LOS TEOREMAS DE PTOLOMEO Y SU GENERALIZACIÓN POR CASEY. APLICACIONES

Lección de preparación olímpica

Francisco Bellot Rosado

En las revistas *Gazeta matematica* de Rumania y *Matematika & Informatika*, de Bulgaria, así como en la canadiense *Crux mathematicorum* ([1], [2], [3], [4]), se han publicado, separadamente, artículos muy interesantes en relación con los teoremas de Ptolomeo y sus generalizaciones, con abundantes ejemplos en los que estos resultados se utilizan hábilmente para resolver con patente simplicidad problemas geométricos complicados . El objetivo de esta lección de preparación es divulgarlos , de una manera conjunta .

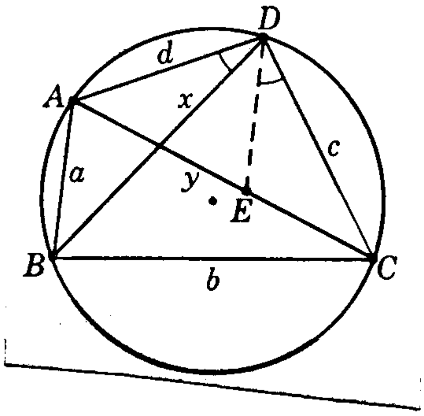
1. El primer teorema de Ptolomeo

Éste es un resultado clásico de geometría de cuadriláteros ; proporciona condiciones necesarias y suficientes para que un cuadrilátero sea cíclico, es decir, se pueda inscribir en una circunferencia; y dice lo siguiente :

En un cuadrilátero cíclico, el producto de las diagonales es igual a la suma de los productos de pares de lados opuestos, y recíprocamente.

De las diversas demostraciones de este teorema existentes en la bibliografía, damos la siguiente, incluida en el libro *Modern College Geometry, de* David R. Davis, Addison-Wesley, 1949 :

Designaremos, como es habitual, $a = AB, b = BC, c = CD, d = DA$ y $x = BD, y = AC$.



Supongamos primero que los puntos A,B,C y D están en una circunferencia. Se construye $\widehat{CDE} = \widehat{ADB}$, con $E \in AC$. Entonces los triángulos CDE y BCD son semejantes, de donde $\frac{a}{EC} = \frac{x}{c}$.

Pero también ADE y BCD son semejantes, así que $\frac{b}{AE} = \frac{x}{d}$.

Como $AE + EC = AC = y$, sustituyendo tenemos

$$\frac{bd}{x} + \frac{ac}{x} = y \Leftrightarrow ac + bd = xy.$$

Recíprocamente, vamos a probar que si $ac + bd = xy$, entonces el cuadrilátero ABCD es cíclico. Se construye $\widehat{CDE} = \widehat{ADB}$ y se determina DE tal que $\frac{x}{c} = \frac{d}{DE}$. Se une el punto E con A y con C. Entonces los triángulos EDC y ADB son semejantes, porque tienen lados proporcionales que comprenden ángulos iguales, y BDC es semejante a ADE.

Entonces

$$\frac{a}{EC} = \frac{x}{c} \Rightarrow \widehat{CED} = A$$
$$\frac{b}{AE} = \frac{x}{d} \Rightarrow \widehat{DEA} = C$$

Sumando, $(AE + EC)x = ac + bd,\ \ \widehat{CED} + \widehat{DEA} = A + C.$

Como $xy = ac + bd,\ xy = (AE + EC)x \Rightarrow y = AC = AE + EC,$ lo cual indica que AEC es una línea recta, lo que implica

$A + C = \widehat{CED} + \widehat{DEA} = 180^o$ y el cuadrilátero es cíclico.■

Para cuadriláteros no cíclicos la desigualdad se escribe

$$xy < ac + bd$$

de la que hay una demostración muy sencilla usando números complejos.

