Repaso de programación lineal de 1ºBachillerato

CURSO	TEMA	WWW.DANIPARTAL.NET
2ºBach CCSS	3. Programación lineal	Colegio Marista "La Inmaculada" de Granada

¿QUÉ ES UNA INECUACIÓN DE PRIMER GRADO Y UNA INCÓGNITA?

Una inecuación de primer grado y de una incógnita es una desigualdad matemática donde la única incógnita aparece elevada al exponente unidad.

Ejemplos de inecuaciones:

$$x + 2 < 3x + 4$$

$$\frac{-x+5}{6} \geq x + \frac{1}{2}$$

Importante: en este tipo de inecuaciones, la incógnita (por norma general x) nunca aparece en el denominador. Y nunca aparece elevada a exponente 2, 3, etc.

En ambos miembros de una inecuación podemos sumar o restar un mismo número real, y obtener así una inecuación equivalente (con la misma solución).

$$x + 2 < 3x + 4 \rightarrow equivalente \rightarrow x + 2 - \mathbf{2} < 3x + 4 - \mathbf{2}$$

En ambos miembros de una inecuación podemos multiplicar o dividir por un mismo número real positivo, y obtener una inecuación equivalente.

$$x + 2 < 3x + 4 \rightarrow equivalente \rightarrow 4 \cdot (x + 2) < 4 \cdot (3x + 4)$$

¡Ojo! **Si en ambos miembros de la inecuación multiplicamos o dividimos por un mismo número negativo, la inecuación cambia de sentido en la desigualdad**.

$$x + 2 < 3x + 4 \rightarrow cambio\ de\ sentido \rightarrow -2 \cdot (x + 2) > -2 \cdot (3x + 4)$$

¿CÓMO SE RESUELVE?

La solución de una ecuación de primer grado es un punto. Pero la solución de una inecuación de primer grado, por norma general, es un intervalo.

Para resolver, agrupamos a un lado los términos que dependen de la incógnita y al otro lado los términos independientes. Posteriormente, despejamos. Por ejemplo:

$$x + 2 < 3x + 4$$

$$x - 3x < 4 - 2$$

$$-2x < 2$$

$$Al\ dividir\ por\ (-2)\ hay\ cambio\ de\ sentido$$

$$x > \frac{2}{-2}$$

$$x > -1$$

$$Solución: x \in (-1, \infty)$$

¿QUÉ ES UNA INECUACIÓN LINEAL DE DOS INCÓGNITAS?

Una inecuación lineal con dos incógnitas es una desigualdad matemática donde las incógnitas aparecen elevadas al exponente unidad. Por ejemplo:

$$2x + y \leq 3$$

Las incógnitas nunca se multiplican entre sí, nunca aparecen en el denominador y nunca van elevados a exponente 2, 3, etc.

Al tener dos incógnitas, **la solución será la región del plano donde se cumpla la desigualdad** (dos dimensiones: eje horizontal OX, eje vertical OY) .

Nuestra solución, por lo general, no será un intervalo en la recta real ni un punto. La solución de una inecuación lineal de dos incógnitas es una zona del plano bidimensional.

RECTA ASOCIADA A UNA INECUACIÓN LINEAL DE DOS INCÓGNITAS

Si cambiamos la desigualdad por una igualdad estricta, tendremos una **recta**.

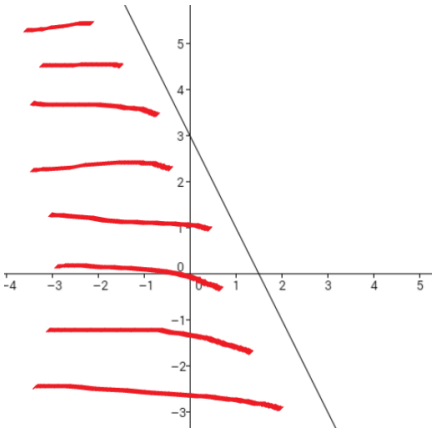
$$2x + y \leq 3 \rightarrow 2x + y = 3$$

Esta recta **divide al plano en dos trozos (semiplanos)**. Podemos representar la recta obteniendo dos puntos de la recta y uniéndolos por una línea.

$$x = 0 \rightarrow y = 3 \rightarrow Punto\ (0,3)$$

$$y = 1 \rightarrow x = 1 \rightarrow Punto\ (1,1)$$

Podemos obtener la región solución **eligiendo un punto arbitrario fuera de la recta y viendo si para ese punto se cumple la desigualdad**.



