

Limiet van rijen en reeksen

www.karelappeltans.be

March 5, 2024

Contents

1	Het begrip rij	2
1.1	Voorbeelden	2
1.2	algemene notaties	2
1.3	expliciet versus recursief voorschrift bij willekeurige rijen	2
1.4	RR en MR	3
1.5	Oefeningen	3
2	Limiet van een rij met expliciet voorschrift	5
2.1	eindige limiet	5
2.1.1	m.b.v. definitie	5
2.1.2	m.b.v. rekenregels	6
2.2	oneindige limiet	7
2.2.1	m.b.v. definitie	7
2.2.2	m.b.v. rekenregels	7
3	limiet van een rij met lineair recursief voorschrift	9
3.1	grafisch en algebraïsche oplossing	9
3.2	oefeningen	9
4	Algemene technieken	10
4.1	insluitstelling	10
4.2	stijgende en dalende rijen	10
5	Limiet van een reeks	10
5.1	Sommatieteken	10
5.2	Som van een Rekenkundige en Meetkundige rij	11
5.2.1	Som RR	11
5.2.2	Som MR	11
5.3	Kan een reeks convergeren?	12
5.3.1	RR	12
5.3.2	MR	12
5.4	paradox van Zeno	13
5.5	oefeningen	13
6	taken	17

1 Het begrip rij

1.1 Voorbeelden

- 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...
- 2, 5, 8, 11, 14, 17, ...
- 3, 9, 27, 81, ...
- $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$
- 8, 17, -13, 22, ...
- $0, \frac{3}{4}, \frac{8}{9}, \frac{15}{16}, \dots$
- 2, 4, 8, 16, ...
- 2, 4, 8, 16, ...
- 2, 3, 5, 7, 11, ...
- 24, -12, 6, -3, ...

1.2 algemene notaties

1.3 expliciet versus recursief voorschrift bij willekeurige rijen

Expliciet voorschrift zoeken

$$1 \quad \frac{4}{3} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{8}{5} \quad \frac{5}{3} \quad \frac{12}{7} \quad \frac{7}{4} \quad \frac{16}{9} \quad \frac{9}{5} \quad \frac{20}{11}$$

Een expliciet voorschrift is in functie van de plaats in de rij.
Daarom handig om de plaats in de rij ook te noteren.

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & \frac{4}{3} & \frac{3}{2} & \frac{8}{5} & \frac{5}{3} & \frac{12}{7} & \frac{7}{4} & \frac{16}{9} & \frac{9}{5} & \frac{20}{11} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{9} & \mathbf{10} \end{array}$$

Bekijk T en N apart, kijk of er vereenvoudigde breuken tussen staan

$$\begin{array}{cccccccccc} \frac{2}{2} & \frac{4}{3} & \frac{6}{3} & \frac{8}{4} & \frac{10}{5} & \frac{12}{6} & \frac{14}{7} & \frac{16}{8} & \frac{18}{9} & \frac{20}{10} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{9} & \mathbf{10} \end{array}$$
$$u_n = \frac{2n}{n+1}$$

Figure 1: <https://www.geogebra.org/m/b9dwqbfj>

Recursief voorschrift

een voorschrift in functie van de vorige term(en)

vb1: $5 \quad 8 \quad 11 \quad 14 \quad 17 \quad 20 \quad 23 \quad 26 \quad 29 \quad 32$
 $t_1 \quad t_2 \quad t_3 \quad t_4 \quad t_5 \quad t_6 \quad t_7 \quad t_8 \quad t_9 \quad t_{10}$

$t_2 = t_1 + 3$
 $t_3 = t_2 + 3$
 $t_4 = t_3 + 3$
 $t_5 = t_4 + 3$
 $t_6 = t_5 + 3$
 $t_7 = t_6 + 3$
 $t_8 = t_7 + 3$
 $t_9 = t_8 + 3$
 $t_{10} = t_9 + 3$

$$t_n = t_{n-1} + 3$$

Maar dit is niet voldoende als voorschrift!!
 Je moet ook nog een startterm geven!

$$t_n = t_{n-1} + 3 \text{ met } t_1 = 5$$

vb2: $1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \quad 13 \quad 21 \quad 34 \quad 55$
 $t_1 \quad t_2 \quad t_3 \quad t_4 \quad t_5 \quad t_6 \quad t_7 \quad t_8 \quad t_9 \quad t_{10}$

$t_3 = t_2 + t_1$
 $t_4 = t_3 + t_2$
 $t_5 = t_4 + t_3$
 $t_6 = t_5 + t_4$
 $t_7 = t_6 + t_5$
 $t_8 = t_7 + t_6$
 $t_9 = t_8 + t_7$
 $t_{10} = t_9 + t_8$

$$t_n = t_{n-1} + t_{n-2}$$

Maar dit is niet voldoende als voorschrift!!
 Je moet ook (hier) nog twee starttermen geven!

$$t_n = t_{n-1} + t_{n-2} \text{ met } t_1 = 1 \text{ en } t_2 = 1$$

Figure 2: <https://www.geogebra.org/m/b9dwqbfj>

1.4 RR en MR

Rekenkundige rij:

Voorbeeld:



$t_1 \quad t_2 \quad t_3 \quad t_4 \quad t_5 \quad t_6 \quad t_7 \quad t_8 \quad t_9 \quad t_{10}$
 $5 \quad 8 \quad 11 \quad 14 \quad 17 \quad 20 \quad 23 \quad 26 \quad 29 \quad 32$

Wat valt op:



verschil : $v = t_2 - t_1 = 8 - 5 = 3$
 of $t_2 = t_1 + 3$

recursieve formule

$$t_n = t_{n-1} + v, \text{ met start } t_1$$

expliciete voorschrift



$t_1 \quad t_2 \quad t_3 \quad t_4 \quad t_5 \quad t_6 \quad t_7 \quad t_8 \quad t_9 \quad t_{10}$
 $5 \quad 8 \quad 11 \quad 14 \quad 17 \quad 20 \quad 23 \quad 26 \quad 29 \quad 32$

$t_7 = t_1 + (7-1) \cdot 3$
 $23 = 5 + (6) \cdot 3$

expliciete formules

$$t_n = t_1 + (n-1)v$$

$$t_n = t_p + (n-p)v$$

Figure 3: <https://www.geogebra.org/m/utbsf4p6>

Meetkundige rij:

Voorbeeld:



$t_1 \quad t_2 \quad t_3 \quad t_4 \quad t_5 \quad t_6 \quad t_7 \quad t_8 \quad t_9 \quad t_{10}$
 $2 \quad 6 \quad 18 \quad 54 \quad 162 \quad 486 \quad 1458 \quad 4374 \quad 13122 \quad 39366$

Wat valt op:



quotiënt : $q = \frac{t_5}{t_4} = \frac{162}{54} = 3$ of $t_5 = t_4 \cdot 3$



$t_1 \quad t_2 \quad t_3 \quad t_4 \quad t_5 \quad t_6 \quad t_7 \quad t_8 \quad t_9 \quad t_{10}$
 $2 \quad 6 \quad 18 \quad 54 \quad 162 \quad 486 \quad 1458 \quad 4374 \quad 13122 \quad 39366$

$t_5 = t_3 \cdot 3^{(5-3)}$
 $162 = 18 \cdot 3^2$

toon formule

recursieve formule :

$$t_n = t_{n-1} \cdot q \text{ met start } t_1$$

toon formules

Expliciete formules :

$$t_n = t_1 \cdot q^{n-1}$$

$$t_n = t_p \cdot q^{n-p}$$

Figure 4: <https://www.geogebra.org/m/fbuwskxx>

1.5 Oefeningen

- Geef voor de volgende rijen telkens de twee eerstvolgende termen. Bepaal, indien mogelijk, een recursief en expliciet voorschrift

- 4, 7, 10, 13, ...
 - -2, 6, -18, 54, ...
 - $\frac{1}{3}, 1, 3, 9, \dots$
 - $\sqrt{3}, -\sqrt{6}, 2\sqrt{3}, -2\sqrt{6}, \dots$
 - $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{4}{17}, \dots$
 - $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \dots$
 - 2, 1, $\frac{8}{9}, 1, \frac{32}{25}, \dots$
2. Bereken de eerste 3 volgende termen van de rijen gedefinieerd door onderstaand recursief voorschrift:
- (a) De rij van Göbel: $x_0 = 1$ en $x_n = \frac{1+x_0^2+x_1^2+\dots+x_{n-1}^2}{n}$
- (b) De rij van Somos: $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$ en $x_n = \frac{x_{n-1} \cdot x_{n-4} + x_{n-2} \cdot x_{n-3}}{x_{n-5}}$
3. Los op:

1. An arithmetic sequence begins 5, -3, -11, -19, -27, ...
Calculate t_{20} , the 20th term.

$t_{20} =$

Figure 5: <https://www.geogebra.org/m/utbsf4p6>

4. Los op:

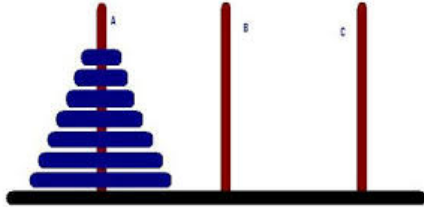
1. A geometric sequence begins 192, -96, 48, ...
Calculate t_9 , the 9th term.

$t_9 =$

Figure 6: <https://www.geogebra.org/m/fbuwskkx>

5. in een RR is de derde term gelijk aan -3 en de zesde term gelijk aan -15. Bepaal het verschil en de eerste term.
6. De termen van de rij u_n voldoen aan $u_1 = \frac{1}{3}$ en $3u_{n+1} - 6u_n - 1 = 0$
- (a) Toon aan dat de rij $u_n + \frac{1}{3}$ een MR is
- (b) Bepaal een expliciet voorschrift van deze MR