2.El segundo teorema de Ptolomeo

En las condiciones del teorema anterior, se verifica

$$\frac{y}{x} = \frac{ad + bc}{ab + cd}$$

Demostración : Como $\widehat{ADC}$ y $\widehat{ABC}$ son suplementarios, se verifica

$$\cos\widehat{ABC} + \cos\widehat{ADC} = 0,$$

así que utilizando el teorema del coseno en los respectivos triángulos ABC y ADC , y multiplicando por $2abcd$ para eliminar los denominadores resulta

$$ab(c^2 + d^2 - y^2) + cd(a^2 + b^2 - y^2) = 0$$
$$\text{es decir } ac(bc + ad) + bd(bc + ad) = y^2(ab + cd)$$
$$\text{o bien } y^2(ab + cd) = (ac + bd)(ad + bc) \quad (1)$$

Procediendo de la misma manera en los triángulos DAB y BCD resulta

$$x^2(ad + bc) = (ab + cd)(ac + bd) \qquad (2)$$

Multiplicando miembro a miembro (1) y (2) se obtiene el teorema directo de Ptolomeo, mientras que dividiendo miembro a miembro resulta

$$y^2(ab + cd)^2 = x^2(ad + bc)^2$$

que es lo que queríamos probar.■

3.Preparativos para la generalización : longitudes de tangentes comunes a dos circunferencias

a) Si dos circunferencias de radios r_1 y r_2 son tangentes exteriores, la longitud del segmento de tangente exterior común vale $2\sqrt{r_1 r_2}$.

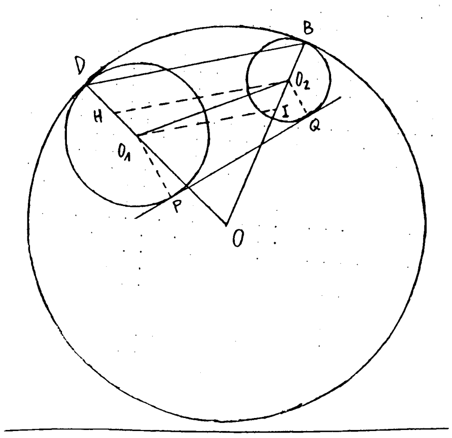
En efecto, si t es dicha tangente, se tiene (teor. de Pitágoras):

$$t^2 + (r_1 - r_2)^2 = (r_1 + r_2)^2 \Leftrightarrow t^2 = 4r_1 r_2$$

b) Si las circunferencias son exteriores, de centros respectivos O_1 y O_2, entonces la longitud del segmento de tangente exterior común t verifica

$$t^2 = \overline{O_1 O_2}^2 - (r_1 - r_2)^2,$$

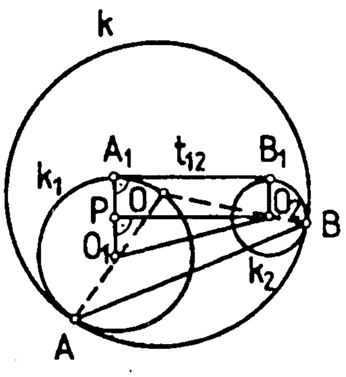
pues basta aplicar el teorema de Pitágoras cuando se traza por O_2 una paralela a $t = PQ$ hasta que corte a $O_1 P$:



c) Supongamos que las circunferencias $k_1(O_1; r_1)$ y $k_2(O_2; r_2)$ son tangentes interiores en A y B, respectivamente, a la circunferencia $k(O; R)$. Entonces la longitud t_{12} de la tangente común exterior a k_1 y k_2 es

$$t_{12} = \frac{AB}{R}\sqrt{(R - r_1)(R - r_2)}.$$

Demostración : No hay pérdida de la generalidad en suponer $r_1 \geq r_2$, y además suponemos que O_1 y O_2 son exteriores:



Sea $t_{12} = A_1 B_1$, con $A_1 \in k_1, B_1 \in k_2$; y sea P la proyección de O_2 sobre $O_1 A_1$.

