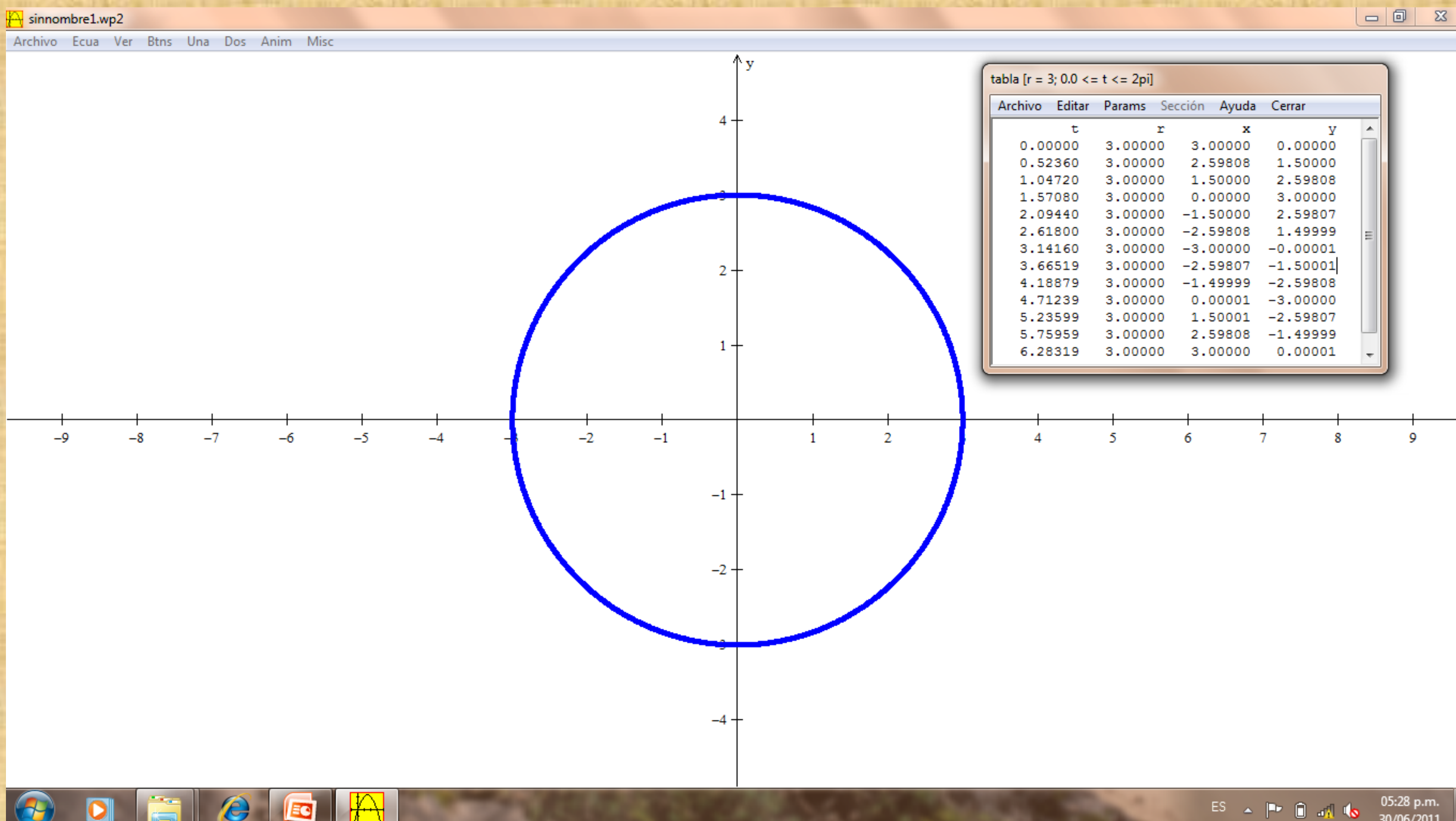
Curvas en coordenadas polares

COORDENADAS POLARES

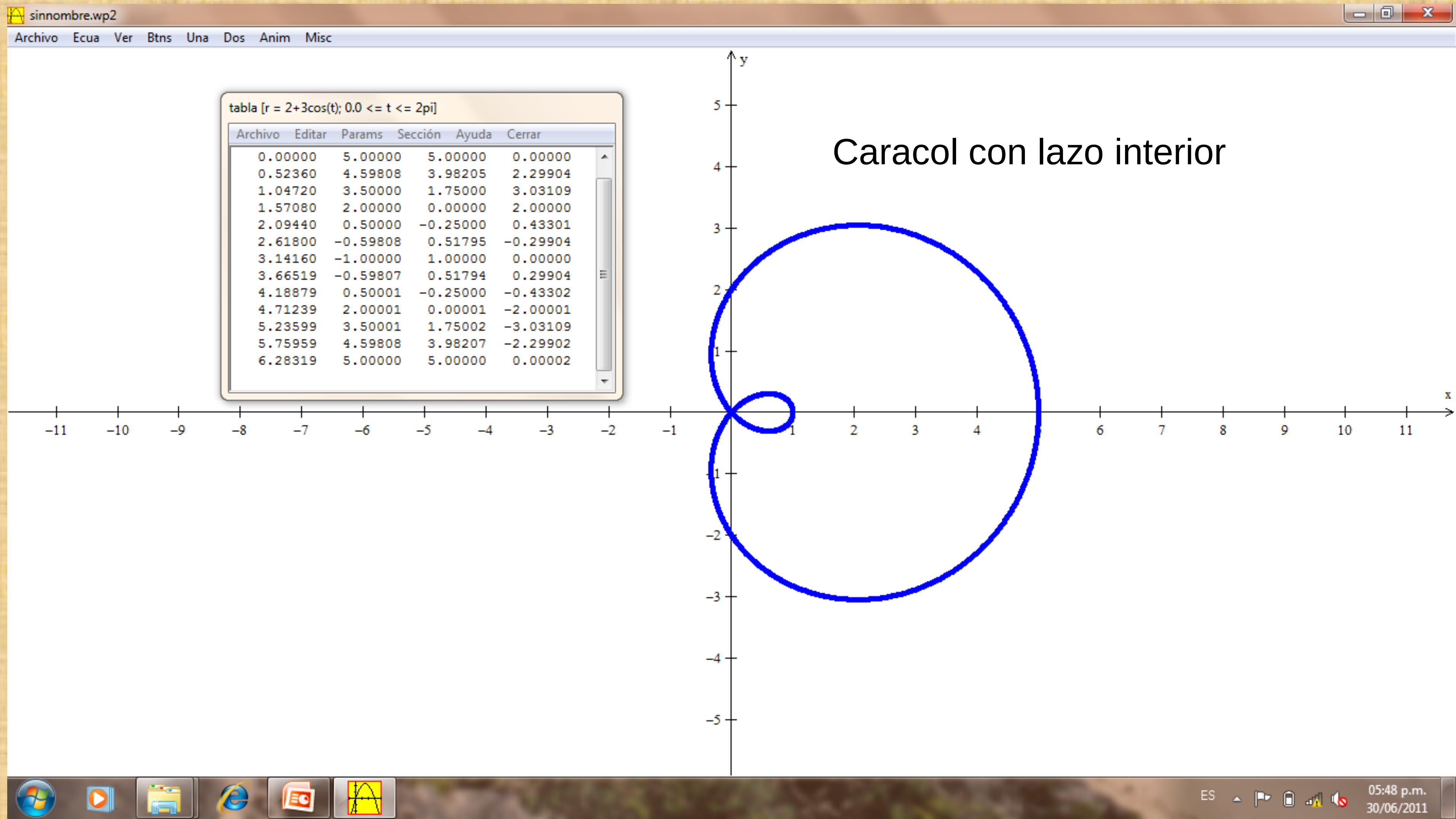
$$x = r\cos(\theta) \qquad y = r\,sen(\theta) \qquad r^2 = x^2 + y^2 \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Ejemplo: $$x^2 + y^2 = 9$$



