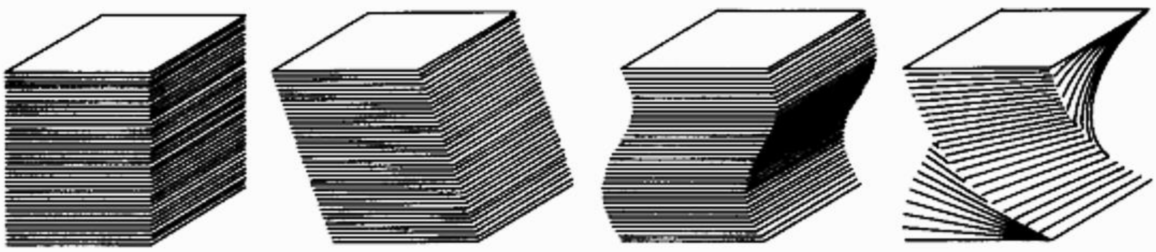
Herleitung der Gleichung $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$ zur Berechnung des Kugelvolumens

Vorbemerkungen

Francesco Bonaventura Cavalieri, ein Schüler Galileis, veröffentlichte 1629 das auf seinen Überlegungen beruhende Prinzip des Volumenvergleichs zweier Körper.

Ein Stapel Blätter (z. B. ein dicker Notizblock) lässt sich deformieren:



Seine ursprüngliche Form ist ein Prisma. Aus dem Inhalt der Grundfläche und der Höhe lässt sich sein Volumen bestimmen. Beschreibe die deformierten Körper. Was kannst du zu ihrem Volumen sagen?

Bildquelle: „Heuristik und Geschichte der elementaren Volumenberechnung“ von Lutz Führer, Frankfurt am Main, mathematica didactica 29 (2006) 1

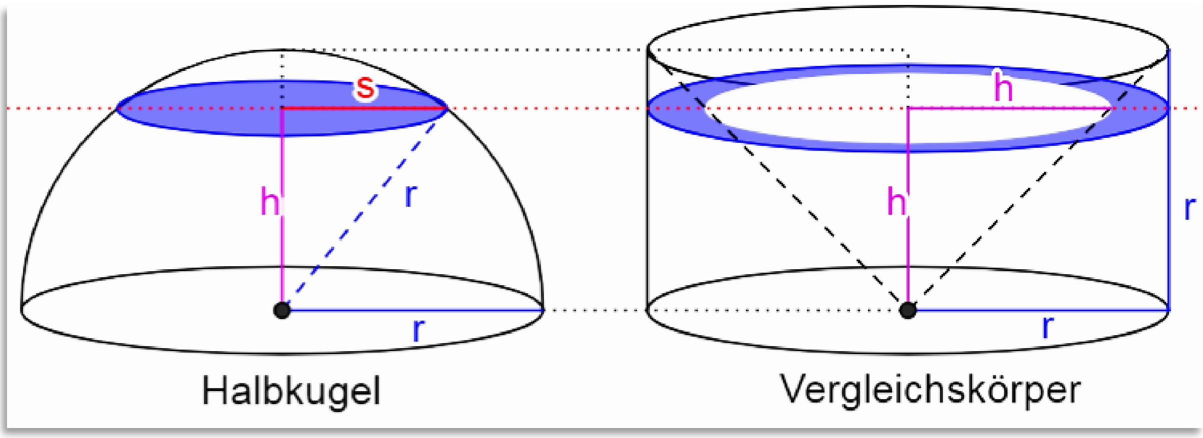
Satz von Cavalieri

Wenn zwei Körper zwischen zwei parallelen Ebenen liegen **und** die Inhalte der Schnittflächen der Körper mit *jeder* zur Grundfläche parallelen Ebene einander gleich sind, **dann** haben diese Körper auch das gleiche Volumen.