El teorema de Pitágoras en $O_1 O_2 P$ da

$$t_{12}^2 = \overline{O_1O_2}^2 - (r_1 - r_2)^2;$$

y el del coseno en OO_1O_2 :

$$\overline{O_1O_2}^2 = (R - r_1)^2 + (R - r_2)^2 - 2(R - r_1)(R - r_2)\cos\phi,$$

siendo $\phi = \widehat{O_1OO_2};$ por su parte, el teorema del coseno en ABO da

$$\overline{AB}^2 = 2R^2(1 - \cos\phi).$$

Eliminando O_1O_2 y $\cos\phi$ entre estas tres últimas igualdades obtenemos

$$t_{12}^2 = (R - r_1)^2 + (R - r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2 - 2(R - r_1)(R - r_2)\left(1 - \frac{AB^2}{2R^2}\right)$$

que se simplifica hasta llegar a

$$t_{12} = \frac{AB}{R}\sqrt{(R - r_1)(R - r_2)} \qquad (3).$$

De una forma análoga, si k_1 y k_2 son tangentes exteriores a k se obtendría

$$t_{12} = \frac{AB}{R}\sqrt{(R + r_1)(R + r_2)};$$

Si k_1 es tangente exteriormente a k y k_2 lo es interiormente, entonces la longitud de una tangente común *interior* es

$$t' = \frac{AB}{R}\sqrt{(R + r_1)(R - r_2)}.$$

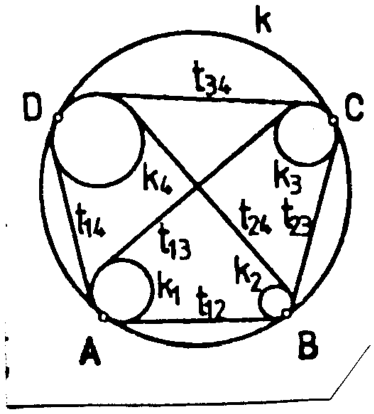
Nota : Estos resultados se pueden encontrar en $[5]y[6]$.

4.El teorema generalizado de Ptolomeo, o teorema de Casey.

El geómetra irlandés John Casey publicó en Dublin en 1881 un famoso libro, titulado *A Sequel to the first six Books of the Elements of Euclid*, (abreviado su título posteriormente hasta *A Sequel to Euclid*) en el que incluye la generalización del primer teorema de Ptolomeo, y en una nota al pie en su página 104 dice textualmente : *Esta extensión del teorema de Ptolomeo apareció por primera vez en un artículo mío en los Proceedings of the Royal Irish Academy*, 1866. El enunciado es el siguiente :

Si las circunferencias k_1, k_2, k_3 y k_4 son tangentes a una misma circunferencia (o recta), y t_{ij} son las longitudes de las tangentes comunes exteriores a k_i y k_j entonces se verifica la relación

$$t_{12}t_{34} + t_{23}t_{14} = t_{13}t_{24}$$



Con ayuda de los resultados del párrafo anterior, la demostración es inmediata, como veremos. Conviene notar antes que el resultado sigue siendo válido cuando algunos de los radios de k_i son cero, lo que producirá interesantes demostraciones sencillas de resultados geométricos complicados, como anunciábamos al comienzo. Si todos los k_i son cero, se obtiene el primer teorema de Ptolomeo. Casey estableció además que la relación anterior es una condición suficiente para que los círculos k_i sean tangentes a un círculo dado, y una demostración de la suficiencia se puede encontrar en el ejercicio II. 240 (páginas 330-334) del excelente libro de Igor Shariguin *Problemas de geometría*. *Planimetría*, Ed. Mir, Moscú 1989. Es realmente notable disponer de una demostración del recíproco del teorema de Casey en un libro tan popular como el de Shariguin, dado que anteriormente había sido probado con restricciones (v. [7]).

