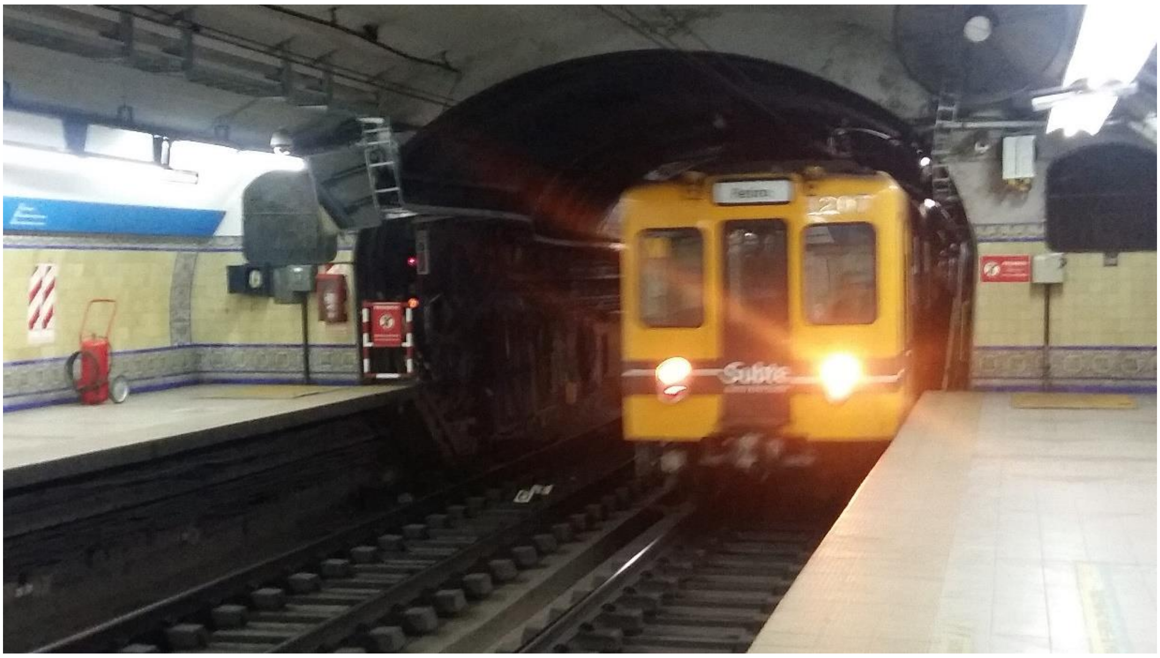
A) Título: **A través del túnel**

En la matemática, las derivadas y las integrales son las herramientas fundamentales del cálculo, nos permiten modelar todos los aspectos de la naturaleza en las ciencias físicas.

A través de estos nuevos conceptos desarrollados en el siglo XVII, por dos grandes matemáticos: Newton y Leibniz, un gran número de problemas que se pueden apreciar en la vida cotidiana son estudiados.

B) Fotografía elegida:



C) Situación problemática:

El subterráneo en la Ciudad de Buenos Aires es el segundo medio de transporte más utilizado, por lo cual se quiere realizar la más atractiva planificación de una nueva línea "G" con el objetivo de generar fluidez al tránsito en calles y avenidas, proyectada para armar un túnel que una Retiro y el monumento al Cid Campeador, también conocido como las "7 esquinas".
Los arquitectos encargados del proyecto se realizan un par de preguntas a la hora de comenzar la construcción:

- ¿Cuál es el área ocupada por un túnel subterráneo?
- ¿Cuál es la altura máxima que debe tener un túnel subterráneo?

D) Justificación algebraica en Geogebra:

1- Luego de ingresar la imagen y ajustarlo en Geogebra, se ubican 5 puntos (C, D, E, F, G) sobre el túnel de la imagen.
2- En la barra de entrada con el comando AjustePolinómico (<Lista de Puntos>, <Grado del Polinomio>) se ingresan los 5 puntos y el grado del polinomio que deseamos, grado 4: [1]

[1] Todas las resoluciones algebraicas que se hacen a continuación previamente se realizó un ajuste al programa Geogebra (Opciones- Global- Redondeo- 5 cifras decimales) para tener mayores cifras decimales y poder obtener resultados más aproximados.

$$F(x) = \text{AjustePolinómico}(\{C, D, E, F_1, G\}, 4)$$

$$\rightarrow \quad -0.01\,x^4 + 0.3\,x^3 - 2.85\,x^2 + 12.45\,x - 16.17$$

3- Para poder hallar el área bajo la curva se ingresa en la barra de entrada el comando IntegralN y entre paréntesis el polinomio a analizar y el intervalo que se desea estudiar, colocando previamente sobre el eje X los 2 puntos (H e I), siendo el intervalo definido por dichos puntos: [3 ; 9,4].