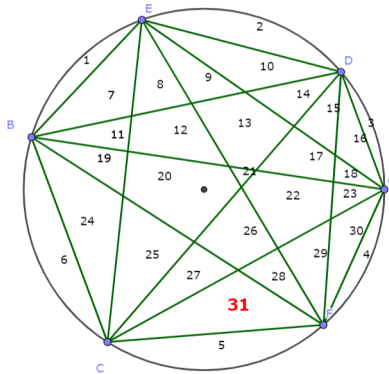
7. Gegeven is de RR $u_n : 3, 1, -1, \dots$ en de MR $v_n : 32, 16, 8, \dots$. Bepaal een expliciet voorschrift van de rij $w_n = u_n + v_n$. (A: $w_n = 5 - 2n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-6}$)
8. De 2de, 8ste en 44ste term van een RR (met $u_1 = 1$ en v positief) vormen een MR. Bepaal de waarde van v . (antw. $v = 5$)
9. De 3de term van een MR is $\frac{81}{64}$ en de 5de term $\frac{729}{1024}$. Bepaal de 1ste term en het quotiënt.
10. Torens van Hanoi



Geef een expliciet en een recursief voorschrift voor het aantal stappen

11. rij 2, 4, 8, 16, 31, ...

—————● b = 6



Expliciet voorschrift

$$t_n = \frac{1}{24} (n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24)$$

1 2 4 8 16 31 57 99 163 256

Figure 7: <https://www.geogebra.org/m/dggrsvv>

2 Limiet van een rij met expliciet voorschrift

2.1 eindige limiet

2.1.1 m.b.v. definitie

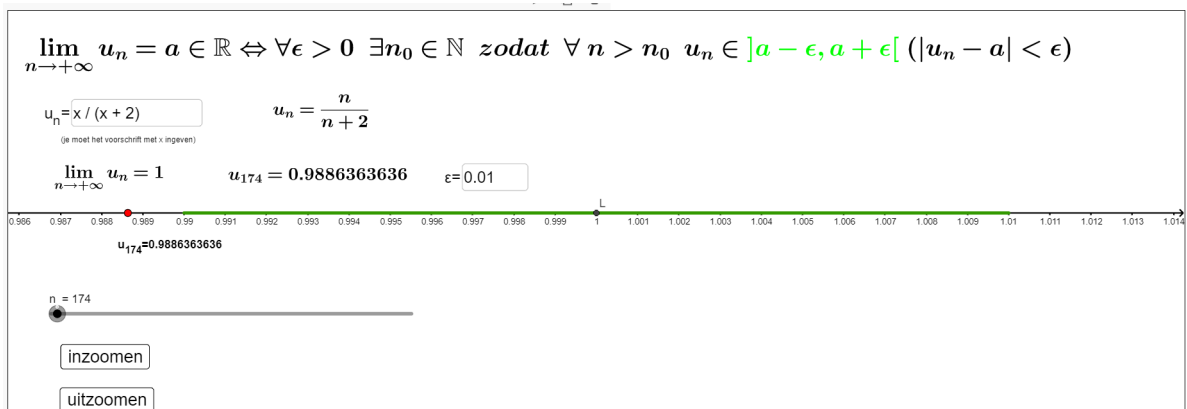


Figure 8: <https://www.geogebra.org/m/ESeUy7pn>

Oefeningen

1. $t_n : 1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$
2. $t_n = \frac{2n+100}{n}$
3. $t_n = \frac{-3n+4}{n+2}$
4. $t_n = 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$
5. $t_n = \frac{6n+500}{-2n+156}$
6. $t_n = \frac{2n+8000}{n}$ Is $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 3$?

2.1.2 m.b.v. rekenregels

Stelling 1:

Als $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$ en $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = l'$ dan

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n + v_n = l + l'$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \cdot v_n = l \cdot l'$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} k \cdot u_n = k \cdot l$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{l}{l'}$ als $v_n \neq 0$ en $l' \neq 0$

Bewijs van 1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l \Leftrightarrow \forall \frac{\epsilon}{2} > 0 \quad \exists n_1 \in \mathbb{N}_0 \quad \text{zodat} \quad \forall n > n_1 \quad u_n \in]l - \epsilon, l + \epsilon[\quad \text{of} \quad l - \frac{\epsilon}{2} < u_n < l + \frac{\epsilon}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = l' \Leftrightarrow \forall \frac{\epsilon}{2} > 0 \quad \exists n_2 \in \mathbb{N}_0 \quad \text{zodat} \quad \forall n > n_2 \quad v_n \in]l' - \epsilon, l' + \epsilon[\quad \text{of} \quad l' - \frac{\epsilon}{2} < v_n < l' + \frac{\epsilon}{2}$$

Neem nu $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ dan geldt voor alle $n > n_0$:

$$l + l' - \epsilon < u_n + v_n < l + l' + \epsilon$$

Wat de definitie is van $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n + v_n = l + l'$

Stelling 2:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 0, \quad p \in \mathbb{Q}_0^+$$

Toepassen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-3}{2n+1}$$

Oefeningen

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+2n}{5n^4-n^2}$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}-1}{2\sqrt{n}+11}$

Stelling 3: Een eindige limiet van een rij is uniek

TB: De eindige limiet van een rij is uniek

Bewijs uit het ongerijmde

Veronderstel dat er toch twee limieten bestaan:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a \text{ en } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = b$$

