

Instrucciones:

a) Duración: 1 hora

b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**. Indica, en la primera hoja donde resuelves el examen, la opción elegida.

c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.

d) Contesta de forma razonada y escribe a bolígrafo (no a lápiz) ordenadamente y con letra clara. Las faltas de ortografía, la mala presentación y no explicar adecuadamente las operaciones pueden restar hasta un máximo de 1 punto de la nota final.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Opción A

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Determinar a y b para que la función sea continua en $x=1$ y su gráfica pase por el origen de coordenadas.

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - ax + b & \text{si } x < 1 \\ \frac{\ln(x) - 1}{2x + 1 - e^{2x}} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Ejercicio 2.- a) [1,5 puntos] ¿Es cierto que la ecuación $x^5 - 3x = 1$ tiene al menos una solución en el intervalo $[1, 2]$? Razona tu respuesta.

b) [1 punto] La función $f(x) = \frac{|x|}{x+1}$ tiene dos asíntotas horizontales distintas. Calcúlalas.

Ejercicio 3.- Sea $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

a) [2 puntos] Obtener todas sus asíntotas (ayuda: en las A.H. y en las A.O. debes estudiar comportamiento de x en $+\infty$ y en $-\infty$).

b) [0,5 puntos] Estudia la posición relativa de la función respecto su asíntota oblicua cuando x tiende a $+\infty$.

Ejercicio 4.- a) [1,5 puntos] Estudia la continuidad de $f(x) = 2 - |\ln(x)|$ y representa gráficamente la función.

b) [1 punto] Sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - k \cdot \sin(x)}{x^2}$ es finito, obtener el valor de k y el valor del límite.

Opción B

Ejercicio 1.- Sea $f(x) = \frac{x^3 + 2x}{x^2 - 2x + 3}$

a) [1,5 puntos] Obtener todas sus asíntotas.

b) [1 punto] ¿Corta la función a su asíntota oblicua en algún punto? En caso afirmativo, obtener las coordenadas (x, y) del punto de corte.

Ejercicio 2.- [2,5 puntos] Considera las funciones $f(x)$ y $g(x)$ definidas en $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y dadas por $f(x) = 6x - x^2$ y $g(x) = |x^2 - 2x|$. Haz un boceto del recinto limitado por las gráficas de ambas funciones y calcula los puntos de corte de dichas gráficas (abscisas y su ordenada).

Ejercicio 3.- a) [1,5 puntos] Calcula $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{(\pi - 2x)^2}$

b) [1 punto] La función $f(x) = \sin(x)$ con dominio en toda la recta real no admite inversa. Pero si la definimos en el dominio $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sí admite inversa. Explica estas dos afirmaciones de manera razonada.

Ejercicio 4.- a) [1,5 puntos] Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(2x))^{\frac{3}{x^2}}$

b) [1 punto] Determinar, de manera razonada, el dominio de $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 4} - \ln(x)$