encontrar la pendiente (m) en cualquier punto (x,y) si lo metemos en la ecuación. (F(x,y))

* Cómo lo hacemos?

- Hacemos una gráfica con muchas lineas pequeñas que representan las pendientes en puntos en el plano xy
- Después, dado un punto (P.V.I) encontramos una aproximación a la curva donde las pendientes queden

* El campo pendiente nos da una solución general. Pero si nos dan un P.V.I podemos encontrar una solución (aproximada) particular

Teorema de existencia y unicidad

Existen 3 casos para una solución de una ED en un punto (P.V.I):

1. No existe solución para la ED en el punto
2. Infinitas soluciones en el punto
3. Una única solución para la ED en la vecindad

- Para determinar la existencia de la solución:

↳ Debemos determinar la continuidad de la función
- para esto hallamos el dominio de la función y vemos si el valor inicial que nos dieron permite la continuidad de la función.

Discontinuidad
- Denominadores = 0
- raices con negativos adentro
- logaritmos con cero o negativos

Ejemplos:

- $\frac{dy}{dx} = x\ln y$; $y(1) = 1$
  $(a,b) = (1,1)$ ✓
  Continuo si: $y > 0$

- $\frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{y}$; $y(0) = 1$
  $(a,b) = (0,1)$
  Continuo siempre
  ($\sqrt[3]{y}$ → se permiten −, + y 0)

- Para determinar que la solución es única

↳ Debemos determinar que la derivada parcial de y es continua
- El valor inicial que nos da debe permitir la continuidad

Ejemplos:

- $\frac{\partial F}{\partial y} = x \cdot \frac{1}{y} = \frac{x}{y}$
  Continuo si $y \neq 0$
  $y(1) = 1$ → permite continuidad

- $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{3} y^{-2/3} = \frac{1}{3y^{2/3}}$
  Continuo si $y \neq 0$
  $y(0) = 1$ → permite continuidad

hoja de trabajo #1

2.1.6 Ecuaciones Diferenciales Separables

- Las integrales pueden resolver algunas ED

→ Agrupamos las y y dy a un lado y las x y dx al otro, después integramos ambos lados

→ Esto nos sirve para → $\frac{dy}{dx} = F(x,y)$ cuando $F(x,y)$ puede ser escrito como un producto

Ejemplo:

① $\frac{dy}{dx} + 2xy = 0$

$\frac{dy}{dx} = -2xy$

$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = -2x$

$\frac{1}{y}\, dy = -2x\, dx$

→ $\int \frac{1}{y}\, dy = \int -2x\, dx$

$\ln|y| = -x^2 + C_1$

$e^{\ln|y|} = e^{-x^2 + C_1}$

$|y| = e^{-x^2 + C_1}$

$|y| = e^{-x^2} \cdot e^{C_1}$

$y = \pm C e^{-x^2}$ → $C = e^{C_1}$

Notas:
- Mantener las constantes, coeficientes, números en el lado de la x
- Si es posible, resolver para y explícitamente en la solución.

Ejemplo 3:

$\frac{dy}{dx} = \frac{4-2x}{3y^2-5}$; $y(1) = 3$
$(a,b) = (1,3)$

$3y^2 - 5 \cdot dy = 4 - 2x \cdot dx$

$\int 3y^2 - 5 \cdot dy = \int 4 - 2x \cdot dx$

$y^3 - 5y = 4x - x^2 + C$

Dado el P.V.I

$(3)^3 - 5(3) = 4(1) - (1)^2 + C$

$27 - 15 = 4 - 1 + C$

$12 - 4 + 1 = C$

$9 = C$

$y^3 + 5y = 4x - x^2 + 9$ //

hoja de Trabajo #1

1-3. Ejercicios del 1 al 10 están en Geogebra

15. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x-y}$; $y(2) = 2$
$(a,b) = (2,2)$

1. Continuidad de la función
$F(x,y) = \sqrt{x-y}$
Para que sea continua $\rightarrow x-y > 0$
$x > y$
Dado el valor inicial, (2,2), la función no es continua. Por esa razón, no podemos garantizar la existencia de por lo menos una solución para el P.V.I

2. Continuidad de $\frac{\partial F}{\partial y}$
$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{2}(x-y)^{-1/2} \cdot -1 = \frac{-1}{2\sqrt{x-y}}$
Para que sea continua el denominador debe ser $\neq 0$. Ya que $x = y$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ no es continua

16. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x-y}$; $y(2) = 1$
$(a,b) = (2,1)$

1. Continuidad de la función
$F(x,y) = \sqrt{x-y}$
Para que sea continua $\rightarrow x-y > 0$
$x > y$
Dado el valor inicial (2,1), la función es continua. Por esa razón, podemos garantizar la existencia de por lo menos una solución para el P.V.I

2. Continuidad de $\frac{\partial F}{\partial y}$
$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{2}(x-y)^{-1/2} \cdot -1 = \frac{-1}{2\sqrt{x-y}}$
Para que sea continua el denominador debe ser $\neq 0$ y $x > 0$. El P.V.I permite la continuidad. Por esta razón existe una solución única.