COORDENADAS POLARES

CARACOLES $\quad r = a \pm b\cos(\theta) \quad r = a \pm b\,sen(\theta)$

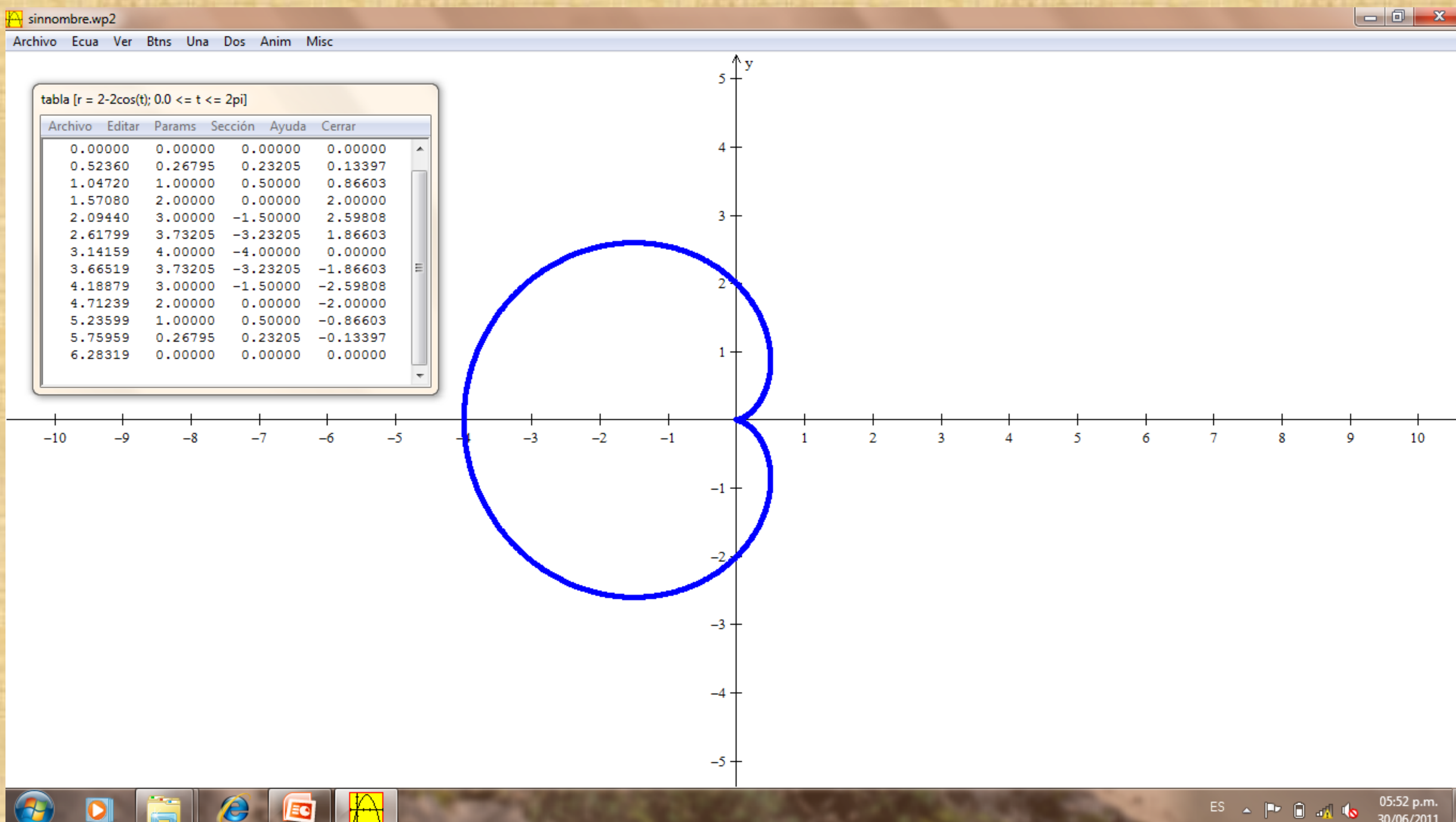


0.00000	5.00000	5.00000	0.00000
0.52360	4.59808	3.98205	2.29904
1.04720	3.50000	1.75000	3.03109
1.57080	2.00000	0.00000	2.00000
2.09440	0.50000	-0.25000	0.43301
2.61800	-0.59808	0.51795	-0.29904
3.14160	-1.00000	1.00000	0.00000
3.66519	-0.59807	0.51794	0.29904
4.18879	0.50001	-0.25000	-0.43302
4.71239	2.00001	0.00001	-2.00001
5.23599	3.50001	1.75002	-3.03109
5.75959	4.59808	3.98207	-2.29902
6.28319	5.00000	5.00000	0.00002

