VEKTORI I PRAVAC

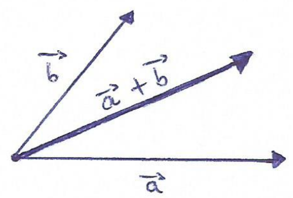
NIKA ČALIĆ, 3.d

VEKTORI

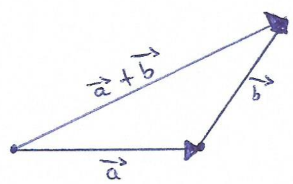
- VEKTOR - usmjerena dužina određena iznosom, smjerom i orjentacijom
- Smjer - određen je pravcem na kojem vektor leži
- Orjentacija - označuje se strelicom
- Isti vektori - imaju isti smjer, duljinu i orjentaciju
- Suprotni vektori - imaju isti smjer, ali različitu orjentaciju
- Jedinični vektor - vektor duljine 1
  - jedinični vektor na x osi : $\vec{i}$
  - jedinični vektor na y osi : $\vec{j}$

KOLINEARNOST vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ $\quad \vec{a} = k \cdot \vec{b}$

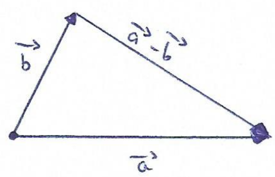
ZBRAJANJE vektora : a) pravilo paralelograma



b) pravilo trokuta



ODUZIMANJE VEKTORA



Koordinatni prikaz vektora $\vec{AB}$: $\vec{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$

Duljina vektora $\vec{a}$: $|\vec{a}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Kut između 2 vektora :

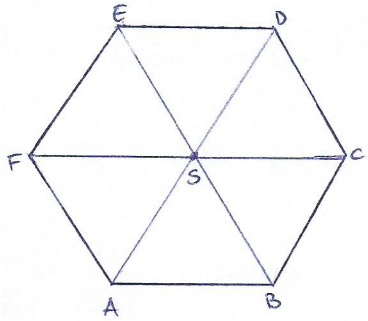
$$\cos \varphi = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j}$

$\vec{b} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j}$

ZADATCI - VEKTORI

1. Neka su A, B, C, D, E, F vrhovi pravilnog šesterokuta, a točka S sjecište dijagonala. Izračunajte:
   a) $\vec{AB} + \vec{SD} + \vec{SF}$
   b) $\vec{AF} - \vec{DE}$



Rješenje: a) $\vec{AB} + \vec{SD} + \vec{SF}$

$\vec{SD} = \vec{BC} \qquad \vec{SF} = \vec{CS}$

$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CS} = \vec{AC} + \vec{CS} = \vec{AS}$

b) $\vec{AF} - \vec{DE}$

$\vec{ED} = \vec{FS}$

$\vec{AF} - \vec{DE} = \vec{AF} + \vec{ED} = \vec{AF} + \vec{FS} = \vec{AS}$

2. Koliki kut zatvaraju vektori $2\vec{a} + \vec{b}$ i $\vec{a} - 2\vec{b}$ ako je $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$ i $\vec{b} = -\vec{i} - 2\vec{j}$

Rješenje: $\vec{u} = 2\vec{a} + \vec{b} = 2(2\vec{i} - \vec{j}) + (-\vec{i} - 2\vec{j}) = 4\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{i} - 2\vec{j} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$

$\vec{v} = \vec{a} - 2\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} - 2(-\vec{i} - 2\vec{j}) = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{i} + 4\vec{j} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$

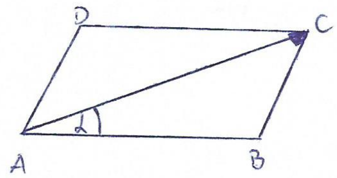
$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2} \cdot \sqrt{v_x^2 + v_y^2}} = \frac{12 - 12}{\sqrt{25} \cdot \sqrt{25}} = 0$$

$$\vec{u} \perp \vec{v}$$

$$\measuredangle(\vec{u}, \vec{v}) = 90^\circ$$

Zatvaraju pravi kut.