Demostración del teorema de Casey:

$$\begin{aligned} t_{12}t_{34} + t_{14}t_{23} &= \left(\frac{AB \bullet CD + AD \bullet BC}{R^2}\right)\sqrt{(R-r_1)(R-r_2)(R-r_3)(R-r_4)} \\ &= \frac{AC \bullet BD}{R^2}\sqrt{(R-r_1)(R-r_3)}\sqrt{(R-r_2)(R-r_4)} \\ &= t_{13}t_{24}.\blacksquare \end{aligned}$$

5.Generalización del segundo teorema de Ptolomeo

Escribiendo el segundo teorema de Ptolomeo en la forma

$$\frac{AB \bullet AD + CB \bullet CD}{BA \bullet BC + DA \bullet DC} = \frac{AC}{BD}$$

se demuestra que

$$\frac{t_{12}t_{14}(R-r_3) + t_{23}t_{34}(R-r_1)}{t_{12}t_{23}(R-r_4) + t_{14}t_{34}(R-r_2)} = \frac{t_{13}}{t_{24}}.$$

En efecto, basta sustituir y hacer operaciones para obtener el resultado.■

6.Ejemplos resueltos

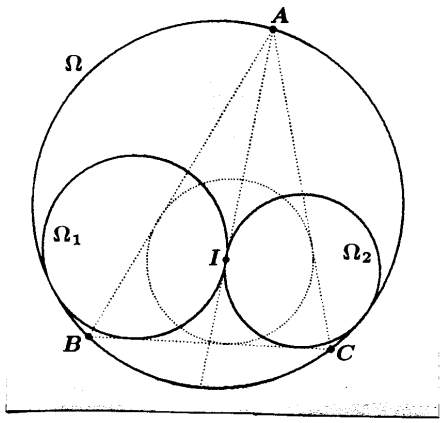
En los artículos rumanos y búlgaro mencionados se ofrecen 18 aplicaciones del primer teorema generalizado de Ptolomeo y 4 del segundo. No las expondremos todas resueltas, dejando algunas de ellas como ejercicios.

Shailesh Shirali ofrece en [4] dos aplicaciones del teorema directo y del recíproco del teorema de Casey. La primera es el más bello problema de Geometría propuesto por la India en la I.M.O. de Moscú de 1992 :

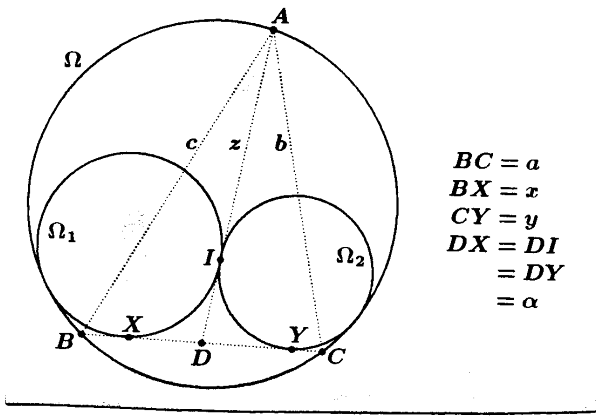
Ejemplo 1

Las circunferencias Ω_1 *y* Ω_2 *son exteriormente tangentes en el punto I, y ambas son tangentes interiormente a una tercera,* Ω*. Una tangente común a las dos primeras corta a la tercera en B y C, mientras que la tangente común en I corta a la tercera en A, del mismo lado de BC que I.*

Demostrar que I es el incentro de ABC.