COORDENADAS POLARES

CARACOLES: Cardioide a=b
a/b=1

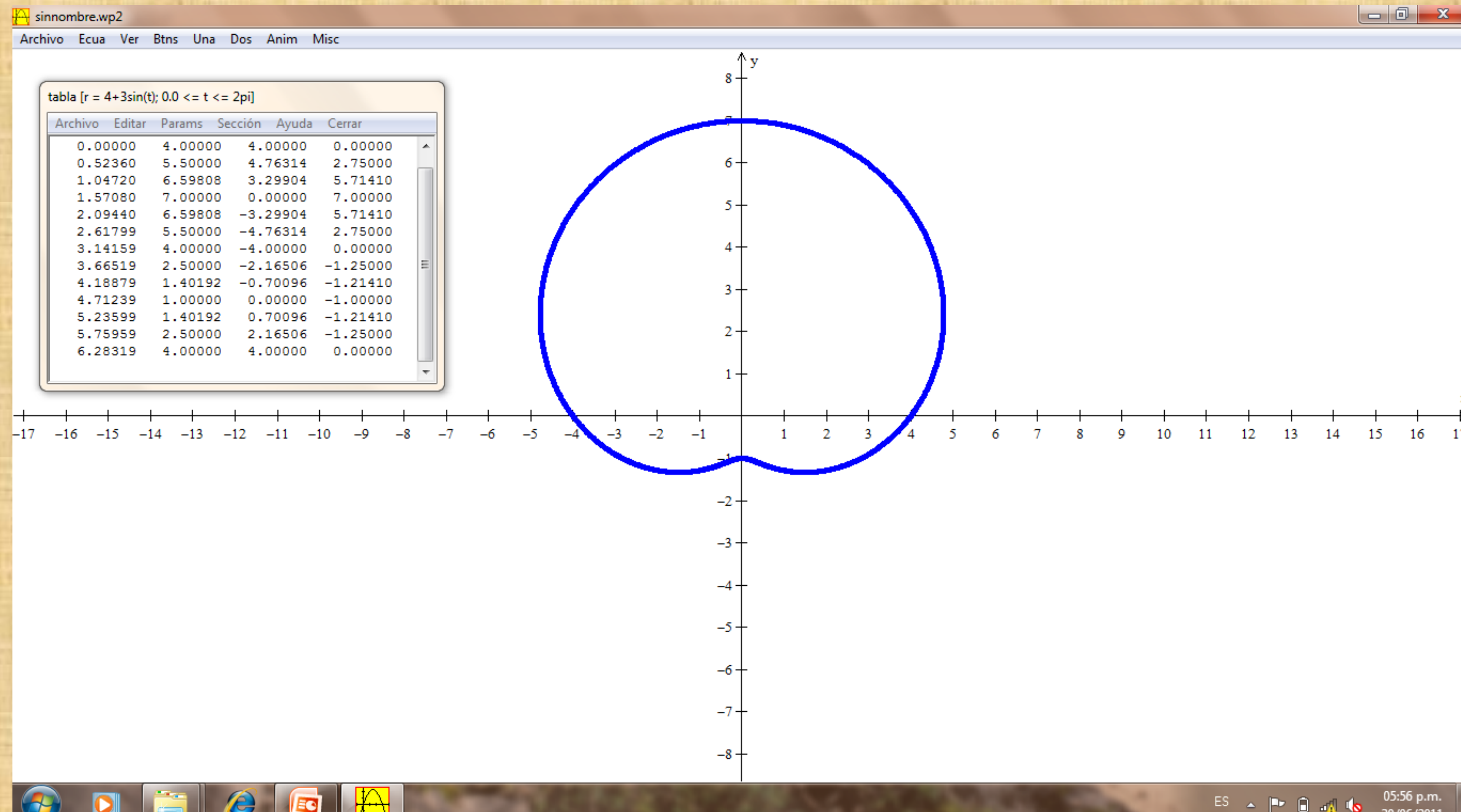
$$r = a \pm b\cos(\theta) \qquad r = a \pm b\,sen(\theta)$$



COORDENADAS POLARES

CARACOLES: Caracol con hoyuelo 1< a/b<2

$$r = a \pm b\cos(\theta) \qquad r = a \pm bsen(\theta)$$

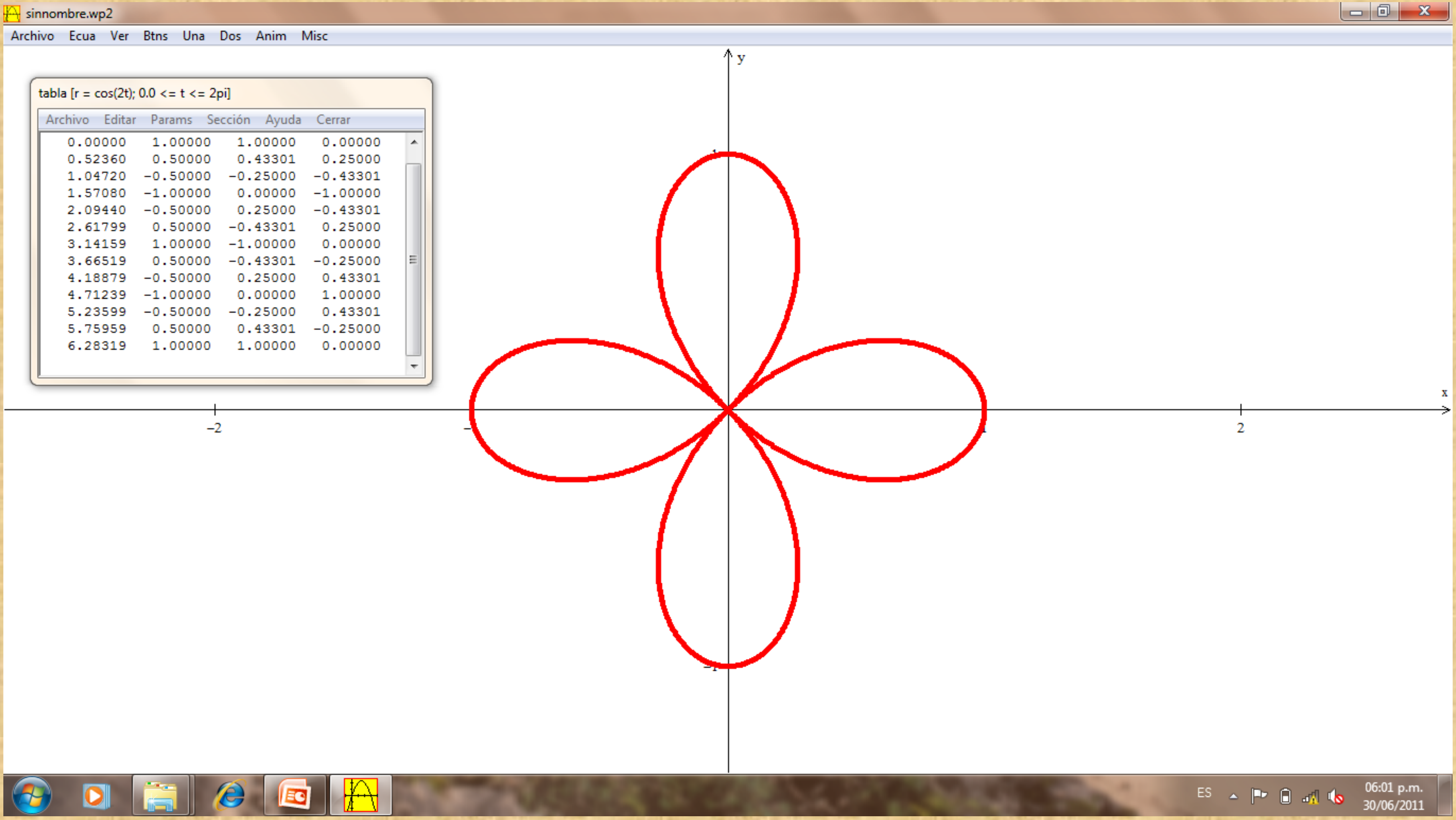


COORDENADAS POLARES

CURVAS ROSAS:

a).-   n pétalos si n es impar

b).- 2n pétalos si n es par



0.00000	1.00000	1.00000	0.00000
0.52360	0.50000	0.43301	0.25000
1.04720	-0.50000	-0.25000	-0.43301
1.57080	-1.00000	0.00000	-1.00000
2.09440	-0.50000	0.25000	-0.43301
2.61799	0.50000	-0.43301	0.25000
3.14159	1.00000	-1.00000	0.00000
3.66519	0.50000	-0.43301	-0.25000
4.18879	-0.50000	0.25000	0.43301
4.71239	-1.00000	0.00000	1.00000
5.23599	-0.50000	-0.25000	0.43301
5.75959	0.50000	0.43301	-0.25000
6.28319	1.00000	1.00000	0.00000

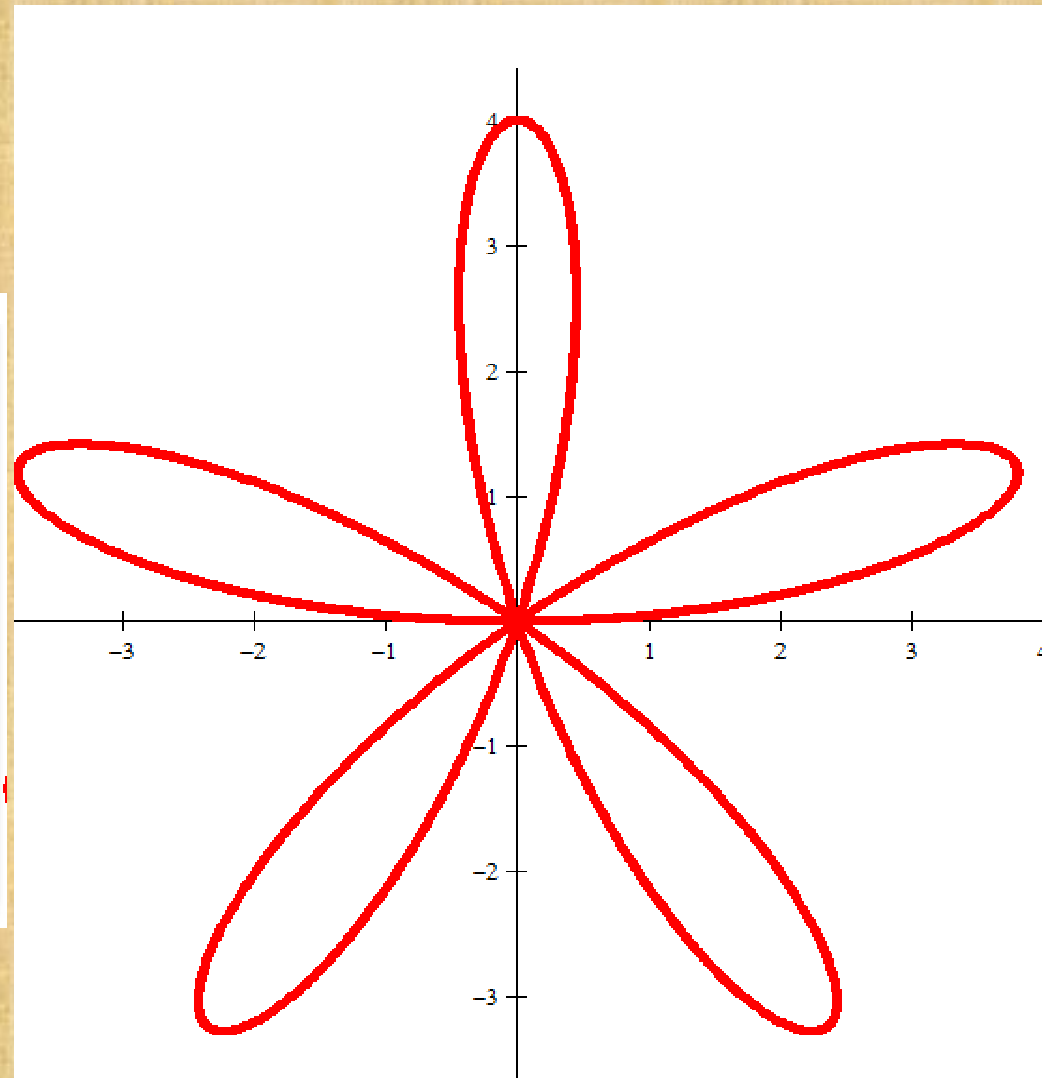
COORDENADAS POLARES

CURVAS ROSAS:
a).- n pétalos si n es impar
b).- 2n pétalos si n es par

tabla [r = 4sin(5t); 0.0 <= t <= 2pi]

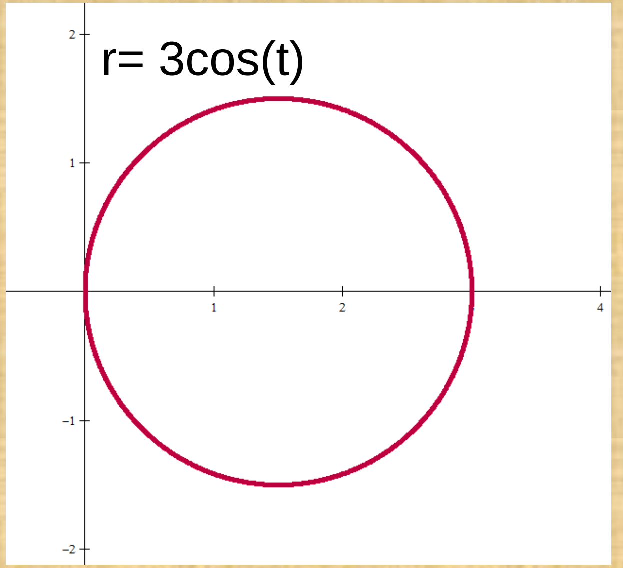
Archivo Editar Params Sección Ayuda Cerrar