En la gráfica hemos representado la recta: $2x + y = 3$.

La recta divide al plano en dos secciones. Elegimos el punto $(0,0)$ y sustituimos en la inecuación.

$2x + y \leq 3 \rightarrow \text{Sustituir } (0,0) \rightarrow 0 \leq 3 \rightarrow$ **Verdadero**

Se cumple la desigualdad. La solución de la inecuación será el semiplano que contiene al punto $(0,0)$, incluido los valores que están sobre la recta porque la desigualdad contiene al signo igual (si la desigualdad fuese estricta, la recta no formaría parte de la solución).

Si la desigualdad no se hubiese cumplido, la solución sería el semiplano que no contuviera al punto (0,0) que hemos evaluado.

¿CÓMO RESOLVER UN SISTEMA DE INECUACIONES LINEALES?

Si en vez de una inecuación, tenemos dos, tres, etc. la solución del sistema de inecuaciones será la intersección formada en el plano por las soluciones particulares de cada inecuación individual.

Podemos resumir el proceso de solución de sistemas de inecuaciones lineales de la siguiente forma:

1. Transformamos la primera inecuación del sistema en una igualdad, obteniendo una recta.

- Pintamos en el plano la recta, dando dos valores a la variable independiente y obteniendo los correspondientes valores de la variable dependiente.
- La recta divide al plano en dos zonas. Tomamos un punto arbitrario en alguna de las dos zonas y evaluamos ese punto en la inecuación. Si se cumple la desigualdad, la solución es el semiplano que contiene al punto. En caso contrario, la solución será el otro semiplano.
- Si la desigualdad incluye el signo igual, los puntos que pertenecen a la recta también serán solución. En caso contrario, los puntos de la recta no son solución.

2. Repetir los pasos del apartado 1 para cada una de las inecuaciones del sistema.

3. La solución final del sistema será la intersección de las regiones solución de cada inecuación. A esta región solución se le denomina **región factible**.

EJEMPLO RESUELTO

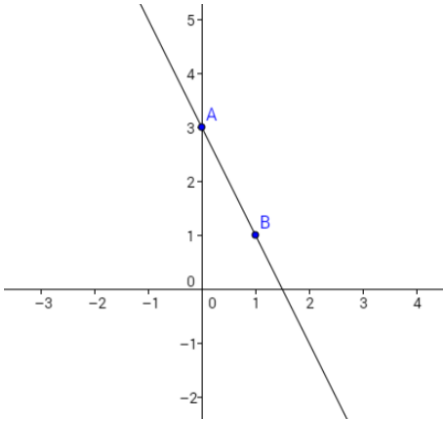
Resolver $\begin{Bmatrix} 2x+y \leq 3 \\ x-y>5 \end{Bmatrix}$

Tomamos la primera inecuación y representamos su recta asociada:

$2x+y=3$

Si $x=0 \rightarrow y=3 \rightarrow (0,3)$

Si $x=1 \rightarrow y=1 \rightarrow (1,1)$



Con estos dos puntos ya podemos representar la recta.

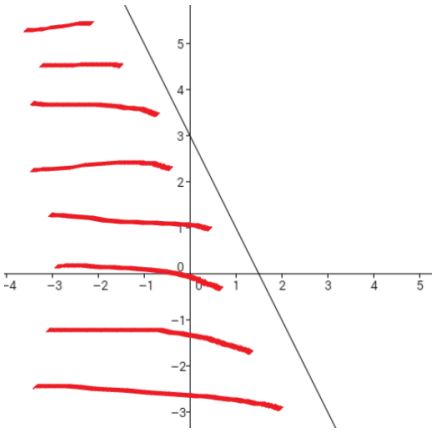
Tomamos el punto $(0,0)$, que ha quedado en el semiplano situado a la izquierda de la recta.

Al evaluar la inecuación en ese punto, obtenemos:

$2x+y \leq 3 \rightarrow \text{Sustituir } (0,0) \rightarrow 0 \leq 3 \rightarrow$ **Verdadero**

La desigualdad se cumple.