Considerando la configuración de la figura siguiente, donde x e y son, respectivamente, las longitudes de las tangentes desde B y C a Ω_1 y a Ω_2, D es $AI \cap BC$; $z = |AI|, u = |ID|$ y a, b, c son los lados de ABC,



Aplicando el teorema de Casey a las dos cuaternas de círculos (A, Ω_1, B, C) y (A, Ω_2, C, B) obtenemos

$$az + bx = c(2u + y) \quad (1)$$
$$az + cy = b(2u + x) \quad (2).$$

Restando (2) de (1) resulta

$$bx - cy = u(c - b) \Rightarrow \frac{x + u}{y + u} = \frac{c}{b} \Rightarrow$$
$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Leftrightarrow \text{AI es bisectriz de } \widehat{BAC} \Rightarrow$$
$$BD = \frac{ac}{b + c}$$

Sumando (1) y (2) resulta

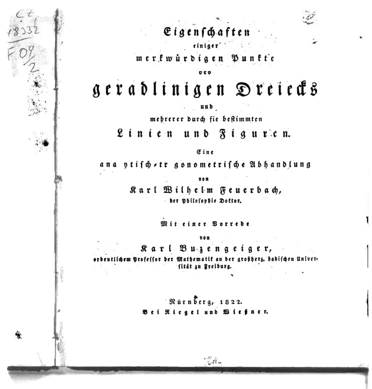
$$az = u(b+c) \Rightarrow \frac{z}{u} = \frac{b+c}{a} \Rightarrow$$
$$\frac{AI}{ID} = \frac{AB}{BD} \Rightarrow BI \text{ es bisectriz de } \widehat{ABC}.$$

Esto prueba el resultado.■

Cuando este problema fué rechazado por el Jurado de la I.M.O. 92, la representante de Colombia comentó en voz alta : *Se acaba de rechazar el más bello problema de Geometría de este año*. Suscribo plenamente su opinión.

Ejemplo 2 (**El teorema de Feuerbach**, **1822**)

A continuación, y como curiosidad bibliográfica, reproduzco la primera página del libro donde Feuerbach demostró el teorema que lleva su nombre. La edición es de 1822. La ilustración sobre su teorema, que aparece después del enunciado, no es de esta edición, porque la existente, en papel azulado y líneas con tinta muy finas, se resistía a ser reproducida en una calidad mínimamente visible.

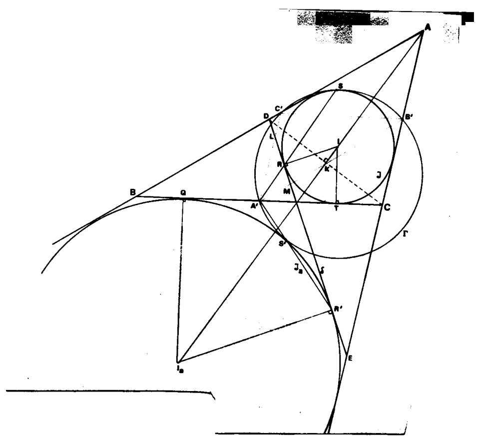


Eigenschaften
einiger
merkwürdigen Punkte
des
geradlinigen Dreiecks
und
mehrerer durch sie bestimmten
Linien und Figuren.
Eine
analytisch-trigonometrische Abhandlung
von
Karl Wilhelm Feuerbach,
der Philosophie Doktor.

Mit einer Vorrede
von
Karl Buzengeiger,
ordentlichem Professor der Mathematik an der großherz. badischen Universität zu Freiburg.

Nürnberg, 1822.
Bei Riegel und Wießner.

El círculo inscrito en un triángulo es tangente al círculo de los nueve puntos (**que pasa por los puntos medios de los lados del triángulo**)



Supongamos que los lados BC, CA y AB del triángulo tienen como puntos medios a D,E,F respectivamente, y sea Ω el círculo inscrito. Consideramos la cuaterna de círculos (D,E,F,Ω). Obtenemos las siguientes longitudes para los segmentos de tangentes que se indican :

$$t_{DE} = \frac{c}{2}, t_{DF} = \frac{b}{2}, t_{EF} = \frac{a}{2}$$
$$t_{D\Omega} = \left|\frac{a}{2} - (s-b)\right| = \left|\frac{b-c}{2}\right|$$
$$t_{E\Omega} = \left|\frac{b}{2} - (s-c)\right| = \left|\frac{a-c}{2}\right|$$
$$t_{F\Omega} = \left|\frac{c}{2} - (s-a)\right| = \left|\frac{b-a}{2}\right|$$

donde $s = \frac{a+b+c}{2}$.