3. Zadana su tri vrha paralelograma $ABCD$ $A(2,1)$, $B(-2,4)$, $D(0,-3)$. Odredite:
   a) koordinate vrha C
   b) duljinu dijagonale $\vec{AC}$
   c) kut između vektora $\vec{AC}$ i $\vec{AB}$



Rješenje:

a) koordinate vrha C $\qquad C(x_C, y_C)$

$\vec{AB} = \vec{DC}$

$\vec{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} \qquad \vec{DC} = (x_C - 0)\vec{i} + (y_C + 3)\vec{j}$

$\vec{AB} = (-2-2)\vec{i} + (4-1)\vec{j}$

$\vec{AB} = -4\vec{i} + 3\vec{j} \qquad x_C\vec{i} + (y_C + 3)\vec{j} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$

$$\left.\begin{aligned} x_C &= -4 \\ y_C + 3 &= 3 \\ y_C &= 0 \end{aligned}\right\} \quad C(-4, 0)$$

b) duljina dijagonale $\vec{AC}$

$$\vec{AC} = (x_C - x_A)\vec{i} + (y_C - y_A)\vec{j}$$

$$\vec{AC} = (-4-2)\vec{i} + (0-1)\vec{j}$$

$$\vec{AC} = -6\vec{i} - \vec{j}$$

$$|\vec{AC}| = \sqrt{(-6)^2 + (-1)^2} = \sqrt{36+1} = \sqrt{37}$$

c) kut između vektora $\vec{AC}$ i $\vec{AB}$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} = \frac{-4\cdot(-6) + 3\cdot(-1)}{5 \cdot \sqrt{37}} = \frac{21}{5\sqrt{37}}$$

$$\alpha = 46°19'55,99''$$

4. Zadani su vektori $\vec{a} = -3\vec{i} + 6\vec{j}$ i $\vec{b} = 8\vec{i} - 3\vec{j}$. Odredite vektor $\vec{c}$ ako je $\vec{a} \cdot \vec{c} = 11$ i $\vec{b} \cdot \vec{c} = 1$.

Rješenje:

$$\vec{c} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = -3c_x + 6c_y$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = 8c_x - 3c_y$$

$$-3c_x + 6c_y = 11$$

$$8c_x - 3c_y = 1 \quad / \cdot 2$$

$$-3c_x + \cancel{6c_y} = 11$$

$$16c_x - \cancel{6c_y} = 2$$

$$13c_x = 13$$

$$\underline{\underline{c_x = 1}} \implies -3\underline{\underline{c_x}} + 6c_y = 11$$

$$6c_y = 11 + 3$$

$$c_y = \frac{7}{3}$$

$$\vec{c} = \vec{i} + \frac{7}{3}\vec{j}$$

5. Izračunajte $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})$ ako je kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jednak $135°$ i ako je $|\vec{a}| = 4$ i $|\vec{b}| = 3\sqrt{2}$.

Rješenje:

$$(\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} - 2 \cdot \vec{b} \cdot \vec{b}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = 4 \cdot 4 \cdot \cos 0° = 16$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \cos 135° = -12$$

$$\vec{b} \cdot \vec{b} = 3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \cos 0° = 18$$

$$(\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b}) = 16 + 2 \cdot (-12) - (-12) - 18 \cdot 2 = -32$$

6. Neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dva nekolinearna vektora. Odredi realni broj x za koji su vektori $\vec{c} = (x+2)\vec{a} + \vec{b}$ i $\vec{d} = 2x\vec{a} + (x-1)\vec{b}$ kolinearni vektori suprotne orijentacije.

Rješenje: $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su nekolinearni vektori.