De definitie van limiet geeft dan:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}, \text{ zodat } \forall n > n_1 \text{ geldt: } a - \epsilon < u_n < a + \epsilon$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = b \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_2 \in \mathbb{N}, \text{ zodat } \forall n > n_2 \text{ geldt: } b - \epsilon < u_n < b + \epsilon$$

Kies nu: $\epsilon < \frac{|b-a|}{2}$ Dit is de dus minder dan de helft van de afstand tussen a en b

Het moet gelden voor alle $\epsilon > 0$, dus ook voor deze waarde, deze keuze heeft als gevolg dat er geen overlap in de omgevingen

Kies nu: $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, dan geldt $\forall n > n_0$ dat u_n in beide intervallen moet liggen

Dat kan niet: Een getal kan maar op één plaats op de getallenas liggen.
Dus de veronderstelling is fout.. Dus er bestaat maar één limiet

Figure 9: <https://www.geogebra.org/m/ESeUy7pn>

2.2 oneindige limiet

2.2.1 m.b.v. definitie

voorbeelden

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} -3n + 5$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} 4^n$

Definitie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty \Leftrightarrow \forall r > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \quad \text{zodat} \quad \forall n > n_0 \quad u_n > r$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \forall r > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \quad \text{zodat} \quad \forall n > n_0 \quad u_n < -r$$

2.2.2 m.b.v. rekenregels

som: $u_n + v_n$

		$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$	
		$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$	$+\infty$	$+\infty$	/
	$-\infty$	/	$-\infty$
	l	$+\infty$	$-\infty$

product: $u_n \cdot v_n$

		$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$	
		$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
	0	/	/
	$l, l > 0$	$+\infty$	$-\infty$
	$l, l < 0$	$-\infty$	$+\infty$

omgekeerde: $\frac{1}{u_n}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{u_n}$
$+\infty$	0
$-\infty$	0
$l, l \neq 0$	$\frac{1}{l}$
0_+	$+\infty$
0_-	$-\infty$

quotient $\frac{u_n}{v_n}$

		$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$				
		$+\infty$	$-\infty$	0_+	0_-	$l', l' \neq 0$
$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$	$+\infty$	/	/	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
	$-\infty$	/	/	$-\infty$	$+\infty$	$\pm\infty$
	0	0	0	/	/	0
	$l, l > 0$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$\frac{l}{l'}$
	$l, l < 0$	0	0	$-\infty$	$+\infty$	$\frac{l}{l'}$

oefeningen

1. Bewijs: $+\infty + \infty = +\infty$
2. Verklaar $(+\infty) + (-\infty)$ is een onbepaalde vorm
3. Verklaar $\frac{+\infty}{-\infty}$ is een onbepaalde vorm
4. Toon aan m.b.v. de rekenregels

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 - n = +\infty$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 + 5n - 7}{2n^3 + 1} = \frac{3}{2}$

5. Bereken m.b.v. de rekenregels:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^5 - n^4 + n^7$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\frac{1}{2})^n}{(\frac{1}{3})^{n+1}}$