El semiplano que contiene al punto $(0,0)$ es solución junto a los puntos de la recta (ya que la desigualdad incluye el signo igual).

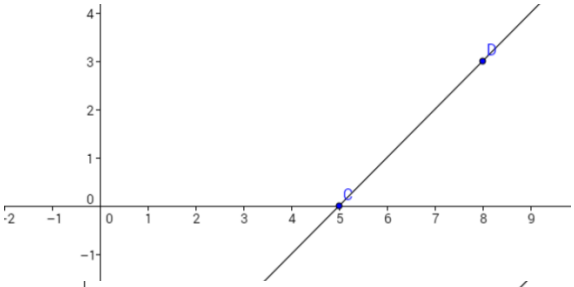


Repetimos el razonamiento con la recta asociada a la segunda inecuación:

$x-y=5$

Si $x=5 \rightarrow y=0 \rightarrow (5,0)$

Si $x=8 \rightarrow y=3 \rightarrow (8,3)$

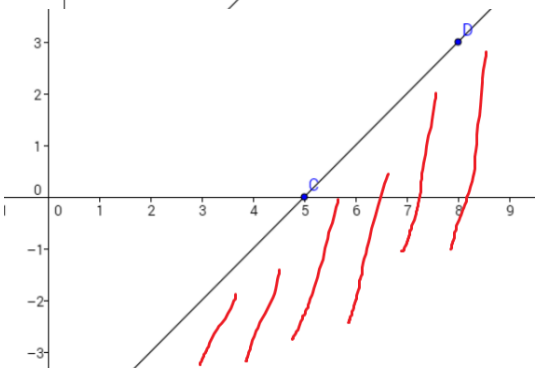


Elegimos nuevamente el punto$(0,0)$ por facilidad en los cálculos (y porque no pertenece a la recta asociada a la segunda inecuación).

Evaluamos la inecuación en ese punto:

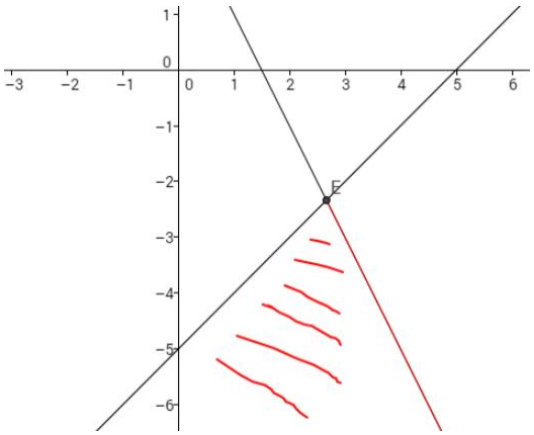
$x-y>5 \rightarrow \text{Sustituir } (0,0) \rightarrow 0>5 \rightarrow$ **Falso**

La desigualdad no se cumple. Por lo tanto, el semiplano que contiene al punto $(0,0)$ no es solución. Los puntos de la recta tampoco serán solución, porque la desigualdad no contiene el signo igual.



La solución final del sistema de inecuaciones será la intersección de ambas soluciones particulares. **La semirrecta en rojo de la imagen final indica que esa semirrecta también pertenece a la solución**.

El punto E será el vértice del área solución. Sus coordenadas indican la intersección de las dos rectas. Por lo que se obtiene como solución del sistema de ecuaciones formado por las dos rectas.



$\left.\begin{matrix} 2x+y=3 \\ x-y=5 \end{matrix}\right\} \rightarrow E(\frac{8}{3},\frac{-7}{3}) \rightarrow$ Solución del sistema

Las coordenadas del vértice E cumple la primera inecuación:

$$2x+y \leq 3$$

Pero las coordenadas de E no cumplen la segunda inecuación:

$$x-y>5$$

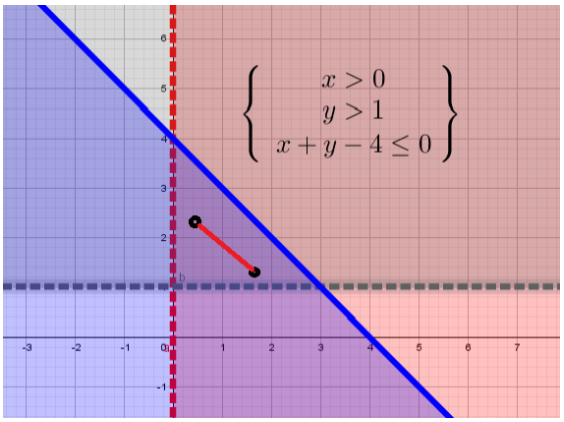
Por lo tanto, el vértice $E(\frac{8}{3},\frac{-7}{3})$ no pertenece a la región factible.