$$\text{Área} = \text{IntegralN}(F, x(H), x(I))$$

$$\rightarrow \quad 26.26$$

El área bajo la curva se calcula a partir de la integral de una función definida en un intervalo [a,b], siendo b el límite superior y a el límite inferior. Estos tipos de problemas, medición del área encerrada por líneas curvas, no se resolvió hasta finales del siglo XVII con el descubrimiento del cálculo integral.
Para calcular la integral definida de $f(x)$ en el intervalo mencionado se aplica la regla de Barrow:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Área del túnel:

$$F(x) = \int_3^{9,4} -0{,}01173x^4 + 0{,}29526x^3 - 2{,}84898x^2 + 12{,}45235x - 16{,}16944 \; dx$$

Integro:

$$\text{F(x)} = -0{,}00235x^5 + 0{,}07382x^4 - 0{,}94966x^3 + 6{,}22618x^2 - 16{,}16944x \Big|_3^{9,4} =$$

$$\text{F(x)} = \left(-0{,}00235\,.\,(9{,}4)^5 + 0{,}07382\,.\,(9{,}4)^4 - 0{,}94966\,.\,(9{,}4)^3 + 6{,}22618\,.\,(9{,}4)^2 - 16{,}16944\,.\,(9{,}4)\right)$$

$$- \left(-0{,}00235\,.\,(3)^5 + 0{,}07382\,.\,(3)^4 - 0{,}94966\,.\,(3)^3 + 6{,}22618\,.\,(3)^2 - 16{,}16944\,.\,(3)\right) =$$

$$\rightarrow \qquad F(x) = 13{,}26156 - (-12{,}70515) \cong \boxed{\mathbf{25{,}96671}}$$ [2]

4- Se puede verificar la integral hallada con Geogebra ingresando en la barra de entrada con el Comando Integral(<Función>):

$$f(x) = \text{Integral}(F)$$

$$\rightarrow \quad 0\,x^5 + 0.07\,x^4 - 0.95\,x^3 + 6.23\,x^2 - 16.17\,x$$

5- Para saber la altura máxima del túnel en la barra de entrada se ingresa el comando: Extremo (<Polinomio>) dando como resultado el par ordenado:

$$\text{Alto} = \text{Extremo}(F)$$

$$\rightarrow \quad (6.16,\ 4.56)$$

Así obtenemos que la altura máxima del túnel es aproximadamente de 4,56m.

[2] El resultado obtenido es una aproximación del área bajo la curva ya que al utilizar un conjunto denso como los números decimales para realizar los cálculos se realizó anteriormente un redondeo de los mismos produciendo que el resultado sea impreciso.

6- Algebraicamente para calcular el máximo o mínimo de una función polinómica se debe realizar el siguiente procedimiento y al mismo tiempo se utiliza Geogebra para corroborar los datos obtenidos:

a) Se calcula la derivada primera de la cual obtenemos el crecimiento y decrecimiento de una función y los posibles máximos y mínimos relativos:

F'(x)= $-0{,}04692x^3 + 0{,}88578x^2 - 5{,}69796x + 12{,}45235$ [3]

En la barra de entrada se ingresa el comando Derivada(<Función>)*:*

$$F'(x) = \text{Derivada}(F)$$

$$\rightarrow \quad -0.05\,x^3 + 0.89\,x^2 - 5.7\,x + 12.45$$

b) A partir de la primera derivada se deben obtener las raíces igualando a cero. Las raíces son aquellos valores que, si sustituimos la variable “x” por ellos, el resultado de la ecuación del polinomio es cero.

F'(x)= $-0{,}04692x^3 + 0{,}88578x^2 - 5{,}69796x + 12{,}45235 = 0$ [4]

Para este caso en particular al ser un polinomio con coeficientes decimales se aplica el Teorema de Bolzano[5] para comprobar que la raíz que se obtuvo con Geogebra es el correcto.
El teorema define que si una función f(x) es continua en un intervalo cerrado [a,b] y f(a) y f(b) son de distinto signo, existe por lo menos un punto entre a y b para el cual f(c) = 0

Intervalo Cerrado	F’(a)	F’(b)
[6,1;6,2]	0,0047	-0,00797
[6,12;6,18]	0,00215	-0,00546
[6,13;6,17]	0,00087	-0,0042
[6,135;6,165]	0,00023	-0,00357

En la barra de entrada se ingresa el comando Raíz(<Polinomio>).
En este caso el polinomio es la primera derivada (F’):

$$J = \text{Raíz}(F')$$

$$\rightarrow \quad (6.16,\ 0)$$

c) Se calcula la segunda derivada, y a partir del signo de la imagen que toman en ella las raíces de la derivada primera se condiciona:

- F"(a) < 0 es un máximo.
- F"(a) > 0 es un mínimo.