3 limiet van een rij met lineair recursief voorschrift

3.1 grafisch en algebraïsche oplossing

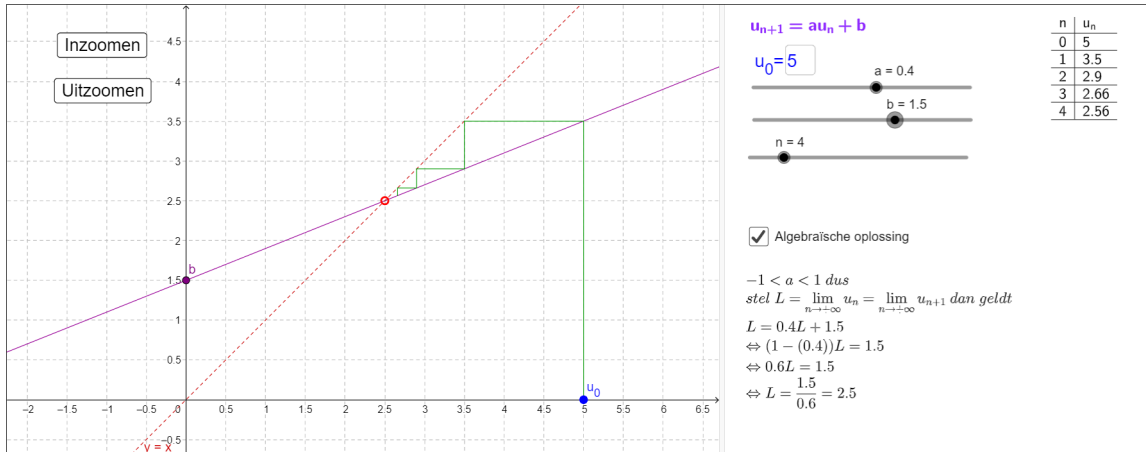


Figure 10: <https://www.geogebra.org/m/rxceutzj>

3.2 oefeningen

- LV Appeltans Boomteelt heeft een perceel bomen. Elk jaar wordt 20% gerooid en worden er 1000 nieuwe boompjes geplant. Het eerste jaar worden er 4000 boompjes geplant. Op lange termijn bekeken, hoeveel bomen bevinden zich er op het perceel?
- Mijn schoonvader gaat op consultatie bij dr. Bart Appeltans voor een ontstoken galblaas. Er moet onmiddellijk met medicatie begonnen worden: eerst een dosis van 50 mg en vervolgens elke drie uur een dosis van 25 mg. Het lichaam zal dit medicament ook afbreken: elke drie uur wordt 40% afgebroken. Het medicament is pas effectief als op lange termijn meer dan 60 mg. in het lichaam aanwezig blijft.
 - Zal de voorgeschreven dosis volstaan?
 - Welke begindosis moet er minimaal voorgeschreven worden om de 60 mg- grens te halen?
 - Welke hoeveelheid moet er minimaal om de drie uur gegeven worden om de 60 mg- grens te halen?
 - Wat is het maximale afbraak-% om de 60 mg- grens te behouden?
- Sinds enkele jaren mag er van president Poetin geen Limburgs fruit meer ingevoerd worden in Rusland. Belorta fruitveilingen en zijn CEO, P.Appeltans, hebben echter een smokkelroute opgezet. In een pakhuis wordt al het fruit verzameld. Helaas wordt per dag 60% onderschept door de Russische douane. Hoeveel ton fruit bevat op termijn het pakhuis, als elke dag 1500 kg vertrekt en de eerste lading niet onderschept wordt. Geef een grafische en algebraïsche oplossing.
- Gegeven is volgende rij met recursief voorschrift $u_{n+2} = \frac{u_n + u_{n+1}}{2}$ met $u_1 = 0$ en $u_2 = 1$
 - Geef de eerste 4 termen van deze rij.
 - Geef een recursief voorschrift van de vorm $u_{n+1} = a \cdot u_n + b$ voor deze rij.
 - Bepaal grafisch en algebraïsch de limiet van deze rij.
- Het aantal vragen op FAQ-site kan gemodelleerd worden door $u_{n+1} = 0.9u_n + 1.3$ met u_n het aantal vragen op maand n (per 100). De eerste maand worden er 300 vragen gesteld. Toon m.b.v. volledige inductie aan dat deze rij ook kan voorgesteld worden door het expliciet voorschrift $u_n = 13 - \frac{100}{9}(0.9)^n$

6. Een watervolume van $2200m^3$ wordt verdeeld over twee bassins A en B. Via een pompsysteem wordt elke dag 10% van A naar B gepompt en 15% van B naar A. Bij de start van het systeem bevindt zich 800 l in bassin A en 1400 l in bassin B
- (a) Toon aan dat de hoeveelheid water in bassin A in functie van het aantal dagen gegeven wordt door $a_n = \frac{3}{4}a_{n-1} + 330$
- (b) Bepaal grafisch en algebraïsch de uiteindelijke hoeveelheid water in bassin A en B
7. Bepaal de limiet van de recursieve rij $u_{n+1} = p \cdot u_n + q$ als $u_0 = 12, u_1 = 15$ en $u_2 = 16$

4 Algemene technieken

4.1 insluitstelling

Beschouw drie rijen s_n, y_n en z_n . Veronderstel dat er een $k \in \mathbb{N}$ bestaat zo dat

$$x_n \leq y_n \leq z_n \text{ voor alle } n \geq k.$$

Veronderstel bovendien dat x_n en z_n een limiet hebben en dat beide limieten gelijk zijn. Dan heeft ook de "middelste" rij y_n een limiet en bovendien is

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x_n = \lim_{x \rightarrow \infty} y_n = \lim_{x \rightarrow \infty} z_n$$

oefeningen

1. Bereken $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n)}{n}$
2. Bereken $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{n^2}\right)$
3. Bereken $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \sin(n)}{2n - \cos(n)}$

4.2 stijgende en dalende rijen

Beschouw een stijgende rij x_n . Dan heeft deze rij altijd een limiet. Bovendien is deze limiet eindig als en slechts als de rij naar boven begrensd is (d.w.z. als er een $M \in \mathbb{R}$ bestaat zo dat $x_n \leq M$ voor alle $n \in \mathbb{N}$)

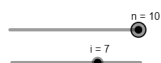
Oefening

Formuleer nu de tweelingversie van deze stelling voor dalende rijen.