$\vec{c} = (x+2)\vec{a} + \vec{b}$

$\vec{d} = 2x\vec{a} + (x-1)\vec{b}$

$\vec{c} = k\vec{d}$

$(x+2)\vec{a} + \vec{b} = 2kx\vec{a} + k(x-1)\vec{b}$

$x+2 = 2kx \Rightarrow k = \frac{x+2}{2x}$

$1 = k(x-1)$

$1 = \frac{x+2}{2x}(x-1) \quad / \cdot 2x$

$2x = (x+2)(x-1)$

$2x = x^2 + x - 2$

$x^2 - x - 2 = 0$

$x_1 = 2 \qquad x_2 = -1$

Za $x = 2$ je $\vec{c} = 4\vec{a} + \vec{b}$ i $\vec{d} = 4\vec{a} + \vec{b}$ (jednaki vektori)

Za $x = -1$ je $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ i $\vec{d} = -2\vec{a} - 2\vec{b}$ (kolinearni vektori suprotne orijentacije)

7. Odredi vektor $\vec{b}$ okomit na vektor $\vec{a} = -2\vec{i} + \vec{j}$ ako je $|\vec{b}| = \sqrt{5}$.

Rješenje: $\vec{b} \perp \vec{a} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow -2b_x + b_y = 0 \Rightarrow b_y = 2b_x$

$|\vec{b}| = \sqrt{5}$

$\sqrt{b_x^2 + b_y^2} = \sqrt{5} \quad /^2$

$b_x^2 + b_y^2 = 5$

$b_x^2 + 4b_x^2 = 5$

$5b_x^2 = 5 \quad /:5$

$b_x^2 = 1 \quad /\sqrt{\ }$

$b_x = \pm 1$

$b_y = \pm 2$

$\vec{b} = \pm(\vec{i} + 2\vec{j})$

PRAVAC

EKSPLICITNI OBLIK

$$y = kx + l$$

k - koeficijent smjera

l - odsječak pravca na y-osi

IMPLICITNI OBLIK

$$Ax + By + C = 0$$

SEGMENTNI OBLIK

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$$

m - odsječak na x-osi

n - odsječak na y-osi

Površina trokuta kojeg pravac zatvara s koordinatnim osima : $P = \frac{|m \cdot n|}{2}$

Jednadžba pravca određenog jednom točkom $T(x_1, y_1)$: $y - y_1 = k(x - x_1)$

Koeficijent smjera pravca kroz točke $T_1(x_1, y_1)$ i $T_2(x_2, y_2)$: $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Kut između 2 pravca : $\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|$

Uvjet paralelnosti : $k_2 = k_1$

Uvjet okomitosti : $k_2 = -\frac{1}{k_1}$

Udaljenost 2 točke : $d(A, B) = |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Polovište $\overline{AB}$: $P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

Udaljenost točke $T(x_0, y_0)$ od pravca $Ax + By + C = 0$: $d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$

ZADATCI - PRAVAC

1. Zadane su točke $A(4,-7)$, $B(1,2)$ i $C(-1,-2)$. Napiši implicitni oblik jednadžbe pravca kroz točke A i B.

Rješenje:

$$p_{AB} \ldots \quad y - y_A = \underline{\underline{k}} \cdot (x - x_A)$$

$$k = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

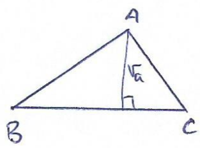
$$k = \frac{2+7}{1-4} = -\frac{9}{3} = -3$$

$$y + 7 = -3 \cdot (x-4)$$

$$y + 7 = -3x + 12$$

$$3x + y - 5 = 0$$

2. Točke $A(-3,-1)$, $B(6,2)$ i $C(-1,3)$ vrhovi su trokuta ABC.
   a) Odredite jednadžbu pravca koji sadrži visinu iz vrha A tog trokuta.
   b) Odredite duljinu visine iz vrha C tog trokuta.
   c) Odredite veličinu kuta pri vrhu A tog trokuta.