Herleitung der Volumengleichung für eine Kugel

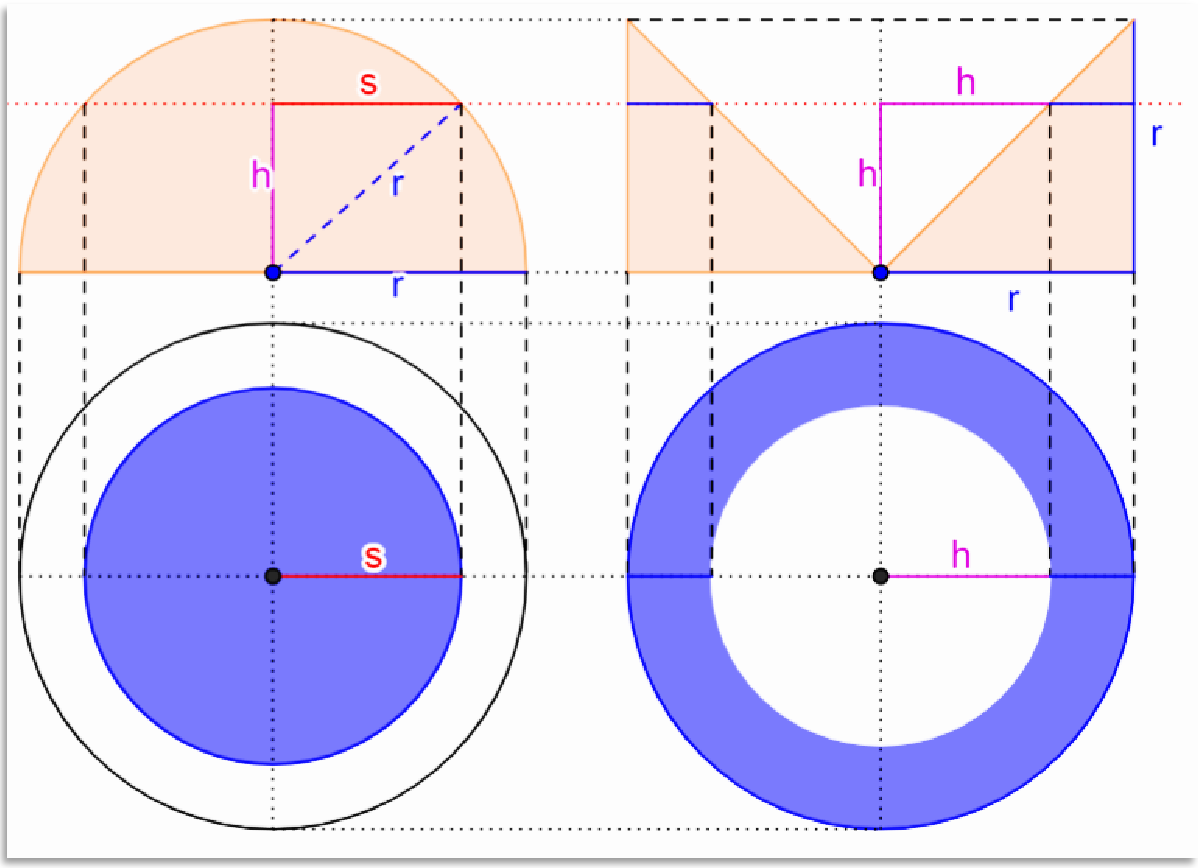
In einem **Zylinder** mit $r = h$ wird ein **Kegel** gebohrt (ebenfalls: $r = h$).

Es bleibt der sogenannte **Vergleichskörper** übrig.



Figur 1

Halbkugel **Vergleichskörper**



Figur 2

Inhalt A_1 der Schnittfläche (blauer Kreis) in der Höhe h der Halbkugel:

$A_1 = \pi \cdot s^2$ mit $s^2 = r^2 - h^2$ (Satz des Pythagoras)

$= \pi \cdot (r^2 - h^2)$

Inhalt A_2 der Schnittfläche (blauer Kreisring) in der Höhe h des Vergleichskörpers:

$A_2 = \pi \cdot r^2 - \pi \cdot h^2$

$= \pi \cdot (r^2 - h^2)$

Vergleich von A_1 und A_2

Es gilt für jede Höhe h mit $0 \leq h \leq r$: $\boldsymbol{A_1 = A_2}$

Die beiden Voraussetzungen aus dem Satz von Cavalieri

*(**Wenn** zwei Körper zwischen zwei parallelen Ebenen liegen **und** die Inhalte der Schnittflächen der Körper mit jeder zur Grundfläche parallelen Ebene einander gleich sind…)*

sind somit erfüllt.

Wir dürfen nach dem Satz von Cavalieri folgern:

*(… , **dann** haben diese Körper auch das **gleiche Volumen**.)*

Folgerung: Nach dem Satz von Cavalieri:

$$\boldsymbol{Volumen_{Vergleichskörper} = Volumen_{Halbkugel}}$$

$$\boldsymbol{V_{VK} = V_{HK}}$$

Berechnung der Volumendifferenz:

$$\boldsymbol{V_{VK} = V_{Zylinder} - V_{Kegel}}$$

$$= \pi \cdot r^2 \cdot h \ - \tfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h \qquad \text{mit } h = r$$

$$= \pi \cdot r^2 \cdot r \ - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot r$$

$$= \pi \cdot r^3 \ - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

$$= \ \boldsymbol{V_{HK}}$$

Es gilt also: $\boldsymbol{Volumen_{Halbkugel} = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3}$

Also gilt für jede Kugel mit Radius r die Gleichung:

$$\boldsymbol{Volumen_{Kugel} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3}$$