5 Limiet van een reeks

5.1 Sommatieteken

Definitie: $\sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$



$$\sum_{i=7}^{10} x_i = x_7 + x_8 + x_9 + x_{10}$$

$$\sum_{i=7}^{10} x^i = x^7 + x^8 + x^9 + x^{10}$$

$$\sum_{i=7}^{10} \frac{x}{i} = \frac{x}{7} + \frac{x}{8} + \frac{x}{9} + \frac{x}{10}$$

Figure 11: <https://www.geogebra.org/m/BbA7YSm8>

5.2 Som van een Rekenkundige en Meetkundige rij

5.2.1 Som RR

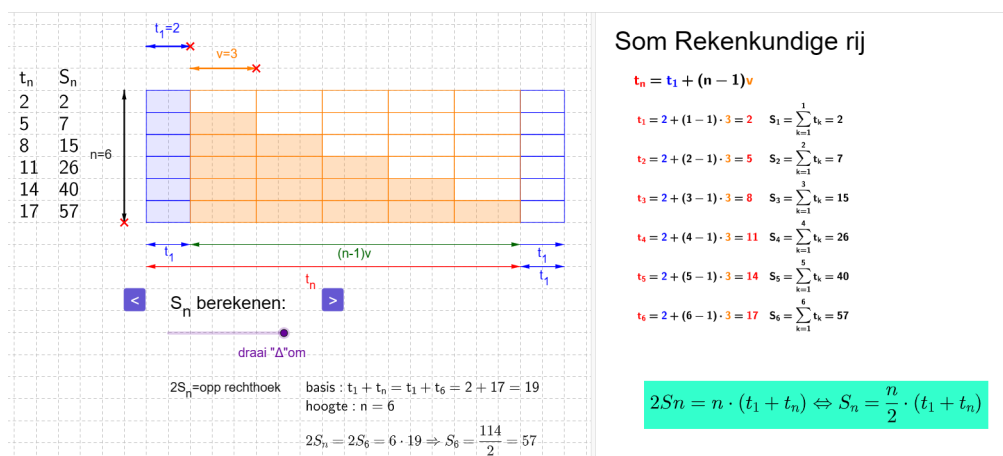
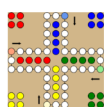


Figure 12: <https://www.geogebra.org/m/nrmmbu9u>

5.2.2 Som MR

Som MR



1024 deelnemers spelen een toernooi 'mens erger je niet'
 Hoeveel wedstrijden moeten er gespeeld worden om een winnaar te hebben?
 (mens erger je niet speel je telkens met vieren, er is telkens één winnaar)

1ste manier:

ronde 1: 256 spelletjes (1024/4)

ronde 2: 64 spelletjes

ronde 3: 16 spelletjes

ronde 4: 4 spelletjes

ronde 5: 1 spelletje

$$\Rightarrow \text{\#spelletjes} : 1 + 4 + 16 + 64 + 256 = 341$$

2de manier:

1024-1: 1023 afvallers

per spelletje 3 afvallers

$$\Rightarrow \text{\#spelletjes} : \frac{1024 - 1}{3} = \frac{4^5 - 1}{4 - 1} = 341$$

$$\Rightarrow 1 + 4 + 4^2 + 4^3 + 4^4 = \frac{4^5 - 1}{4 - 1}$$

↓

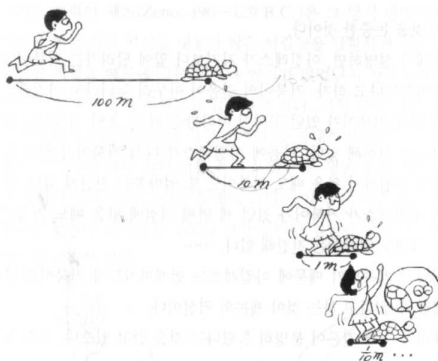
som MR, $t_1 = 1, q = 4$

$$S_5 = \sum_{k=1}^5 t_k = 1 \cdot \frac{4^5 - 1}{4 - 1}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n t_k = t_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Figure 13: <https://www.geogebra.org/m/nrmmbu9u>

5.4 paradox van Zeno



Voorsprong Schildpad Achilles loopt...x sneller dan de schildpad

stap = 5

Als Achilles aangekomen is waar de schildpad vertrokken is, is de schildpad 50 m verder

Achilles moet dus een afstand van $100+50+25+12.5+6.25+$ meter overbruggen om de schildpad in te halen

Toon oplossing Dit is een som van een MR met $q=0.5$, dus $|q|<1$
Dus dit geeft:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \frac{u_1}{1-q} = \frac{100}{1-0.5} = 200$$

Dus Achilles haalt de schildpad in na 200 m

<https://www.geogebra.org/m/parg6hhn>

5.5 oefeningen

1. Schrijf de volgende sommen voluit

(a) $\sum_{l=3}^4 l^2$

(b) $\sum_{k=1}^3 x_k^k$

2. Schrijf volgende sommen m.b.v. het sommatieteken

(a) $\frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36}$

(b) $a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$

(c) $\sin x + \cos 2x + \sin 3x + \cos 4x + \sin 5x + \cos 6x$

3. Bereken volgende sommen:

(a) $\sum_{i=0}^5 2i^2$

(b) $\sum_{k=1}^3 2k - 1$

(c) $\sum_{j=2}^4 \sum_{i=1}^4 i \cdot j$

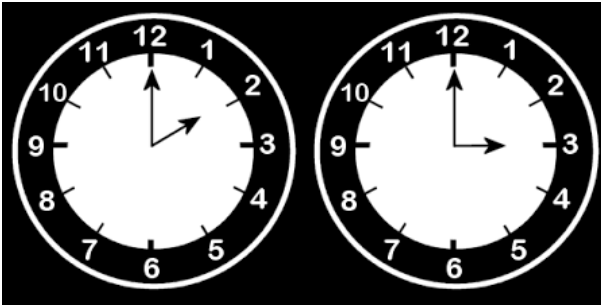
4. Bereken $\sum_{r=1}^{99} \frac{1}{\sqrt{r+1} + \sqrt{r}}$. Toon hiervoor eerst aan dat $\frac{1}{\sqrt{r+1} + \sqrt{r}} = \sqrt{r+1} - \sqrt{r}$