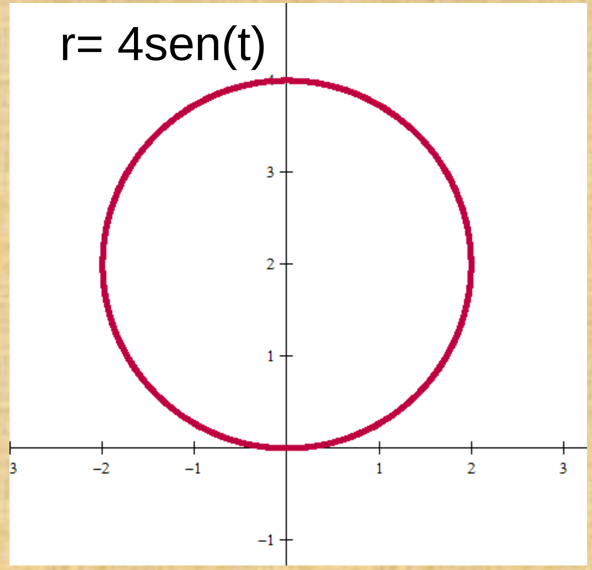
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.52360	2.00000	1.73205	1.00000
1.04720	-3.46410	-1.73205	-3.00000
1.57080	4.00000	0.00000	4.00000
2.09440	-3.46410	1.73205	-3.00000
2.61799	2.00000	-1.73205	1.00000
3.14159	0.00000	0.00000	0.00000
3.66519	-2.00000	1.73205	1.00000
4.18879	3.46410	-1.73205	-3.00000
4.71239	-4.00000	0.00000	4.00000
5.23599	3.46410	1.73205	-3.00000
5.75959	-2.00000	-1.73205	1.00000
6.28319	0.00000	0.00000	0.00000

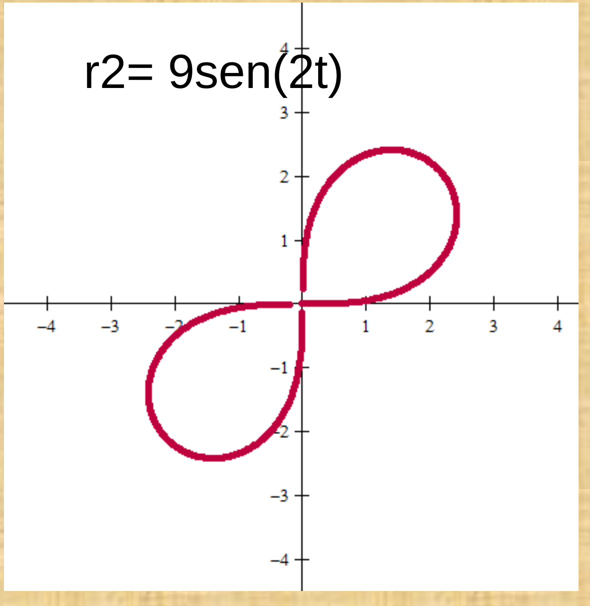


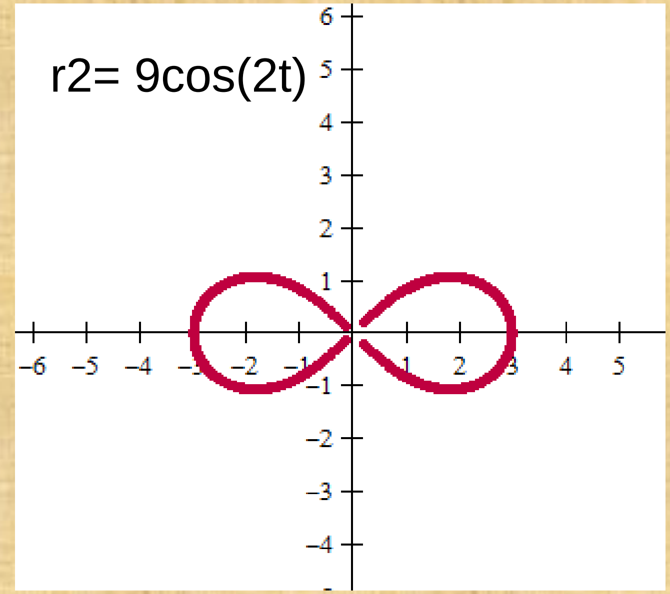
COORDENADAS POLARES

CÍRCULOS Y LEMNISCATAS





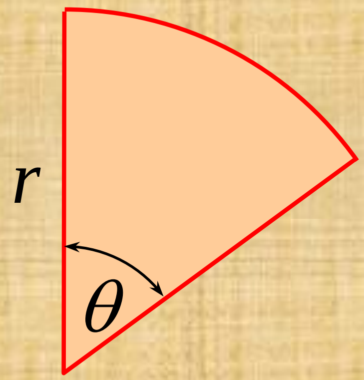





Área en coordenadas polares

Introducción:

En esta sección deduciremos una expresión para calcular el área de una región determinada por una ecuación en coordenadas polares. Para ello recordemos el área de un sector circular de radio r y ángulo θ

