

### 3. Nullstellen und Faktorisieren: Vielfachheit von Nullstellen

#### Arbeitsauftrag

In diesem Arbeitsauftrag lernen Sie, wie Sie anhand des vollständig faktorisierten Funktionsterms Aussagen über den Graphenverlauf in der Umgebung von Nullstellen machen können. Das CAS hilft Ihnen dabei, die Graphen darzustellen und den Funktionsterm zu faktorisieren.

Zeichnen Sie mit Ihrem CAS jeweils den Funktionsgraphen:

Funktion zweiten Grades:  $f_2(x) = x^2 - 2x$ ;  $D_{f_2} = \mathbb{R}$

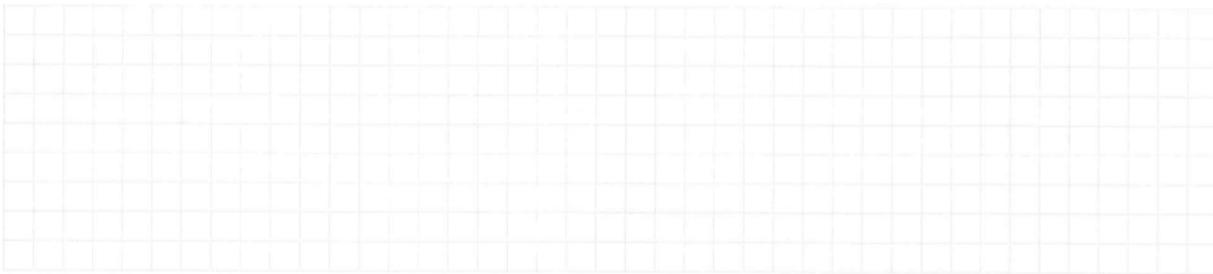
Funktion dritten Grades:  $f_3(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$ ;  $D_{f_3} = \mathbb{R}$

Funktion vierten Grades:  $f_4(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x$ ;  $D_{f_4} = \mathbb{R}$

Funktion fünften Grades:  $f_5(x) = x^5 - 8x^4 + 24x^3 - 32x^2 + 16x$ ;  $D_{f_5} = \mathbb{R}$ .

- a) Beschreiben Sie jeweils den Verlauf der Funktionsgraphen in der Umgebung der Nullstelle  $x = 2$ .  
 b) Faktorisieren Sie die Funktionsterme vollständig und leiten Sie mit diesen einen Zusammenhang hinsichtlich a) her.

Wenn in der vollständig faktorisierten Form einer ganzrationalen Funktion der Exponent ...



Die Vielfachheit einer Nullstelle entspricht dem Exponenten des Linearfaktors in der vollständig faktorisierten Form einer ganzrationalen Funktion.

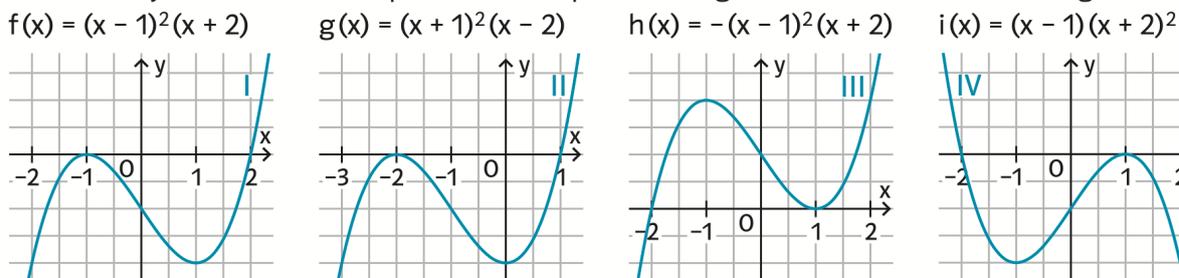
Geben Sie jeweils die Nullstellen und ihre Vielfachheit an.

Funktion	Vollständig faktorisierte Form	Nullstellen mit Vielfachheit
$f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 2x + 2$ ; $D_f = \mathbb{R}$	$f(x) = 2(x - 1)^2(x + 1)$	$x_1 = 1$ (doppelt) $x_2 = -1$ (einfach)
$f(x) = -x^4 - 5x^3 + 14x^2$ ; $D_f = \mathbb{R}$		
$f(x) = x^4 - 4,5x^3 + 6x^2 - 2,5x$ ; $D_f = \mathbb{R}$		
$f(x) = -4x^5 - 4x^3$ ; $D_f = \mathbb{R}$		
$f(x) = (x^2 - 2x + 1)(x - 1)^2$ ; $D_f = \mathbb{R}$		

## Aufgaben

- 1 Geben Sie an, welche Funktionen genau die drei Nullstellen  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = 0$  und  $x_3 = 4$  haben.  
 $f(x) = (x + 2)(x - 4)$        $g(x) = x(x - 2)(x + 4)$        $h(x) = x(x + 2)(x - 4)$   
 $i(x) = x(x + 2)^2(x - 4)^3$        $j(x) = x^2(x - 2)(x + 4)$        $k(x) = (x - 2)x^4(x + 4)^3$

- 2 Ordnen Sie jeder Funktion den passenden Graphen zu. Begründen Sie Ihre Entscheidung.



- 3 Die Abbildung zeigt den Ausschnitt des Graphen einer ganzrationalen Funktion mit sämtlichen Nullstellen. Geben Sie einen möglichen Funktionsterm möglichst niedrigen Grades an.