5. De algemene term van een RR wordt gegeven door $t_n = 3n + 7$. Bepaal de som van de eerste 50 termen. (A. 4175)
6. Gegeven is een RR met $u_4 = 7$ en $u_9 = 22$. Vanaf welke term zal de som van deze RR meer dan 10000 bedragen? (A. $n = 83$)
7. Neem de rij $u_n = u_{n-1} - 5$ met $u_1 = 2$
 - (a) Bepaal het expliciet voorschrift
 - (b) Bereken u_{30}
 - (c) Bereken S_{10}
 - (d) Bepaal n als $S_n = -427$
8. In een spel wordt 800 euro prijzengeld verdeeld over 5 prijzen. De hoofdprijs (eerste prijs) bedraagt 260 euro en het verschil tussen opeenvolgende prijzen is steeds hetzelfde. Hoeveel euro bedraagt de vierde prijs? (A. 110 euro)
9. lineaire versus exponentiële groei:
 - (a) Bepaal het voorschrift van een rij die je loon bij slagerij Appeltans in functie van de tijd voorstelt.
 - (b) Bepaal het voorschrift van een rij die je loon bij LV Appeltans Boomteelt in functie van de tijd voorstelt.
 - (c) Bepaal de totale hoeveelheid vakantiegeld die je gaat ontvangen bij beide firma's als je er zes jaar zou blijven werken.
10. Gegeven is een MR met $t_3 = 144$ en $t_6 = 486$. Vanaf welke term zal de som van deze MR meer dan $8 \cdot 10^{18}$ bedragen? (A. $n = 96$)
11. In een RR geldt dat $t_1 = 7$ en $t_2 = 11$. Toon aan dat de som van de eerste 35 termen gelijk is aan de som van de volgende 15 termen.
12. Een grote theaterzaal heeft 18 zitplaatsen op de 1ste rij, 31 zitplaatsen op de 2de rij, 44 op de 3de rij. De laatste rij 746 plaatsen
 - (a) Bepaal het aantal rijen van deze immens grote theaterzaal
 - (b) Bepaal het totaal aantal zitplaatsen
13. Bekijk onderstaande figuren, gebouwd met vierkante tegels

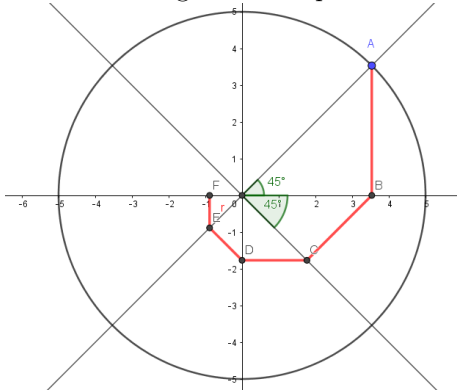


- (a) Hoeveel tegels zijn er nodig voor de 4de en 5de figuur?
 - (b) Hoeveel tegels zijn er nodig voor de n-de figuur?
 - (c) Is er een figuur die met exact 593 tegels gemaakt kan worden? Verklaar jullie antwoord.
 - (d) Hoeveel tegels zijn er in totaal nodig voor de eerste 57 figuren?
14. paradox van Zeno: Na hoeveel meter zal Achilles de schildpad inhalen bij een voorsprong van 400 meter en als Achilles 8 keer sneller loopt?

15. Geef het exacte tijdstip tussen twee en drie uur waarop de grote wijzer de kleine wijzer inhaalt



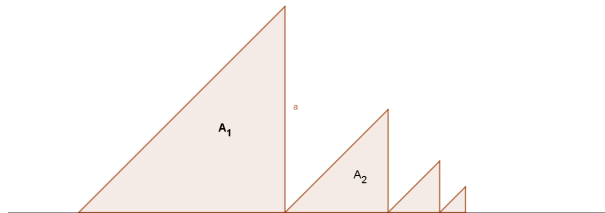
16. Bereken de lengte van de spiraal ABCDEF... als dit patroon zich blijft herhalen:



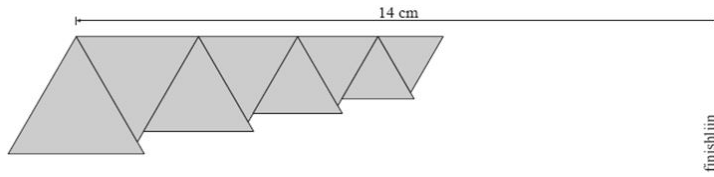
17. Een zijde van een gelijkzijdige driehoek is 12 cm. Als je de middens van de zijden met elkaar verbindt, verkrijgt je een ingeschreven gelijkzijdige driehoek. In deze driehoek verbind je weer de middens van de zijden met elkaar. Dit geeft een volgende ingeschreven gelijkzijdige driehoek. En zo doe je maar verder zonder ophouden.