Rješenje:

a) $$k_{BC} = \frac{3-2}{-1-6} = \frac{1}{-7} = -\frac{1}{7} \Rightarrow k_{\perp} = 7$$

$$A(-3,-1),\ k = 7 \Rightarrow v_a \ldots \quad y+1 = 7(x+3)$$

$$y = 7x + 21 - 1$$

$$y = 7x + 20$$

b) $$k_{AB} = \frac{2+1}{6+3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \Longrightarrow \quad p_{AB} \ldots \quad y+1 = \frac{1}{3}(x+3)$$

$$y + \cancel{1} = \frac{1}{3}x + \cancel{1} \quad / \cdot 3$$

$$3y = x$$

$$x - 3y = 0$$

$$|v_c| = d(C, p_{AB}) = \frac{|-1-3\cdot 3|}{\sqrt{10}} = \frac{10}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{10\sqrt{10}}{10}$$

$$|v_c| = \sqrt{10}$$

c) $k_1 = k_{AB} = \frac{1}{3}$

$k_2 = k_{AC} = \frac{3+1}{-1+3} = \frac{4}{2} = 2$

$$tg\,\alpha = \frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2} = \frac{2-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}\cdot 2} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{3}} = 1$$

$\alpha = 45°$

3. Ishodištem koordinatnog sustava postavi pravac paralelan pravcu $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = -1$

Rješenje :

1. korak - eksplicitni oblik jednadžbe pravca
2. korak - odredi k
3. korak - odredi $k_{\parallel}$
4. korak - napiši jednadžbu pravca p_0

$\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = -1 \;/\cdot 3$

$\frac{3}{4}x + y = -3$

$y = -\frac{3}{4}x - 3$

$k = -\frac{3}{4}$

$k_{\parallel} = -\frac{3}{4}$

$O(0,0)$ $p_0 \ldots y - y_1 = k\cdot(x - x_1)$

$y = -\frac{3}{4}x$

4. Koji kut zatvaraju pravci $p_1 \ldots 2x - y + 3 = 0$ i $p_2 \ldots 3x + 4y + 7 = 0$?

Rješenje :

$y = 2x + 3 \Rightarrow k_1 = 2$

$4y = -3x - 7 \;/:4$

$y = -\frac{3}{4}x - \frac{7}{4} \Rightarrow k_2 = -\frac{3}{4}$

$$tg\,\varphi = \left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}\right|$$

$$tg\,\varphi = \left|\frac{-\frac{3}{4}-2}{1+2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)}\right| = \frac{11}{2}$$

$\varphi = 79°\,41'\,43''$

5. Pravac prolazi točkom $B(8,6)$ i s koordinatnim osima zatvara trokut površine 12. Kako glasi jednadžba pravca?

Rješenje:

$$\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1 \qquad \frac{|m\cdot n|}{2}=P \;/\cdot 2$$

$$\frac{8}{m}+\frac{6}{n}=1 \qquad |m\cdot n|=2P$$

$$|m\cdot n|=24$$

1° $m\cdot n=24$

$$m=\frac{24}{n}$$

$$\frac{8}{\frac{24}{n}}+\frac{6}{n}=1$$

$$\frac{n}{3}+\frac{6}{n}=1 \;/\cdot 3n$$

$$n^2-3n+18=0$$

Nema rješenja u $\mathbb{R}$.

2° $m\cdot n=-24$

$$m=-\frac{24}{n}$$

$$\frac{8}{-\frac{24}{n}}+\frac{6}{n}=1$$

$$-\frac{n}{3}+\frac{6}{n}-1=0 \;/\cdot 3n$$

$$n^2+3n-18=0$$

$n_1=-6$ $\qquad$ $n_2=3$

$m_1=4$ $\qquad$ $m_2=-8$

$p_1\ldots \frac{x}{4}+\frac{y}{-6}=1 \;/\cdot(-12)$ $\qquad$ $p_2\ldots \frac{x}{-8}+\frac{y}{3}=1 \;/\cdot(-24)$