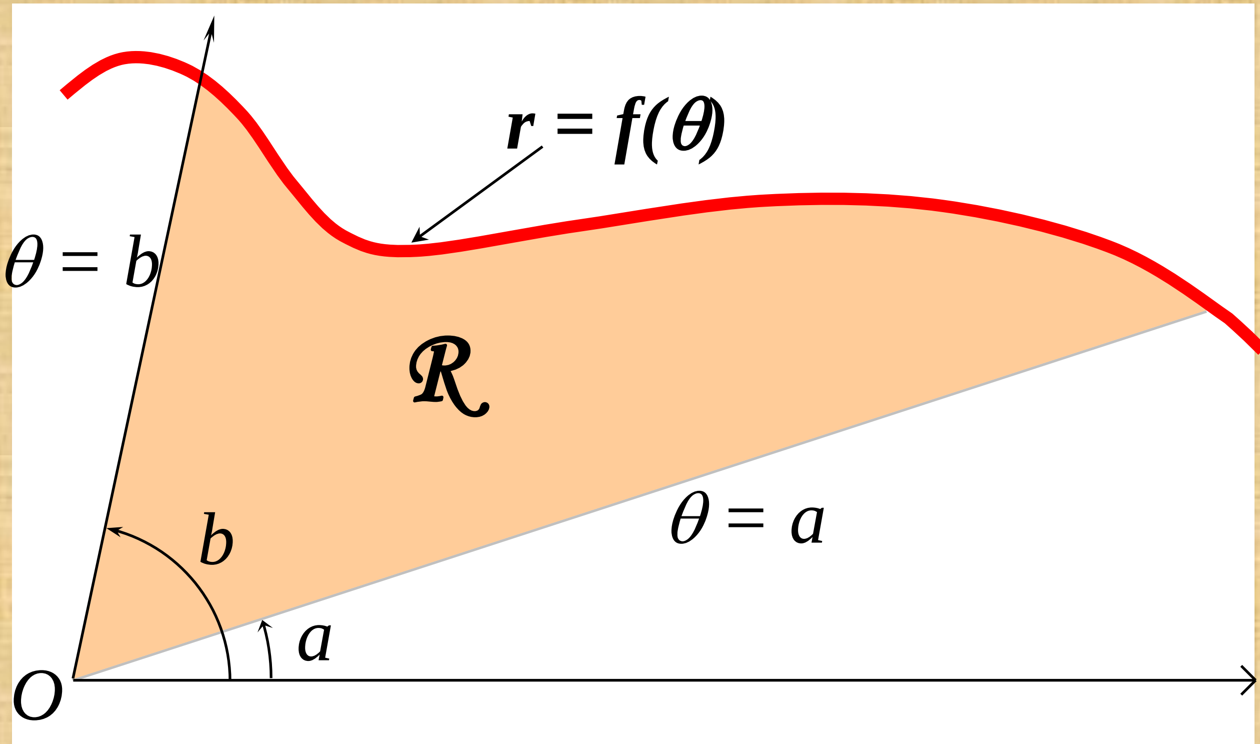


$$\boxed{A = \frac{1}{2} r^2 \theta} \longrightarrow 1$$

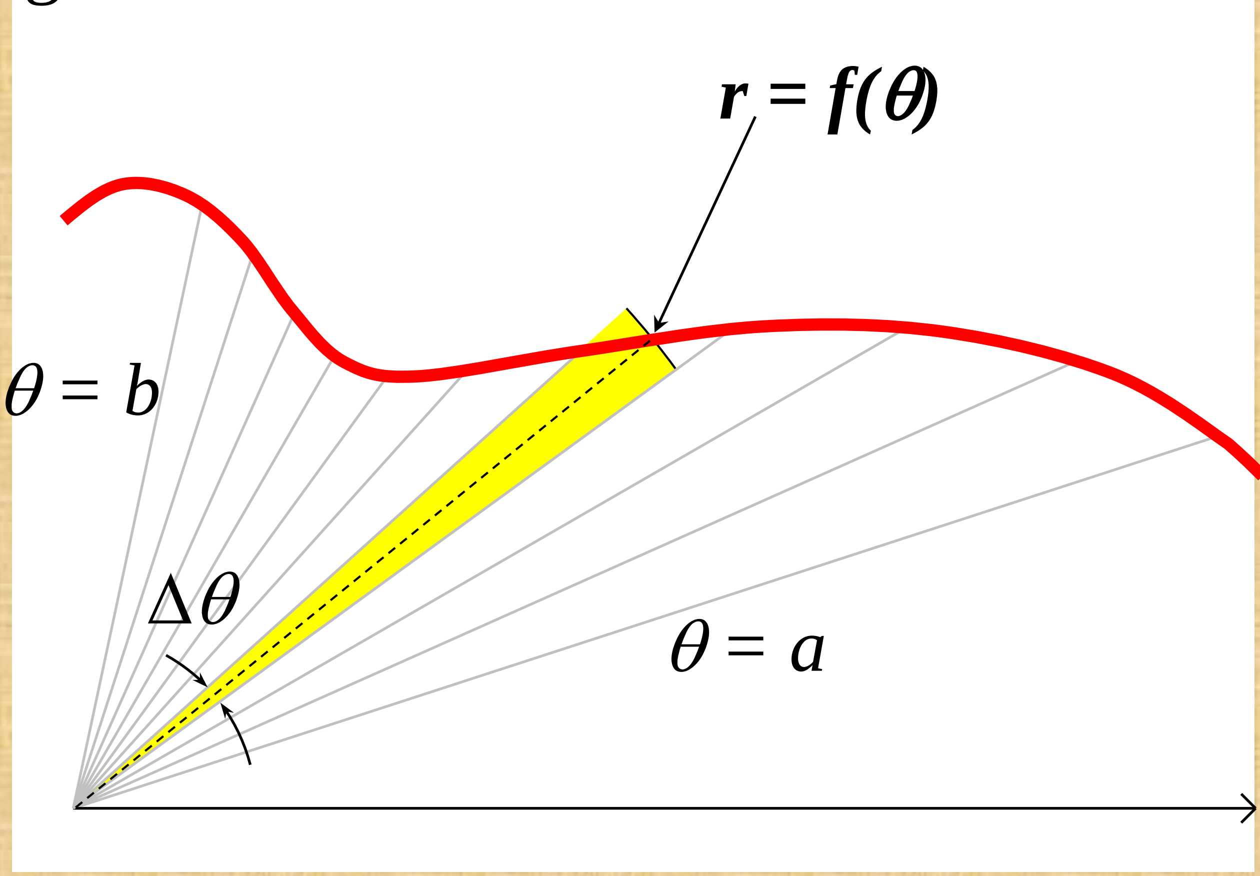
Donde r es el radio y θ es el ángulo central en radianes.

10

Sea $\mathcal{R}$ la región que vemos en la figura, limitada por la curva de ecuación $r = f(\theta)$ y los rayos $\theta = a$ y $\theta = b$, donde f es positiva y continua.



Dividimos la región $\mathcal{R}$ en *n* regiones mas pequeñas con ángulo central Δθ.