- (a) Bepaal de som van de omtrekken van alle driehoeken (A. 72 cm.)
 (b) Bepaal de som van de oppervlakte van alle driehoeken (A. $48\sqrt{3}cm^2$)

18. Je begint met een driehoek A_1 . Deze is rechthoekig en gelijkbenig; de gelijke benen hebben lengte a . Tegen A_1 komt driehoek A_2 ; deze heeft dezelfde vorm als A_1 , maar zijn afmetingen zijn maar de helft. Op dezelfde manier heeft A_3 zijden die maar half zo lang zijn als die van A_2 , enz.... Dit wordt doorgetrokken tot in het oneindige. Er ontstaat een soort zaagtandfiguur. Bereken de totale oppervlakte van deze figuur. (A. $\frac{2a^2}{3}$)



19. We maken een figuur die uit oneindig veel gelijkzijdige driehoeken bestaat. We beginnen met een gelijkzijdige driehoek met zijde 3. Rechtsboven plakken we er een gelijkzijdige driehoek aan met zijde 2,7 cm, dan eentje met zijde 2,43 Enz. Na elke keer plakken komt de figuur dichterbij de finishlijn. We plakken oneindig vaak. Onderzoek m.b.v. een berekening of deze figuur op den duur de finishlijn overschrijdt.



20. Een rij vierkanten

Meetkundige reeks

Een vierkant met zijde a wordt in 4 gelijke vierkanten verdeeld.
 Een van deze vierkanten wordt blauw ingekleurd.
 Een ander deelvierkant wordt opnieuw in 4 gelijke deelvierkanten ingedeeld.
 Hiervan wordt opnieuw één blauw ingekleurd en een ander opnieuw in vieren ingedeeld, waarvan één blauw wordt ingekleurd, enz.

aantal blauwe vierkanten

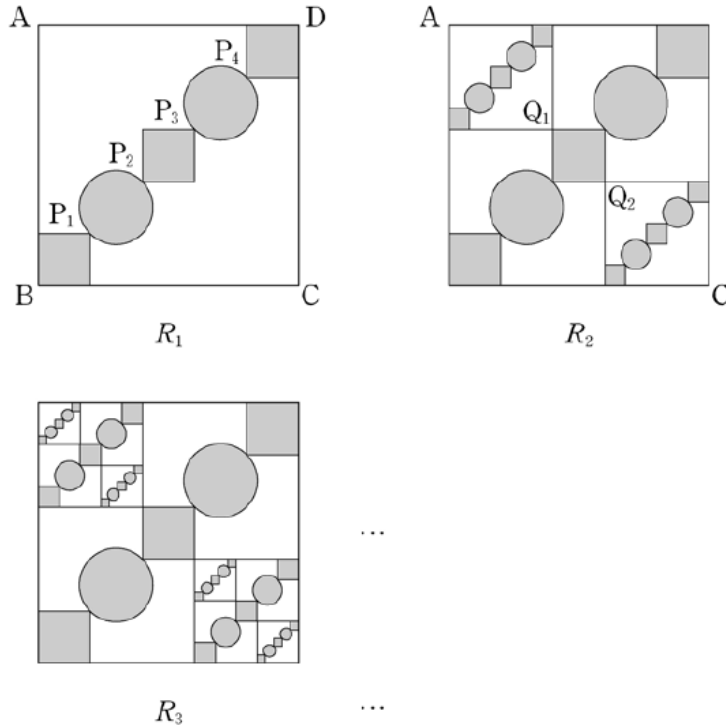
Bepaal de totaal ingekleurde blauwe opp in functie van zijde a

oplossing

Figure 16: <https://www.geogebra.org/m/parg6hhn>

21. Als $-\pi < x < \pi$ voor welke waarde(n) van x geldt dan dat $1 + |\cos x| + \cos^2 x + |\cos^3 x| + \dots = 2$
22. Toon aan: als $x > 0$ dan $\frac{1}{x} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+x)^3} \dots$
23. Een oefening uit een examen van Zuid-Korea: Bepaal de totale oppervlakte van alle gekleurde vierkanten en cirkels, als het patroon zoals te zien bij R_2 en R_3 zich steeds blijft herhalen. Het vierkant ABCD heeft een zijde van 5 cm.

이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{24}{17}(\pi+3)$ ② $\frac{25}{17}(\pi+3)$ ③ $\frac{26}{17}(\pi+3)$
 ④ $\frac{24}{17}(2\pi+1)$ ⑤ $\frac{25}{17}(2\pi+1)$

24. Schrijf 0,26262626... als een breuk

25. Schrijf 1,13333333... als een breuk

26. Hoeveel oplossingen voor x met $-90^\circ < x < 90^\circ$ heeft volgende oneindige som:
 $\frac{1}{\tan(x)} + \frac{1}{\tan^2(x)} + \frac{1}{\tan^3(x)} + \dots$

6 taken

1. RR en MR
2. Limiet van een rij