REGIÓN FACTIBLE, SOLUCIÓN ACOTADA Y CONJUNTO CONVEXO

La región del plano delimitada por la solución general de un sistema de inecuaciones lineales de dos incógnitas se llama **región factible**. Todos los puntos (x, y) de la región factible cumplen todos los requisitos de las inecuaciones del sistema.

Cada punto de la región factible es una solución particular. Mientras que **toda la región factible se llama solución general**.

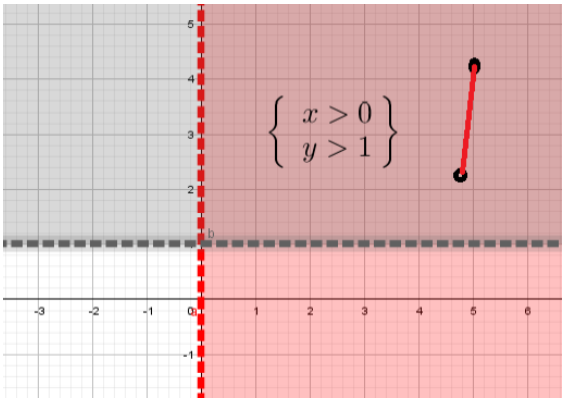
Si ningún punto del plano satisface todas las inecuaciones, diremos que el sistema de inecuaciones no tiene solución. Si la región factible está encerrada por un polígono, diremos que la solución está **acotada**.



El triángulo de la figura de la derecha forma la región factible solución de un sistema de tres inecuaciones lineales. Los lados rojos y negros van discontinuos porque las inecuaciones asociadas a esos lados son estrictas. El lado azul es continuo porque la desigualdad asociada a ese lado lleva el signo igual.

Como toda la región factible está acotada por el triángulo, diremos que la solución general está acotada. El segmento que une dos puntos cualesquiera de la región queda dentro de la región factible, por lo que el triángulo genera un **conjunto convexo**.

Si la región factible no está encerrada por un polígono, diremos que la solución **no está acotada**. En este caso, la región solución se extiende hasta el infinito.



La solución del sistema de dos inecuaciones lineales de la derecha no está totalmente delimitada por los lados de un polígono. Diremos que la solución no está acotada. Las rectas roja y negra van en trazo discontinuo porque no pertenecen a la solución, ya que sus inecuaciones asociadas son estrictas.

Nuevamente, el segmento que une dos puntos cualesquiera de la región factible queda dentro de dicha región, por lo que la región factible es un conjunto convexo.

La recta que forma un lado que delimita la solución es continua si la inecuación asociada a ese lado contiene el signo igual. En ese caso, el lado pertenece a la solución.

Si la desigualdad es estricta, la recta se dibuja con trazo discontinuo y ese lado no pertenece a la solución.

Los puntos solución de la región factible forman un **conjunto convexo** si, al unir dos puntos cualesquiera de dicha región, el segmento que los une siempre queda dentro del propio conjunto

FUNCIÓN OBJETIVO. TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL

Cada inecuación de un sistema de inecuaciones lineales es una restricción que deben cumplir los puntos del plano.

Todas las inecuaciones forman el conjunto completo de restricciones.

Una **función objetivo de dos variables** es una función lineal del tipo:

$$f(x, y) = a\,x + b\,y + c$$

Donde a, b, c son números reales y donde las variables x, y están delimitadas por las restricciones de un sistema de inecuaciones lineales. Las variables solo pueden tomar los valores permitidos por la región factible solución del sistema de inecuaciones.