Con objeto de aplicar el recíproco del teorema de Casey necesitamos comprobar si, para alguna combinación de signos + y –, se tiene

$$\pm c(b-a) \pm a(b-c) \pm b(a-c) = 0,$$

lo cual es inmediato. Por lo tanto, existe un círculo que es tangente a los círculos D,E,F (de radio 0) y Ω. Como el círculo que pasa por D,E y F es el de los nueve puntos, el teorema de Feuerbach queda demostrado.■

El mismo procedimiento permite demostrar que el círculo de los 9 puntos es tangente a los círculos exinscritos, *mutatis mutandis*.

Ejemplo 3 : **El problema de Victor Thébault** (**1938**)

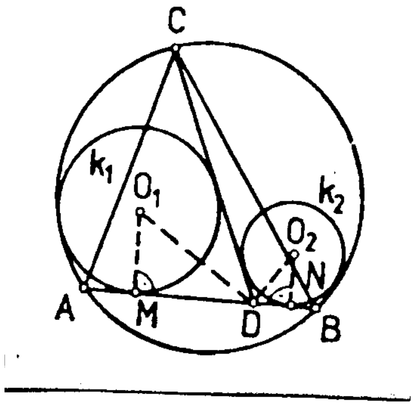
En 1938, el famoso problemista francés Víctor Thébault propuso en el *American Mathematical Monthly* el siguiente problema:

Sea D un punto del lado AB del triángulo ABC. **El círculo** $k_1(O_1,r_1)$ **es tangente interiormente al círculo circunscrito** k **de ABC**, **es tangente a AB en M y tangente a CD** ; **por su parte**, **el círculo** $k_2(O_2,r_2)$ **es tangente interiormente a** k, **tangente a DB en N y tangente a CD**. **Si** r **es el inradio de ABC**, **demostrar que**

$$r = r_1 \bullet \cos^2\frac{\alpha}{2} + r_2 \bullet \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

donde $\alpha = \widehat{ADC}$.

Este problema no fué resuelto en el *Monthly* hasta 1983, pero la solución completa no fué publicada porque la única recibida, del aficionado inglés a la Geometría (pero no matemático profesional) K.B. Taylor, ocupa 24 páginas de cálculos (tengo un ejemplar que me envió el autor). Más tarde, en 1986, Gerhard Turwald publicó una solución sensiblemente más corta en la revista suiza *Elemente der Mathematik*.En 1989, el holandés G.R.Veldkamp envió a *Crux Mathematicorum* una solución suya del problema, publicada en 1973 en una revista holandesa de no muy extendida circulación, el *Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde*, y que debió pasar inadvertida a los redactores del *Monthly*. Para completar la historia, a finales de 1989 *Elemente der Mathematik* publicó otra solución del problema, sin usar trigonometría, completamente sintética, probando resultados más generales que incluyen el problema de Thébault como caso particular. Debe añadirse que en el enunciado original de Thébault la relación pedida entre r, r_1, r_2 y α era errónea, y además pedía demostrar que O_1 y O_2 están alineados con el incentro de ABC (lo cual es verdad).



