Nombres complexes (1) SV + SG

(Dans la suite on suppose le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$).

1. *Résoudre, dans l'ensemble des complexes, les équations suivantes :*

1) $(1+i)z+5-i=0$
2) $iz+2\bar{z}=1-i$

Module d'un nombre complexe

2. A- *Calculer le module de chacun des nombres complexes suivants :*

1) $z=\dfrac{(1+3i)^2}{2-i}$ 2) $z=(1+3i)^2\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^5$

3) $a=\dfrac{z+i}{\bar{z}-i}$ *(où z est un nombre complexe)*

B- 1) *z est nombre complexe tel que $|z|=2$, calculer le module de $z'=z-\dfrac{1}{\bar{z}}$.*

2) *z est un nombre complexe tel que $|z|=\sqrt{2}$, calculer $|\bar{z}+i\bar{z}|$.*

C- *Résoudre, dans l'ensemble des complexes, l'équation suivante : $z+\left|z^2\right|=3+i$*

3. *z et z' étant deux nombres complexes tels que $|z|=|z'|=1$.*

Montrer que $\dfrac{z+z'}{1+zz'}$ est réel. $(zz'\neq -1)$

Image et affixe - Ensemble de points

4. 1) *On donne les points A, B, C et D d'affixes respectives $1+i$, $2+3i$, $4+4i$ et $3+2i$.*
Placer les points A, B, C et D et montrer que ABCD est un losange.

2) *Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que $|iz-5|=4$.*

3) *On donne les deux points A et B d'affixes respectives 1 et 2i.*
On désigne par (C) le cercle de centre O et de rayon 1 et par (C') le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{5}$.

A tout point M d'affixe $z\neq 2i$ on associe le point M' d'affixe $z'=\dfrac{z+1}{z-2i}$.

a- 1) *Calculer z' pour $z=1+i$.*
2) *Pour quelle valeur de z a-t-on $z'=i$?*

b- *On pose $z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$. (x, y et x', y' sont des réels).*
Calculer x' et y' en fonction de x et y.

c- *Déterminer l'ensemble des points M dans chacun des cas suivants:*
1) *z' est réel*
2) *z' est imaginaire pur.*
3) *M' appartient au cercle de centre O et de rayon 1.*

d- 1) *Montrer que $(z'-1)(z-2i)=1+2i$.*
2) *En déduire l'ensemble des points M lorsque le point M' décrit le cercle (C').*

Forme trigonométrique

5. *A - Mettre sous forme trigonométrique chacun des nombres complexes suivants :*

1) $z = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$ 2) $z = \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)^9$ 3) $z = -2\left(\cos\dfrac{\pi}{7} - i\sin\dfrac{\pi}{7}\right)$

B – Soit z un nombre complexe tel que $\arg(z) = \dfrac{\pi}{6}\ (2\pi)$, *calculer :*

1) $\arg\left(\dfrac{i}{(\bar{z})^2}\right)$ 2) $\arg\left(\dfrac{-z^3}{(i.\bar{z})^2}\right)$

Forme exponentielle

6. *Mettre sous forme trigonométrique et algébrique chacun des nombres complexes suivants :*

1) $z = \overline{\left(2e^{i\frac{7\pi}{6}}\right)}$ 2) $z = \left(-\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)\left(\sqrt{3}-i\right)$ 3) $z = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{e^{3i\frac{\pi}{4}}}$

7. *A - En utilisant la notation exponentielle d'un complexe, mettre sous forme trigonométrique chacun des nombres complexes suivants :*

1) $z = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)^9$ 2) $z = \dfrac{(1+i)^{10}}{\left(\sqrt{3}-i\right)^5}$

B- On donne $z = -\sqrt{3} + e^{i\frac{\pi}{6}}$, *écrire z sous forme exponentielle .*

8. *z étant un complexe , soit* $z' = \dfrac{1+z}{1-z}$. $(z \neq 1$ *et* $z \neq -1)$

1) Calculer z' pour $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$

2) Montrer si $|z| = 1$, *alors z' est imaginaire pur.*

9. *Soit le complexe* $z = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$.

1) Ecrire z sous forme algébrique.

2) Ecrire z sous forme trigonométrique.

3) En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{7\pi}{12}$, $\sin\dfrac{7\pi}{12}$, $\cos\dfrac{\pi}{12}$ *et* $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

10. *On donne les points A et B tels que :* $z_A = 1$ *et* $z_B = \dfrac{3}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Soit (C) le cercle de centre A et de rayon 1.

1) a- Ecrire $z_B - z_A$ *sous forme exponentielle.*

b- Déterminer une mesure de l'angle $(\vec{u}\ ;\vec{AB})$.

c- Montrer que le point B appartient au cercle (C).

2) A tout point M d'affixe z, non nul, on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \dfrac{\bar{z}+2}{\bar{z}}$.

a- Démontrer que $\bar{z}(z'-1) = 2$.

b- En déduire que, lorsque M' décrit le cercle (C), M décrit un cercle (T) à déterminer.

11. *On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = 2-3i$, $z_B = i$ et $z_C = 6-i$.*

1) Calculer $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$.

En déduire la nature du triangle ABC.

2) A tout point M d'affixe z distincte de i, on associe le point M'

d'affixe z' telle que : $z' = \dfrac{i(z-2+3i)}{z-i}$.

Si $z = 1-i$, déterminer la forme exponentielle de z'.

3) a) Si $z' = 2i$, trouver la forme algébrique de z (on note E le point d'affixe z obtenue).

b) Vérifier que E est un point de la droite (AB).

4) Démontrer que si le point M varie sur la médiatrice du segment [AB] alors le point M' varie sur un cercle de centre O dont on précisera le rayon.

12. *Les affirmations suivantes sont vraies. Justifier.*

1) On considère trois points A, B et C distincts d'affixes respectives a, b et c tels que $\dfrac{c-a}{b-a} = 2i$.

A appartient au cercle de diamètre [BC].

2) Si $\dfrac{\pi}{2}$ *est un argument de z,* ***alors*** $|i+z| = 1+|z|$ **.**

3) Si $z = 3\sqrt{3}+3i$ *alors* z^3 ***est imaginaire pur****.*

4) Si $z = e^{i\theta}$ *, alors* $z^2 + \dfrac{1}{z^2}$ ***est réel.***

5) $|i\overline{Z}+1| = |Z+i|$.

13.*on considère les points A et B d'affixes respectives* $a = -4\sqrt{3}-4i$ *et* $b = -4\sqrt{3}+4i$.

1) Déterminer la nature du triangle OAB.

2) Soit C le point d'affixe $c = \sqrt{3}+i$ *et D le point tel que : OC = OD et* $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}) = \dfrac{\pi}{3}\ (2\pi)$.

Déterminer l'affixe de D.

3) Soit G le point d'affixe $g = -4\sqrt{3}+6i$.

a- Montrer que OBGD est un parallélogramme.

b- Vérifier que : $\dfrac{c-g}{a-g} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

c- Déduire une mesure, en radians, de l'angle $(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GC})$ *et la valeur du rapport* $\dfrac{GC}{GA}$.

d -Quelle est la nature du triangle AGC?