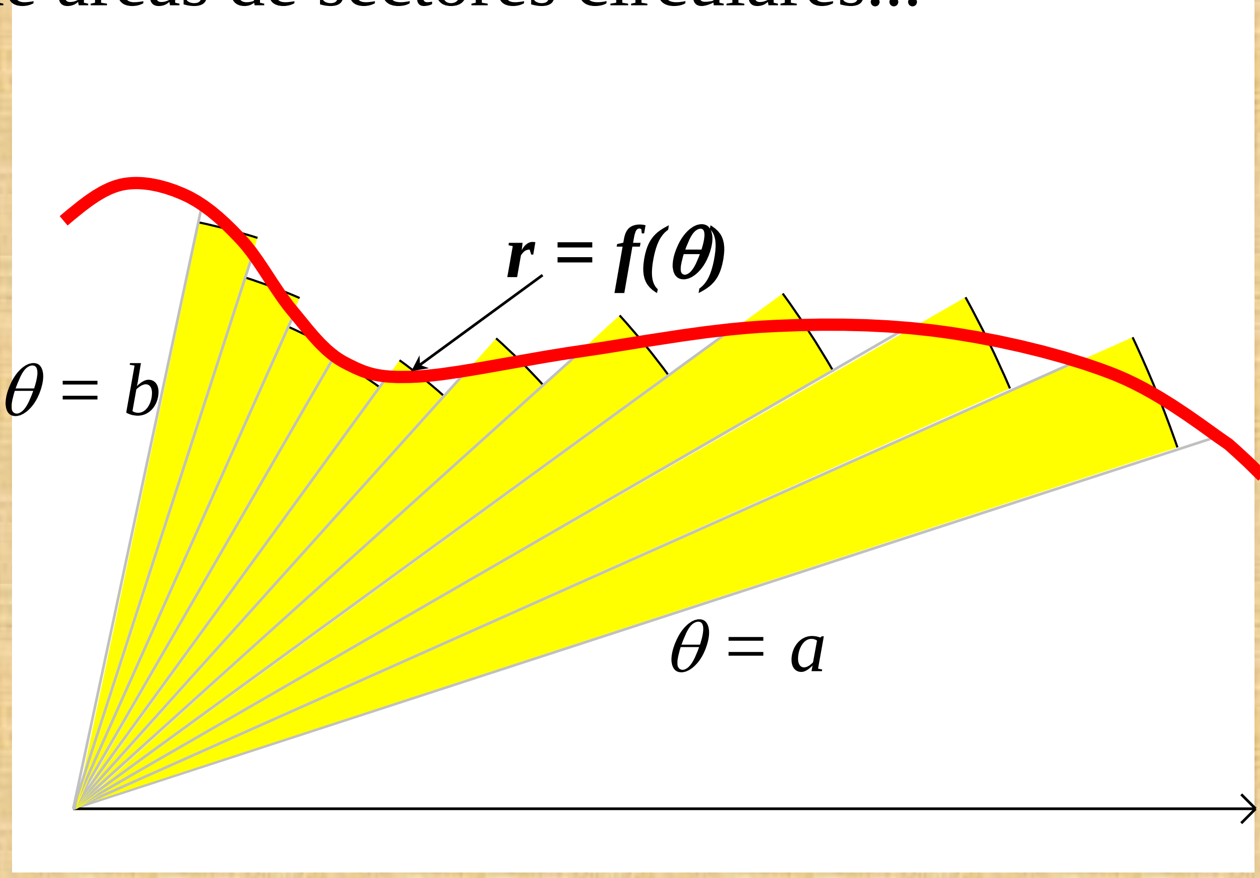
12

Por lo tanto, el área de la i-ésima región se aproxima como un sector circular de radio $f(\theta)$ y ángulo $\Delta\theta$.
Así, de la fórmula 1 tendremos:

$$\boxed{\Delta A_i = \tfrac{1}{2}\left[f(\theta)\right]^2 \Delta\theta}$$

13

Una aproximación al área total de $\mathcal{R}$ estará dada por la suma de áreas de sectores circulares...



Es decir....

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}\left[f(\theta)\right]^2 \Delta\theta$$

Según se observa en la figura anterior, la aproximación mejora cuando $n\rightarrow\infty$. Ya que estas sumas son Sumas de Riemann, resulta...

$$A = \lim_{n\rightarrow\infty} \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}\left[f(\theta)\right]^2 \Delta\theta \;=\; \int_a^b \tfrac{1}{2}\left[f(\theta)\right]^2 d\theta \qquad (2)$$

15

Con frecuencia esta fórmula se escribe...

$$\boxed{A = \int_a^b \tfrac{1}{2} r^2 \, d\theta} \qquad 3$$

Observe la similitud entre las fórmulas 1 y 3.

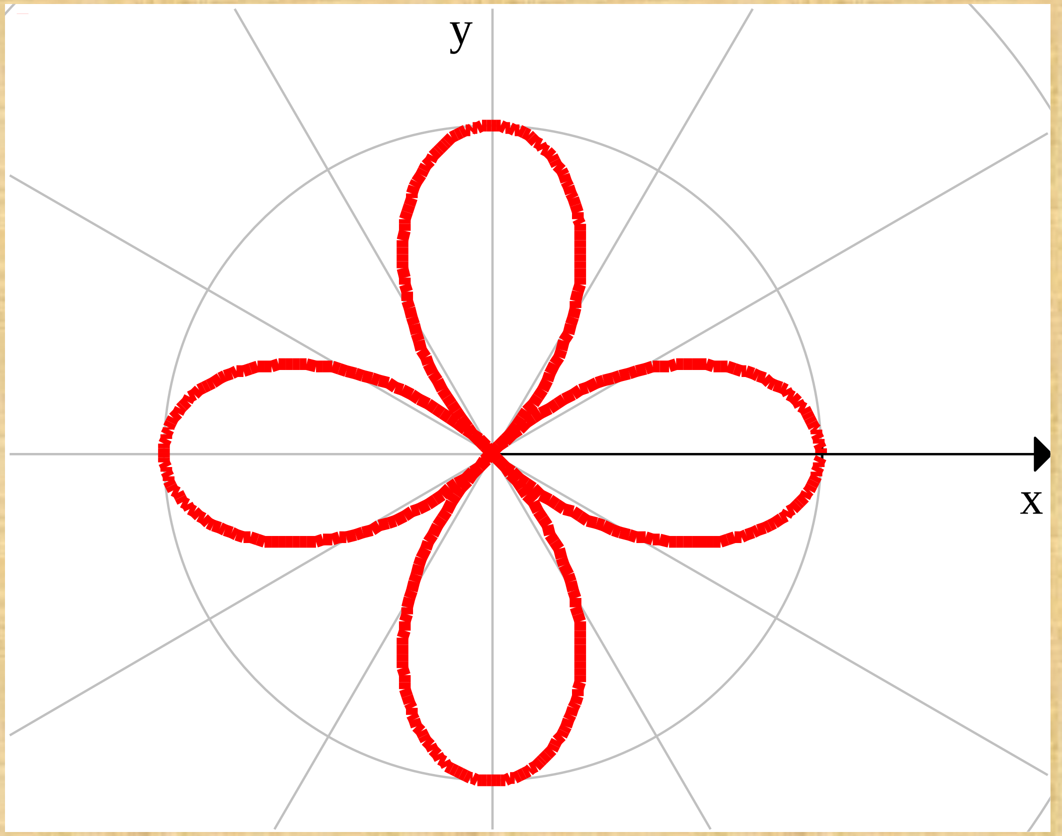
NOTA:

Al aplicar la fórmula 3 es necesario imaginar que el área está barrida por un rayo que sale de O y gira desde *a* hasta *b*.