En determinados problemas relacionados con la economía y las ciencias sociales, es interesante obtener el valor más grande posible (máximo) o más pequeño posible (mínimo) que puede tomar la función objetivo $f(x, y)$ en aquellos puntos (x, y) que cumplen las restricciones del sistema de inecuaciones. Es lo que se conoce como **solución óptima de la función objetivo**. Obtener esta solución óptima genera los problemas conocidos como **programación lineal**.

El **Teorema fundamental de la programación lineal afirma que, en una función objetivo $f(x, y)$ de dos variables delimitada por un conjunto convexo, si existe una solución particular que optimice la imagen de la función objetivo, esta solución se encuentra en un vértice de la región factible o en el segmento que une dos vértices (llamado lado).**

El valor que optimiza a la función objetivo nunca se encuentra en el interior de dicha región factible.

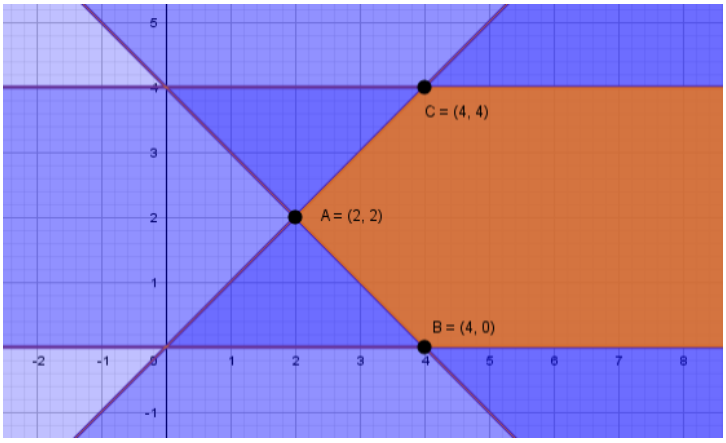
A este teorema podemos añadir tres afirmaciones:

- Si la **región factible es acotada**, el problema de programación lineal **siempre tiene solución**.
- Si **dos vértices optimizan la función objetivo** con el mismo valor, **todos los puntos del segmento que une a dichos vértices también optimizan a la función**. En este caso, habría infinitos puntos solución al problema de programación lineal.
- Si la **región factible no está acotada**, **no siempre será posible encontrar el máximo y/o el mínimo**. **Pero si existen, se encontrarán en al menos uno de los vértices de la región**.

  ¡Ojo! Si, por ejemplo, dos vértices conectados por un lado maximizan la función, todos los puntos de ese lado serán solución del problema de optimización.

  Si un vértice que optimiza la función forma parte de un lado infinitamente largo (al ser región no acotada), debemos tomar un punto arbitrario de ese lado, evaluar la función objetivo y comprobar numéricamente si ese punto también optimiza la función objetivo al mismo valor que lo hace el vértice. Si lo hace, todos los puntos del lado infinito optimizan la función objetivo.

La región factible de la derecha no está acotada. Es un conjunto convexo, pero no está acotado porque por un lado la región se expande hasta el infinito. **Supongamos que deseamos minimizar una función objetivo en esta región factible**.



Para ello, sustituimos en la función $f(x, y)$ las coordenadas de cada vértice A, B y C. Los posibles casos que pueden ocurrir son:

La imagen más pequeña acontezca solo en A → el punto A minimiza la función.

La imagen más pequeña acontezca solo en B → el punto B minimiza la función.

La imagen más pequeña acontezca solo en C → el punto C minimiza la función.

La imagen más pequeña coincida en A y B → todos los puntos del segmento AB son mínimos.

La imagen más pequeña coincida en A y C → todos los puntos del segmento AC son solución.

¡Ojo! Si la imagen más pequeña ocurre en B y al coger otro punto del lado que va desde B hacia la derecha, ese punto genera la misma imagen que B, entonces todos los puntos del lado infinito a la derecha de B son solución del problema de minimización.

¡Ojo! Si La imagen más pequeña ocurre en C y al coger otro punto del lado que va desde C hacia la derecha, ese punto genera la misma imagen que C, entonces todos los puntos del lado infinito a la derecha de C minimizan la función.

¡Ojo! Si la imagen más pequeña entre los vértices ocurre en B y al coger otro punto del lado que va desde B hacia la derecha, ese punto genera una imagen aún más pequeña que la imagen de la función B, no hay solución al problema de minimización.