27. a) $y(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \leq c \\ (x-c)^2 & \text{para } x > c \end{cases}$

Si $x < c$, $y = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = 0$ $\qquad y(0) = 0$

$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y}$

$0 = 2\sqrt{0}$

$0 = 0$

Si $x > c$, $y = (x-c)^2 \rightarrow \frac{dy}{dx} = 2(x-c)$ $\qquad y(0) = 0$

$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y}$

$2(x-c) = 2\sqrt{(x-c)^2}$

Pero $x > c$

$2(x-c) = 2|x-c| \rightarrow |x-c| = x-c \rightarrow 2(x-c) = 2(x-c)$

hoja de trabajo #1

Si $x = c \to \frac{dy}{dx}(c) = \lim_{x \to c} \frac{y(x) - y(c)}{x - c} = 0 \to \frac{dy}{dx}(c) = 2\sqrt{y(c)}$

$0 = 0$

$\lim_{x \to c^-} \frac{0 - 0}{x - c} = \lim_{x \to c^-} \frac{0}{x - c} = 0$

$\lim_{x \to c^+} \frac{(x-c)^2 - 0}{x - c} = \lim_{x \to c^+} x - c = 0$

Asi que $y(x)$ satisface la ecuación diferencial ordinaria $y' = 2\sqrt{y}$; $y(0) = 0 \; \forall x$

Y dado que c puede ser tan cercano como sea a $x = 0$ entonces, por ejemplo,

$y(x) = \begin{cases} 0 & x \leq c \\ (x-c) & x > c \end{cases}$ para $c_1 = 0.1$, $c_2 = 0.01$, $c_3 = 0.001$, serían soluciones

a la E.D.O con P.V.I $y(0) = 0$, hay infinitas soluciones

b) 1) $y' = 2\sqrt{y}$ $\quad y(0) = b$ no tiene solución para $b < 0$

2) $y' = 2\sqrt{y}$ $\quad y(0) = b$ Tiene única solución para $b > 0$

- $F(x,y) = 2\sqrt{y}$ es continua si $y > 0$
- $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ es continua si $y > 0$

30. Si $x < c$ ó $x > c + \pi \to y(x) = \pm 1$ respectivamente, en cualquier caso $y' = 0$

$\to y' = \sqrt{1 - y^2}$

$0 = \sqrt{1 - (\pm 1)^2}$

$0 = \sqrt{0}$ $\quad \to$ en $x < c \wedge x > c + \pi$

$0 = 0$

Si $c < x < c + \pi \to y(x) = \cos(x - c)$, $y'(x) = -\operatorname{sen}(x - c)$

$\to y' = \sqrt{1 - y^2}$

$-\operatorname{sen}(x-c) = -\sqrt{1 - \cos^2(x-c}$

$-\operatorname{sen}(x-c) = -\sqrt{\operatorname{sen}^2(x-c)}$

$-\operatorname{sen}(x-c) = -|\operatorname{sen}(x-c)| = -\operatorname{sen}(x-c)$

Como $c < x < c + \pi$

$c - c < x - c < c + \pi - c$

$0 < x - c < \pi$

Si $x - c \in [0, \pi]$: $|\operatorname{sen}(x-c)| = \operatorname{sen}(x-c)$

por lo tanto $y(x)$ satisface la E.D.O $\forall x$

hoja de Trabajo #1

Dado que $\frac{dy}{dx}(c) = \frac{dy}{dx}(c+\pi) = 0$

$$\frac{dy}{dx}(c) = \lim_{x \to c} \frac{y(x) - y(c)}{x - c} = 0$$

$$\lim_{x \to c^-} \frac{1-1}{x-c} = 0$$

$$\lim_{x \to c^+} \frac{\cos(x-c) - 1}{x-c} = -\operatorname{sen}(c-c) = 0$$

puede mostrarse de igual forma que $\frac{dy}{dx}(c+\pi) = 0$

$$\frac{dy}{dx}(c+\pi) = \lim_{x \to c+\pi} \frac{y(x) - y(c+\pi)}{x - (c+\pi)}$$

$$\lim_{x \to c+\pi^-} \frac{\cos(x-c) - (-1)}{x - (c+\pi)} = \lim_{x \to c+\pi^-} -\operatorname{sen}(x-c) = 0$$

$$\lim_{x \to c+\pi^+} \frac{-1-(-1)}{x-(c+\pi)} = 0$$

- $y' = \sqrt{1-y^2}$; $y(a) = b$

$F(x,y) = \sqrt{1-y^2}$

$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{-y}{\sqrt{1-y^2}}$ son continuas si : $1 - y^2 > 0$