$F''(x) = -0{,}14076x^2 + 1{,}77156x - 5{,}69796 =$ [6]

$F''(6{,}1565) = -0{,}14076\,.\,(6{,}1565)^2 + 1{,}77156\,.\,(6{,}1565) - 5{,}69796 =$

F’’(6,1565) ≅ - 0,12651

→ - F"(a) < 0 es un **máximo.**

---

[3] El resultado obtenido es una aproximación de la derivada primera ya que al utilizar un conjunto denso como los números decimales para realizar los cálculos se realizó anteriormente un redondeo de los mismos produciendo que el resultado sea impreciso.

[4] Al ser un polinomio con coeficientes con infinitos decimales no se puede obtener correctamente la raíz hallada por Geogebra.

[5] Este teorema fue enunciado por el filósofo, teólogo y matemático Bernard Bolzano. Este científico, nacido en la actual República Checa, fue uno de los primeros matemáticos en la historia en hacer una demostración formal de las propiedades de las funciones continuas.

[6] El resultado obtenido es una aproximación de la derivada segunda ya que al utilizar un conjunto denso como los números decimales para realizar los cálculos se realizó anteriormente un redondeo de los mismos produciendo que el resultado sea impreciso.

En la barra de entrada nuevamente se ingresa el comando Derivada(<Función>). La Función a derivar es la primera derivada:

$$F''(x) = \text{Derivada}(F')$$

$$\rightarrow \quad -0.14\,x^2 + 1.77\,x - 5.7$$

d) Al final se calcula la imagen en la función original, reemplazando la raíz obtenida en la derivada primera.

$$F(6{,}1565) = -0{,}01173\,.\,(6{,}1565)^4 + 0{,}29526\,.\,(6{,}1565)^3 - 2{,}84898\,.\,(6{,}1565)^2 + 12{,}45235\,.\,(6{,}1565) - 16{,}16944 =$$

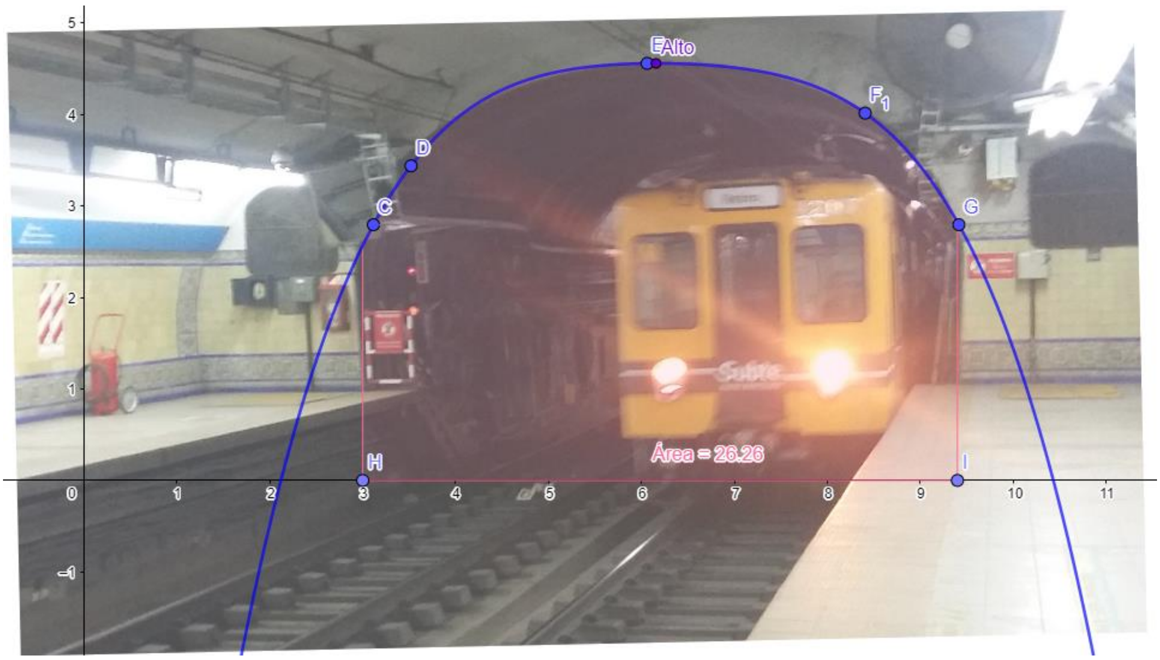
$$\rightarrow F(6{,}1565) \cong \boxed{\mathbf{4{,}55665}}$$ [7]

Obteniendo así que la altura máxima del túnel es de aproximadamente 4,56 m.

Respuesta:

Para poder comenzar el proyecto se debe tener primero en cuenta las medidas del túnel subterráneo cuya altura debe ser de 4,56 m, mientras que el área ocupada es de 26,26 m^2. Estas medidas son aproximadas y básicas para que luego los subtes puedan desplazarse cómodamente.

Vista gráfica Geogebra:



[7] El resultado obtenido es una aproximación de la altura máxima ya que al utilizar un conjunto denso como los números decimales para realizar los cálculos se realizó anteriormente un redondeo de los mismos produciendo que el resultado sea impreciso.