Lösungen

Treppengeländer aus Glas

Für diesen Lösungsvorschlag wird der GeoGebra Grafikrechner verwendet. Es kann auch mit GeoGebra Classic CAS gearbeitet werden.

Kapitel 1

Arbeitsblatt Nr. 2: Wendeltreppe

Aufgabe 1

Zunächst stellen wir fest, dass wir den Flächeninhalt des äußeren und inneren Geländers berechnen müssen, um den gesamten Glasverbrauch zu erhalten.

Berechnung der inneren Geländerfläche:

Zuerst werden die drei angegebenen Funktionen abgeleitet. Entsprechend dem Hinweis im Worksheet kann mit Hilfe des Integrals die Länge der Kurve berechnet werden.
Da wir die Länge für eine volle Umdrehung berechnen, wählen wir die Grenzen 0 bis 2π. Der Radius entspricht dem inneren Radius: 0,8m
Den Flächeninhalt erhält man dann, wenn die Länge mit dem Normalabstand zwischen Handlauf und Befestigung des Geländers (= Normalhöhe) multipliziert wird.

Nachdem die drei Funktionen $x_1, x_2, und\ x_3$ eingegeben wurden, leitet man die einzelnen Funktionen ab. Dafür verwenden wir den Befehl „Ableitung".

$$x_1(t) \coloneqq 0.8 \cdot \cos(t)$$

$$x_2(t) \coloneqq 0.8 \cdot \sin(t)$$

$$x_3(t) \coloneqq \frac{2.5}{2\pi} \cdot t$$

$$x_1{}'(t) \coloneqq Ableitung\big(x_1(t)\big) = -\frac{4}{5}\sin(t)$$

$$x_2{}'(t) \coloneqq Ableitung\big(x_2(t)\big) = \frac{4}{5}\cos(t)$$

$$x_3{}'(t) \coloneqq Ableitung\big(x_3(t)\big) = \frac{5}{4\,\pi}$$

Interreg Österreich-Tschechische Republik
Europäischer Fonds für regionale Entwicklung
EUROPÄISCHE UNION

Die Länge des Handlaufs berechnen wir nun mit Hilfe des am Arbeitsblatt (→ Hinweis) angegebenen Integrals.

Dazu definieren wir zuerst die Funktion $s(t)$, und integrieren sie anschließend im GeoGebra Grafikrechner:

$$s(t) := \sqrt{\left(x_1{}'(t)\right)^2 + \left(x_2{}'(t)\right)^2 + \left(x_3{}'(t)\right)^2}$$

$$Integral(s(t), 0{,}2\pi) = 5.61$$

Der innere Handlauf hat also eine Länge von 5.61 m.

Zur Berechnung des Flächeninhalts muss nun die Länge des inneren Geländers mit der Normalhöhe multipliziert werden. Die Normalhöhe ist wie angegeben 1 m. Somit ergibt sich für den Flächeninhalt des inneren Geländers:

$$Flächeninhalt_{innen} = 5.61\ m \cdot 1\ m = \mathbf{5.61\ m^2}$$

<u>Berechnung der äußeren Geländerfläche:</u>

Bei der Berechnung des Flächeninhaltes des äußeren Geländers wird ein anderer Radius in die Funktionen eingesetzt:

$$Radius_{außen} = Radius_{innen} + Breite\ der\ Treppe$$
$$Radius_{außen} = 0.8 + 2.5 = \boldsymbol{3.3m}$$

Danach geht man genauso wie bei der Berechnung des inneren Handlaufs vor.

Es ergibt sich für das äußere Geländer ein Flächeninhalt von **20.88 m²**.

$$Flächeninhalt_{gesamt} = Flächeninhalt_{innen} + Flächeninhalt_{außen}$$
$$Flächeninhalt_{gesamt} = 5.61\ m^2 + 20.88\ m^2 = \boldsymbol{26.49\ m^2}$$

Für die Treppe mit den gegebenen Maßen wird **26.49 m²** Glas benötigt.

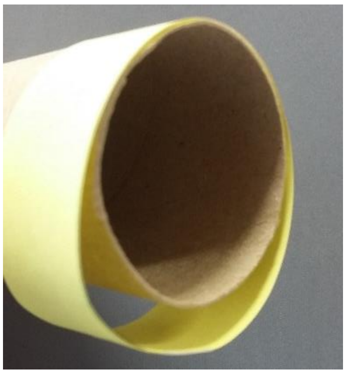
Aufgabe 2

Die Ganghöhe beträgt 2,5 m. Bei einer vollen Umdrehung werden also horizontal 2,5 m überwunden. Pro Stufe werden 18 cm horizontal nach oben zurückgelegt. Zur Berechnung der Anzahl der Stufen muss nur die Ganghöhe durch die Höhe der einzelnen Stufen gerechnet werden. Dafür muss in dieselbe Einheit umgewandelt werden.

$$2.5\,m = 250\,cm$$
$$\frac{250}{18} = 13.\dot{8}$$

Bei einer vollen Umdrehung hat die Treppe **14 Stufen**, wobei eine etwas niedriger als 18 cm ist.

Arbeitsblatt Nr. 3: Hands on! Bastle und entdecke!



Timo und Claudia **haben nicht Recht** in ihrer Annahme!

Auch wenn es auf den ersten Blick so aussieht, hat sich doch ein kleiner Fehler eingeschlichen. Die Formel zur Berechnung der Mantelfläche eines Zylinders stimmt zwar, aber der Radius ist nicht mehr der der Klopapierrolle!
Wenn man den hergestellten Zylindermantel um die Klopapierrolle hängt, sieht man das recht schnell (siehe Abbildung).