$1 > y^2$

$|y| < 1$

$|b| < 1$

Se garantiza la existencia y unicidad de la solución si el P.V.I $\in (a,b)$ con $-1<b<1$ $a \in \mathbb{R}$

Si $b>1$ no existe solución al P.V.I $y(a)=b$ y si $b=1$ ni la existencia ni la unicidad estan garantizados pero si se puede observar que $y(t) = 1$ ó $y(t) = -1$ son soluciones constantes al P.V.I $y'(t) = -\sqrt{1-y^2}$ $y(a) = 1$ y $y(a) = -1$ respectiva-mente.

hoja de Trabajo #1

32. Si $x^2 < c$ $\rightarrow$ $\frac{dy}{dx} = 4x\sqrt{y}$
$y = 0$

$$0 = 4x\sqrt{0}$$
$$0 = 0$$

Si $x^2 > c$ $\rightarrow$ $\frac{dy}{dx} = 4x\sqrt{y}$
$y = (x^2-c)^2$

$$2(x^2-c)(2x) = 4x\sqrt{(x^2-c)^2}$$
$$4x(x^2-c) = 4x|x^2-c| = 4x(x^2-c)$$

ya que $x^2 > c$ y $|x^2-c| = x^2-c$

Para encontrar la derivada en $x^2 = c$; reescribimos $y(x)$ como:

$$y(x) = \begin{cases} (x^2-c)^2 & ; \quad x < -\sqrt{c} \\ 0 & ; \quad -c \leq x \leq \sqrt{c} \\ (x^2-c)^2 & ; \quad x > \sqrt{c} \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx}(\sqrt{c}) = \lim_{x \to \sqrt{c}} \frac{y(x) - y\sqrt{c}}{x - \sqrt{c}} = 0$$

$$\lim_{x \to \sqrt{c}^+} \frac{(x^2-c)^2 - 0}{x - \sqrt{c}} \cdot \frac{x+\sqrt{c}}{x+\sqrt{c}}$$

$$\lim_{x \to \sqrt{c}^+} \frac{(x^2-c)^2(x+\sqrt{c})}{x^2-c} = \lim_{x \to \sqrt{c}^+} (x^2-c)(x+\sqrt{c})$$
$$= (c-c)(\sqrt{c}+\sqrt{c})$$
$$= 0$$

$$\lim_{x \to \sqrt{c}^-} \frac{0-0}{x-\sqrt{c}} = 0$$

de igual manera podemos ver que

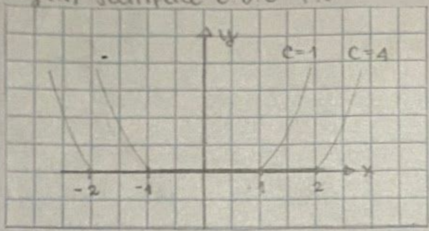
$$\frac{dy}{dx}(-\sqrt{c}) = \lim_{x \to -\sqrt{c}} \frac{y(x) - y(-\sqrt{c})}{x+\sqrt{c}} = 0$$

así que $\frac{dy}{dx}(\pm\sqrt{c}) = 4(\pm\sqrt{c})(y(\pm\sqrt{c}))$

$$0 = 0$$

hoja de Trabajo #1

→ $y(x)$ satisface E.D.O $\forall x$



La ecuación $\frac{dy}{dx} = 4x\sqrt{y}$ $\quad y(a)=b$

Se garantiza solución única si $b>0$; $\forall a$

→ $F(x,y) = 4x\sqrt{y}$

$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2x}{\sqrt{y}}$ → son continuas para $y>0$ $(b>0)$

Para $y<0$ $(b<0)$ no habría soluciones y si $y=0$ $(b=0)$ el teorema no garantiza ni existencia ni unicidad ; aunque vemos que existen infinitas soluciones al P.V.I $y(0)=0$

hoja de Trabajo #1

1.4.5. $2\sqrt{x}\,\frac{dy}{dx} = \sqrt{1-y^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{1-y^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$dy = \sqrt{1-y^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$$