$p_1\ldots\ 3x-2y-12=0$ $\qquad$ $p_2\ldots\ 3x-8y+24=0$

6. Za koji se najmanji kut mora zakrenuti pravac $3x-5y+12=0$ oko svoje nul točke kako bi prošao točkom $T(-1,5)$?

Rješenje:

$T(-1,5)$

$$3x-5y+12=0$$

$$5y=3x+12$$

$$y=\frac{3}{5}x+\frac{12}{5}$$

nul točka: $0=\frac{3}{5}x+\frac{12}{5} \;/\cdot 5$

$$3x+12=0$$

$$x=-4$$

$$T_1(-4,0)$$

pravac prolazi točkama T i T_1.

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

$$y-0=\frac{5-0}{-1+4}(x+4)$$

$$y=\frac{5}{3}(x+4)$$

$$y=\frac{5}{3}x+\frac{20}{3}$$

$k_1=\frac{5}{3}$ i $k_2=\frac{3}{5}$

$$\operatorname{tg}\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|=\left|\frac{\frac{3}{5}-\frac{5}{3}}{1+\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{3}}\right|=\frac{8}{15}$$

$$\varphi=28^\circ 4' 21''$$

7. Dvije stranice pravokutnika pripadaju pravcima $3x-4y+5=0$ i $4x+3y-5=0$. Jedan njegov vrh je točka $A(3,-4)$. Kolike su duljine stranica pravokutnika?

Rješenje:

$A(3,-4)$

$p \ldots \ 3x-4y+5=0$

$q \ldots \ 4x+3y-5=0$

Prvo odredimo udaljenost točke A od pravca p

$x_0=3, \quad y_0=-4$

$A=3, \ B=-4, \ C=5$

$$a=d(A,p)=\frac{|3\cdot 3+(-4)\cdot(-4)+5|}{\sqrt{9+16}}=\frac{30}{5}=6$$

Sada odredimo udaljenost točke A od pravca q

$x_0=3, \quad y_0=-4$

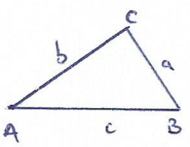
$A=4, \ B=3, \ C=-5$

$$b=d(A,q)=\frac{|4\cdot 3+3\cdot(-4)-5|}{\sqrt{16+9}}=\frac{5}{5}=1$$

Stranice su $a=6$ i $b=1$.

8. Vrhovi trokuta ABC su točke $A(-3,-1)$, $B(7,-6)$, $C(5,5)$. Kolike su duljine visina tog trokuta?

Rješenje:



$A(-3,-1)$

$B(7,-6)$

$C(5,5)$

$v_a, v_b, v_c = ?$

$a=BC \ldots \quad y+6=\frac{5+6}{5-7}(x-7)$

$y+6=-\frac{11}{2}(x-7) \ /\cdot 2$

$2y+12=-11x+77$

$11x+2y-65=0$

$b=AC \ldots \quad y+1=\frac{5+1}{5+3}(x+3)$

$y+1=\frac{6}{8}(x+3)$

$y+1=\frac{3}{4}(x+3) \ /\cdot 4$

$4y+4=3(x+3)$

$3x-4y+5=0$

$c=AC \ldots \quad y+1=\frac{-6+1}{7+3}(x+3)$

$y+1=-\frac{1}{2}(x+3) \ /\cdot 2$

$2y+2=-x-3$

$x+2y-5=0$

$$v_a=d(A,a)=\frac{|11\cdot(-3)+2\cdot(-1)-65|}{\sqrt{121+4}}=\frac{100}{5\sqrt{5}}=4\sqrt{5}$$

$$v_b=d(B,b)=\frac{|3\cdot 7+(-4)\cdot(-6)+5|}{\sqrt{9+16}}=\frac{50}{5}=10$$

$$v_c=d(C,c)=\frac{|1\cdot 5+2\cdot 5+5|}{\sqrt{1+4}}=\frac{20\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{20\sqrt{5}}{5}=4\sqrt{5}$$