¡Ojo! Si la imagen más pequeña entre los vértices ocurre en C y al coger otro punto del lado que va desde C hacia la derecha, ese punto genera una imagen aún más pequeña que la imagen de la función C, no hay solución al problema de minimización.

En Selectividad Matemáticas CCSS la inmensa mayoría de ejercicios sobre programación lineal son sobre regiones factibles acotadas. Esto simplifica mucho los cálculos, ya que basta con obtener la imagen de la función en cada uno de los vértices para decidir si hay máximo o mínimo.

EJEMPLO RESUELTO SOBRE PROBLEMA DE CONTEXTO DE PROGRAMACIÓN LINEAL

Para resolver ejercicios de enunciado sobre programación lineal:

1. Detectar del enunciado las variables y formar la función objetivo. Son muy típicas las funciones objetivos de ganancia máxima o de coste mínimo.
2. Escribir las restricciones que marca el enunciado en forma de inecuación, formando así un sistema de inecuaciones lineales.
3. Obtener la región factible del sistema. Es decir, resolver gráficamente el sistema de inecuaciones, calculando las coordenadas de los vértices que forman la región factible e indicando claramente si los lados de la región factible pertenecen o no a la solución final.
4. Evaluar la función en las coordenadas de los vértices y decidir si aparecen máximos o mínimos, comparando las imágenes obtenidas y nombrando el Teorema fundamental de la programación lineal. Recuerda que, si el punto óptimo aparece en dos vértices, todos los puntos del segmento que une esos vértices son puntos óptimos.

Sea la función objetivo a maximizar: $f(x,y) = 5x + 4y$

Y sean las restricciones marcadas por el sistema de inecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{c} 2x+y\leq 1000 \\ 2x+3y\leq 1500 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

Obtener la región factible y obtener valores que optimizan a la función objetivo.

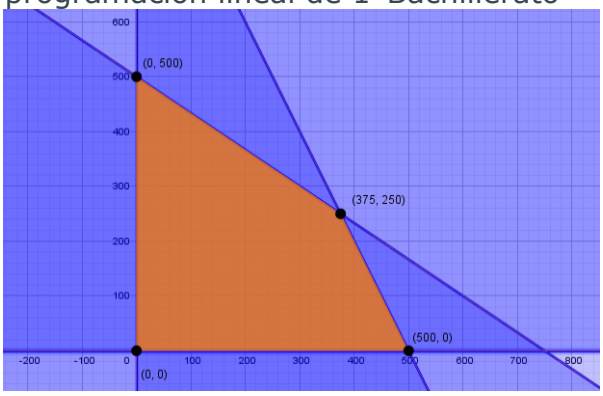
Tenemos cuatro inecuaciones. Obtenemos gráficamente la región factible, indicando claramente los vértices y si los lados pertenecen o no a la solución general.

Cada inecuación posee una recta asociada. Ya sabemos dibujar rectas: con dos puntos es suficiente. Y hemos estudiado cómo resolver gráficamente cada una de las inecuaciones lineales.

Los vértices de la región factible se obtienen planteando sistemas 2x2 con las dos rectas que forman el vértice.

Los lados de la región factible se dibujan continuos si pertenecen a la solución, y eso ocurre cuando aparece el signo igual en la desigualdad.

La región factible de la imagen de la derecha es acotada. Forma un conjunto conexo. Además, los cuatro lados pertenecen a la solución.



Por el Teorema fundamental de la programación lineal podemos afirmar que, al tener una región factible acotada, el máximo y el mínimo aparecen en vértices de la región factible.

Evaluamos la función objetivo $f(x,y) = 5x + 4y$ en los cuatro vértices.

$$f(0,0) = 0 + 0 = 0$$

$$f(0,500) = 0 + 4 \cdot 500 = 2.000$$

$$f(375,250) = 5 \cdot 375 + 4 \cdot 250 = 2.875$$

$$f(500,0) = 5 \cdot 500 + 0 = 2.500$$

Conclusiones:

- El punto (375, 250) maximiza la función objetivo con una imagen igual a 2.875.
- El punto (0,0) minimiza la función objetivo con una imagen igual a 0.