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$$

$$\int\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$$

$$\operatorname{arcsen} y = \sqrt{x} + C$$

$$\operatorname{sen}^{-1} y = \sqrt{x} + C$$

$y(x) = \operatorname{sen}(\sqrt{x} + C) \rightarrow$ solución general explícita

12. $yy' = x(y^2+1)$

$$y\frac{dy}{dx} = x(y^2+1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(y^2+1)}{y}$$

$$dy = x\cdot\frac{(y^2+1)}{y}\cdot dx$$

$$\frac{y}{(y^2+1)}\,dy = x\,dx$$

$$\int\frac{y}{(y^2+1)}\,dy = \int x\,dx$$

$$\frac{1}{2}\ln(y^2+1) = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\ln(y^2+1) = x^2 + C_2$$

$$e^{\ln(y^2+1)} = e^{x^2+C_2}$$

$$y^2+1 = e^{x^2}e^{C_2}$$

$y^2+1 = Ce^{x^2} \rightarrow$ solución general implícita

hoja de Trabajo #1

17. $y' = 1 + x + y + xy$

$$\frac{dy}{dx} = 1 + x + y + xy$$

$$\frac{dy}{dx} = (1+x) + (y + xy)$$

$$\frac{dy}{dx} = (1+x) + y(1+x)$$

$$\frac{dy}{dx} = (1+x)(1+y)$$

$$\frac{dy}{(1+y)} = (1+x)\,dx$$

$$\int \frac{dy}{1+y} = \int (1+x)\,dx$$

$$\ln(1+y) = x + \frac{x^2}{2} + C$$

$$e^{\ln(1+y)} = e^{x+\frac{1}{2}x^2+C}$$

$$e^{\ln(1+y)} = e^{x+\frac{1}{2}x^2} \cdot e^{C}$$

$$1 + y = Ce^{\frac{1}{2}x^2+x}$$

$y(x) = Ce^{\frac{1}{2}x^2+x} - 1 \longrightarrow$ solución general explícita

18. $x^2 y' = 1 - x^2 + y^2 - x^2 y^2$

$$x^2 \frac{dy}{dx} = (1 - x^2) + (y^2 - x^2 y^2)$$

$$x^2 \frac{dy}{dx} = (1 - x^2)\, y^2 (1 - x^2)$$

$$x^2 \frac{dy}{dx} = (1 - x^2)(1 + y^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - x^2}{x^2}(1 + y^2)$$

$$\frac{dy}{1 + y^2} = \frac{1 - x^2}{x^2}\,dx$$

$$\int \frac{dy}{1 + y^2} = \int \frac{1 - x^2}{x^2}\,dx$$

$$\int \frac{dy}{1 + y^2} = \int \frac{1}{x^2} - 1\,dx$$

$$\arctan y = -\frac{1}{x} - x + C$$

$y(x) = \tan\left(C - x - \frac{1}{x}\right) \longrightarrow$ solución general explícita

Hoja de Trabajo #1

25. $x\frac{dy}{dx} - y = 2x^2y \quad ; \quad y(1) = 1$

$$x\frac{dy}{dx} = 2x^2y + y$$

$$x\frac{dy}{dx} = y(2x^2+1)$$

$$\frac{dy}{dx} = y\frac{(2x^2+1)}{x}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{2x^2+1}{x}\,dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2x + \frac{1}{x}\,dx$$

$$\ln y = \frac{2x^2}{2} + \ln x + c$$

$$\ln y = x^2 + \ln x + c$$

$$e^{\ln y} = e^{x^2+\ln x+c}$$

$$e^{\ln y} = e^{x^2}e^{\ln x}e^{c}$$

$$y = Cxe^{x^2}$$ → solución general explícita

Dado que el P.V.I es $y(1) = 1$

$$1 = C(1)e^{1^2}$$

$$1 = Ce$$

$$\frac{1}{e} = C$$

$$y(x) = \frac{1}{e}xe^{x^2}$$

$$y(x) = xe^{x^2-1}$$ → solución particular explícita

hoja de Trabajo #1

27. $\frac{dy}{dx} = 6e^{2x-y}$; $y(0) = 0$

$\frac{dy}{dx} = 6e^{2x}e^{-y}$

$dy = 6e^{2x}e^{-y}\,dx$

$\frac{dy}{e^{-y}} = 6e^{2x}dx$

$\int \frac{dy}{e^{-y}} = \int 6e^{2x}dx$

$e^{y} = \frac{6e^{2x}}{2} + C$

$e^{y} = 3e^{2x} + C$

Dado que el P.V.I es $y(0) = 0$

$e^{0} = 3e^{2(0)} + C$

$1 = 3 + C$

$-2 = C$

$e^{y} = 3e^{2x} - 2$

$\ln e^{y} = \ln(3e^{2x} - 2)$

$y(x) = \ln(3e^{2x} - 2) \longrightarrow$ solución particular