Sean $x = DM, y = DN$. Aplicando el teorema de Casey a (A, B, C, k_1) obtenemos:

$$c(CD - x) + (AD - x)a = b(BD + x)$$
$$\Rightarrow x(a + b + c) = a \bullet AD + c \bullet CD - b \bullet BD$$

Aplicándolo otra vez a (A, B, k_2, C) nos da:

$$y(a + b + c) = c \bullet CD + b \bullet BD - a \bullet AD$$

Sumando miembro a miembro,

$$x + y = \frac{2c \bullet CD}{a + b + c}.$$

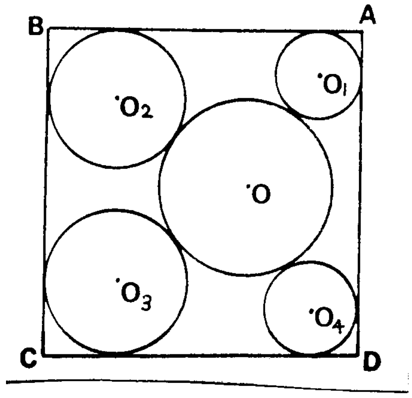
Pero, en O_1MD, $x = r_1 \cot(\alpha/2)$, y en $O_2ND, y = r_2 \tan(\alpha/2)$, luego

$$r_1 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + r_2 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{c \bullet CD \bullet \sin\alpha}{a + b + c} = \frac{c \bullet h_c}{2s} = \frac{S}{s} = r. \blacksquare$$

Ejemplo 4 : **Un problema japonés de 1874**

Durante la Restauración *Meiji* en Japón, el país estuvo aislado de Occidente y los matemáticos japoneses descubrieron por sí mismos muchos resultados geométricos, cuyas aplicaciones, dibujadas en tabletas de madera (*Sangaku*) se colgaban en las entradas de los templos *en honor de los dioses y para gloria de sus autores*. Presentamos aquí un ejemplo de 1874 :

Un círculo $O(r)$ **es interior a un cuadrado ABCD**, **de lado** a; **los círculos** $O_i(r_i), i = 1,2,3,4$ **son tangentes a lados adyacentes del cuadrado**, **y tangentes exteriores a** $O(r)$. **Hallar la relación entre** r_i **y** a.



Necesitamos las longitudes de la tangentes exteriores comunes a cada par de círculos, lo que se escribe inmediatamente. Así se llega a la ecuación

$$(a-r_1-r_2)(a-r_3-r_4)+(a-r_1-r_4)(a-r_2-r_3)$$
$$=\sqrt{2(a-r_1-r_3)^2-(r_1-r_3)^2}\sqrt{2(a-r_2-r_4)^2-(r_2-r_4)^2}$$

que conduce a una ecuación cuadrática en a, y finalmente

$$a=\frac{2(r_1r_3-r_2r_4)+\sqrt{2(r_1-r_2)(r_1-r_4)(r_3-r_2)(r_3-r_4)}}{r_1-r_2+r_3-r_4}.\blacksquare$$

7.Problemas propuestos

1.Sea el triángulo isósceles ABC, con AC = BC) y k su círculo circunscrito. El círculo k_1 es tangente interiormente al triángulo en $M \in AB$ y tangente interiormente a k. Demostrar que la longitud t de la tangente desde C a k_1 no depende de la elección de k_1. Calcular t.

2.Sea C un punto del diámetro AB del círculo k. Sea k_1 el círculo de diámetro AC y k_2 el de diámetro CB. La perpendicular a AB en C corta a k en M y N. Hallar la longitud de la tangente común a k_1 y k_2.

3.Tres círculos de radios iguales son tangentes exteriores entre sí dos a dos y tangentes interiores al círculo k. Desde un punto cualquiera M situado en la circunferencia k se trazan las tangentes a los tres círculos. Demostrar que una de ellas es igual a la suma de las otras dos (teorema de Pompeiu), y menor o igual que $2R\left(\sqrt{3}-1\right)$. ¿Cuándo se verifica la igualdad?