Somit muss zur Berechnung des Flächeninhalts erst der neue Radius berechnet werden. Hierfür braucht man wieder das angegebene Integral.

<u>Kapitel 2</u>

Arbeitsblatt Nr. 1: Spiralförmiger Aufgang 1

Aufgabe 1

Zur Berechnung der Länge des Handlaufes wird wieder die Aktivität angegebene Integral verwendet.
Die drei Funktionen werden wieder im GeoGebra Grafikrechner eingegeben und mit dem Befehl *Ableitung* abgeleitet.

Hinweis: Da es sich um die Länge des Handlaufs an der Innenseite handelt, werden für den Radius 0,8 m eingesetzt.

$$x_1(t) \coloneqq \big(0.8(t+1)\big)\cos(t)$$

$$x_2(t) \coloneqq \big(0.8(t+1)\big)\sin(t)$$

$$x_3(t) \coloneqq 1.1 + \frac{5}{4\,\pi} \cdot t$$

$$x_1{}'(t) \coloneqq Ableitung\big(x_1(t)\big) = \frac{1}{5}(-4\,t\sin(t) + 4\cos(t) - 4\sin(t))$$

$$x_2{}'(t) \coloneqq Ableitung\big(x_2(t)\big) = \frac{1}{5}(4\,t\cos(t) + 4\cos(t) + 4\sin(t))$$

$$x_3{}'(t) \coloneqq Ableitung\big(x_3(t)\big) = \frac{5}{4\,\pi}$$

Wie beim Arbeitsauftrag in Kapitel 1 wird nun integriert:

$$s(t) = \sqrt{\big(x_1{}'(t)\big)^2 + \big(x_2{}'(t)\big)^2 + \big(x_3{}'(t)\big)^2}$$

$$Integral(s(t), 0{,}2\pi) = 21.75\ m$$

Die Länge des inneren Handlaufs beträgt **21.75 m**.

Hinweis: Falls du das Integral mit GeoGebra Classic CAS berechnest und dieses nicht berechnet werden kann, versuche es zuerst mit dem Befehl „*Vereinfache*" zu vereinfachen. Mit dem GeoGebra Grafikrechner ist die Berechnung ohne Probleme durchführbar.

Aufgabe 2

Zur Berechnung der Fläche muss die Länge des Handlaufs mit dem Normalabstand zwischen Handlauf und Befestigung des Treppengeländers multipliziert werden.
Dieser Abstand beträgt 1 m, somit ergibt sich ein Flächeninhalt für das innere Geländer von 21.75 m^2.

Im Beispiel aus Kapitel 1 betrug der Flächeninhalt des inneren Geländers: 5.61 m^2.

21.75 m^2 sind ca. 387.70 % von 5.61 m^2.

Der Glasverbrauch vom ersten auf das zweite Beispiel ist also **um rund 287% gestiegen**.

Arbeitsblatt Nr. 2: Spiralförmiger Aufgang 2

Aufgabe 1 Zur Berechnung der Länge des Handlaufes wird wieder das im Applet angegebene Integral verwendet.
Die drei Funktionen werden wie im GeoGebra Grafikrechner eingegeben und abgeleitet.

Hinweis: Es handelt sich um die Länge des Handlaufs an der Außenseite. In der Formel wird jedoch der innere Radius eingesetzt, da die Breite extra berücksichtigt werden muss.

$$x_1(t) \coloneqq (2 \cdot 0.8\,(t+1) + 2.5)\cos(t)$$

$$x_2(t) \coloneqq (2 \cdot 0.8\,(t+1) + 2.5)\sin(t)$$

$$x_3(t) \coloneqq 1.1 + \frac{5}{4\,\pi} \cdot t$$

$$x_1{}'(t) \coloneqq Ableitung\big(x_1(t)\big) = \frac{1}{10}(-16\,t\sin(t) + 16\cos(t) - 41\sin(t))$$

$$x_2{}'(t) \coloneqq Ableitung\big(x_2(t)\big) = \frac{1}{10}(16\,t\cos(t) + 41\cos(t) + 16\sin(t))$$

$$x_3{}'(t) \coloneqq Ableitung\big(x_3(t)\big) = \frac{5}{4\,\pi}$$

Wie beim Arbeitsauftrag in Kapitel 1 wird nun integriert:

$$s(t) = \ sqrt\big(\big(x_1{}'(t)\big)^2 + \big(x_2{}'(t)\big)^2 + \big(x_3{}'(t)\big)^2\big)$$

$$Integral(s(t), 0{,}2\pi) = 58.38\ m$$

Die Länge des äußeren Handlaufs beträgt 58.38 m.

Hinweis: Falls du das Integral mit GeoGebra Classic CAS berechnest und dieses nicht berechnet werden kann, versuche es zuerst mit dem Befehl „*Vereinfache*" zu vereinfachen. Mit dem GeoGebra Grafikrechner ist die Berechnung ohne Probleme durchführbar.

Aufgabe 2 Zur Berechnung der Fläche muss die Länge des mit dem Normalabstand zwischen Handlauf und Befestigung des Treppengeländers multipliziert werden. Dieser Abstand beträgt 1 m, somit ergibt sich ein Flächeninhalt für das innere Geländer von 58.38 m^2.

Im Beispiel aus Kapitel 1 betrug der Flächeninhalt des äußeren Geländers: 20.88 m^2.

58.38 m^2 sind 279.6 % von 20.88 m^2.

Der Glasverbrauch vom ersten auf das zweite Beispiel ist also **um ca. 179.6 % gestiegen**.

Interreg
EUROPÄISCHE UNION
Österreich-Tschechische Republik
Europäischer Fonds für regionale Entwicklung