16

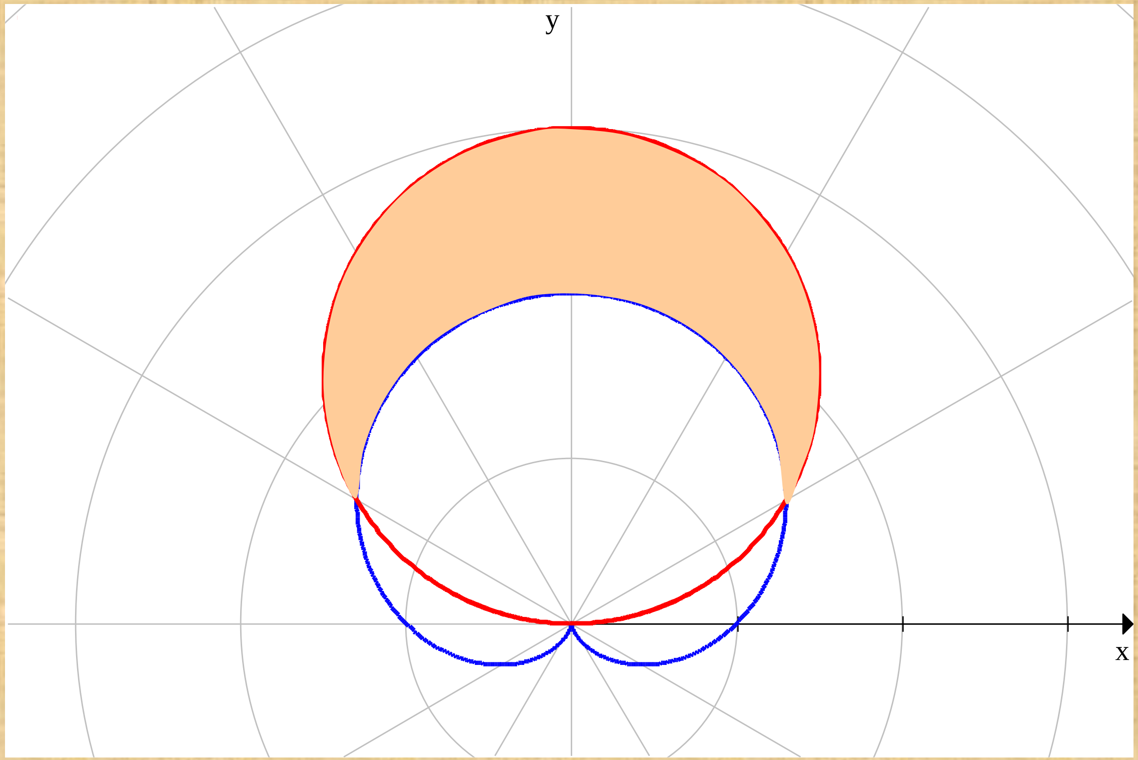
Ejercicio 1

Calcule el área encerrada por uno de los cuatro pétalos de la curva $r = cos\ 2\theta$



Ejercicio:

Calcule el área de la región dentro del círculo $r = 3 \text{ sen } \theta$ y fuera de la cardioide $r = 1 + \text{sen } \theta$



18

Longitud de Arco en coordenadas polares

LONGITUD DE ARCO

Sea $f(\theta)$ la función polar

$$s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[f(\theta)]^2+[f'(\theta)]^2}\,d\theta=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^2+\left[\frac{dr}{d\theta}\right]^2}\,d\theta$$

Ejemplo: Determinar la longitud de arco de la curva polar siguiente:

$$r=f(\theta)=2-2\cos(\theta) \quad 0\le\theta\le 2\pi$$

$$s=\int_{0}^{2\pi}\sqrt{[2-2\cos(\theta)]^2+[2sen(\theta)]^2}\,d\theta$$

$$s=2\sqrt{2}\int_{0}^{2\pi}\sqrt{1-\cos(\theta)}\,d\theta=2\sqrt{2}\int_{0}^{2\pi}\sqrt{2sen^2(\theta/2)}\,d\theta$$

$$s=4\int_{0}^{2\pi}sen\left(\theta/2\right)d\theta=16$$

Área de la superficie en coordenadas polares

Área de la Superficie del Sólido de Revolución Polar

$$área = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} f(\theta) sen(\theta) \sqrt{\left[f(\theta)\right]^2 + \left[f'(\theta)\right]^2}\, d\theta \quad girando\ en\ "x"$$

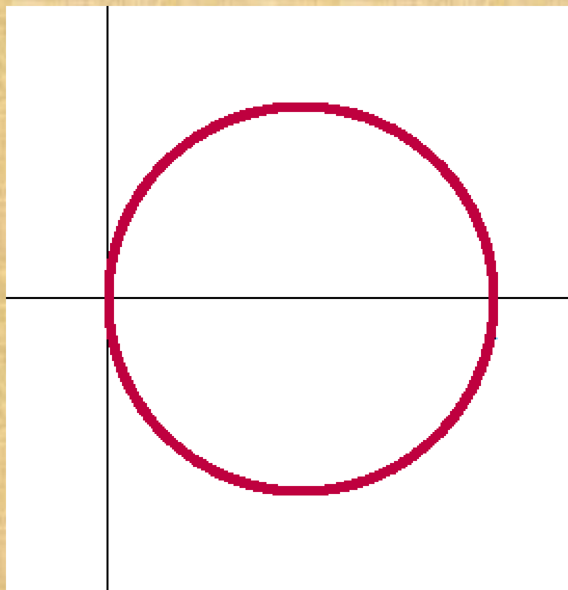
$$área = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} f(\theta) \cos(\theta) \sqrt{\left[f(\theta)\right]^2 + \left[f'(\theta)\right]^2}\, d\theta \quad girando\ en\ "y"$$

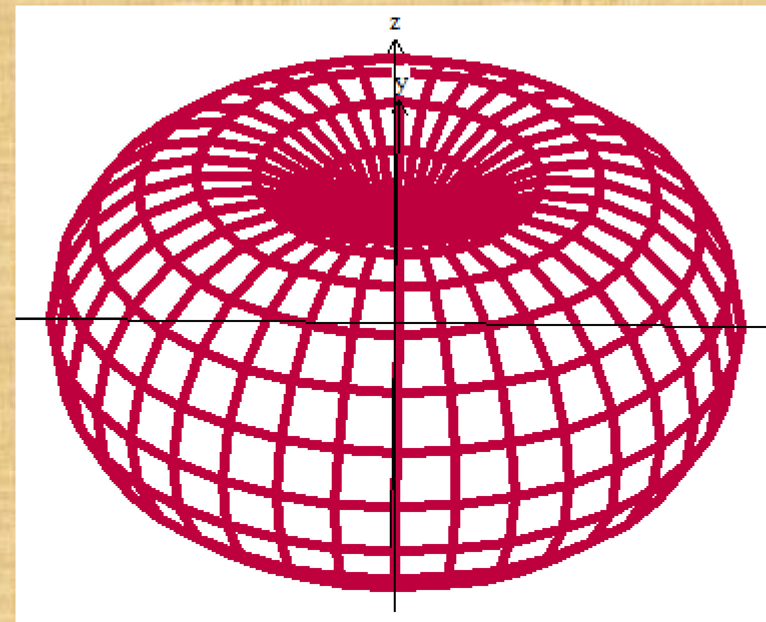
Ejemplo: Determinar el área de la superficie generada al hacer girar sobre el eje "y", la región polar de la función

$$r = f(\theta) = \cos(\theta) \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

22

Área de la Superficie del Sólido de Revolución Polar





$$área = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \cos(\theta)\cos(\theta)\sqrt{[\cos(\theta)]^2 + [sen(\theta)]^2}\, d\theta$$

$$área = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \cos^2(\theta) d\theta = \pi^2$$

23