Si r es el radio común a los tres círculos, y R el de k, probar que $r=R\sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right)$

4.El círculo inscrito en ABC tiene radio r. Desde C se traza la altura CH sobre AB. Los círculos $k_1(r_1)$ y $k_2(r_2)$ son tangentes interiores a k, y tangentes a AB y a AH y BH, respectivamente. Probar que $r_1+r_2=2r$.

5.Sea R el radio del círculo circunscrito a un triángulo y r el del inscrito. Sean r_1, r_2, r_3 los radios de tres círculos, tangentes a dos de los lados del triángulo y al círculo circunscrito. Probar que

$$4r \le r_1+r_2+r_3 \le 2R.$$

6. (Olimpiada Británica 1986) Las rectas paralelas t_1, t_2 son tangentes al círculo k, de radio R. El círculo $k_1(r_1)$ es tangente a t_1 y a k, mientras que el círculo $k_2(r_2)$ es tangente a t_2, a k y a k_1. Se supone que todas las tangencias son exteriores; t_1, k y k_1 no tienen puntos comunes. Expresar R mediante r_1 y r_2.

7.En el círculo $k(O,R)$ se inscribe un triángulo ABC cualquiera. Demostrar que cualquiera que sea el punto $M \in BC$ se puede construir un círculo que sea tangente interiormente a k y tangente a BC en M. Determinar el lugar geométrico de los centros de estos círculos.

8.Sea $k(O,R)$ el círculo circunscrito al triángulo arbitrario ABC. $k_i(O_i,r_i)$ son tres círculos tangentes interiores a k y tangentes a los lados AC,AB y BC del triángulo. Demostrar que

$$r_1+r_2+r_3 \le R-\frac{r}{2}$$

$$r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1 \le \frac{R\sqrt{3}}{8}\left(s-2r\sqrt{3}\right)$$

$$r_1r_2r_3 \le \left(\frac{R}{4}\right)^3$$

¿Cuándo se verifican las igualdades?

9. Cuatro círculos $k_i(O_i,r_i)$ son tangentes dos a dos y tangentes interiores al círculo $k(O,R)$ en los puntos A, B,C y D (el cuadrilátero ABCD es convexo). Demostrar que

$$(R-r_1)(R-r_2)(R-r_3)(R-r_4) \ge 4r_1r_2r_3r_4$$

y que el signo igual se verifica si y sólo si

$$r_1 = r_3 \text{ (sea } r \text{ este valor común) y } r_2 = r_4 = \frac{R(R-r)}{R+r}.$$

8.Bibliografía

[1] T.Petrov : El teorema de Casey y sus aplicaciones (en búlgaro), *Matematika & Informatika*, 5/1994.

[2] M.Dragusin : Aplicaciones del teorema de Casey (en rumano), *Gazeta Matematica*, 12/1995.

[3] S. Shirali : On the generalized Ptolemy theorem, *Crux mathematicorum*, 1996, *pp*.49-53.

[4] A.Bulacu : Generalización del segundo teorema de Ptolomeo (en rumano), *Gazeta matematica*, 12/2000.

[5] I. Shariguin : *Problemas de Geometría* (*Planimetría*), Ed. Mir, Moscú, 1989.

[6] Michiwaki, Oyama, Hamada : *An invariant relation in Chains of tangent circles*, *Mathematics magazine*, 48(1975),*p*.80.

[7] R.A.Johnson : *Advanced Euclidean Geometry*, Dover Pub.,1960.

[8] Fukagawa & Pedoe : *Japanese Temple Geometry Problems* (*Sangaku*), Winnipeg, Canada, 1989.

[9] D.Branzei, S.Anitsa, A. Anitsa : *Competentza si performantza in Geometrie* (en rumano), Ed. Minied, Iasi, Rumania, 1992.

[10] D.R.Davis : *Modern College Geometry*. Addison-Wesley Press, 1949.

[11] J. Casey : *A Sequel to the First six boks of the Elements of Euclid*. Dublin U.P., 1892.