Verloop van rationale functies beschrijven

www.karelappeltans.be

April 21, 2024

Contents

1 Algoritme

Doe de volgende stappen om een goede schets van een functie f te krijgen:

1. Bepaal het domein
2. Kijk naar de grenzen van het domein: wat zijn de limieten als $x \to \pm\infty$ of $x \to a$, waar a een singulariteit (pool) is?
3. Kan je een soort symmetrie herkennen?
4. Bepaal de nulpunten van f(x) en het snijpunt met de y-as
5. Bepaal de afgeleiden f' en f'', zoek hiervan de nulpunten. Maak hiervan een tekentabel
6. Schets de grafiek op basis van je bevindingen.

2 Domein en asymptoten

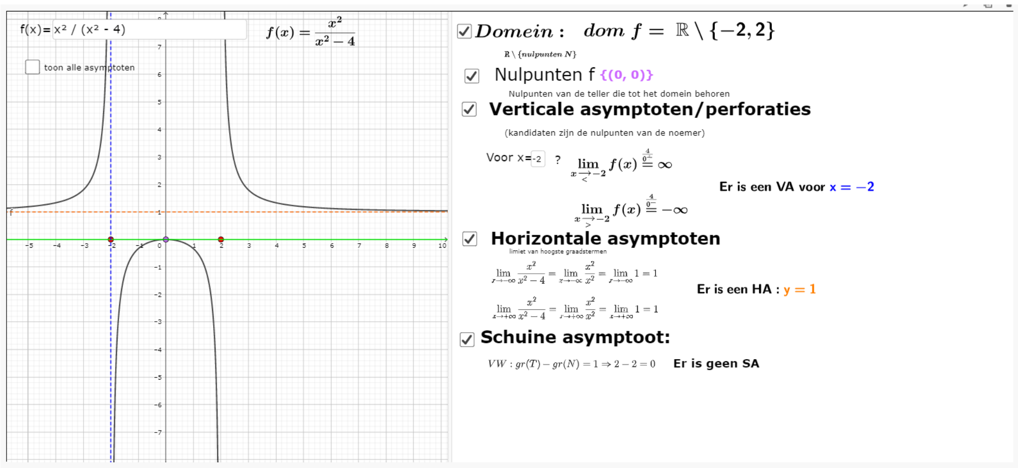


Figure 1: https://www.geogebra.org/m/MpFEGPfT

3 Quotiëntregel afgeleide

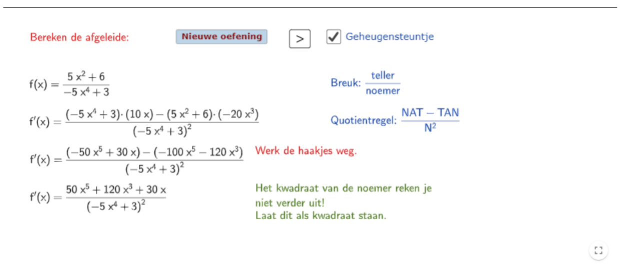


Figure 2: https://www.geogebra.org/m/MpFEGPfT

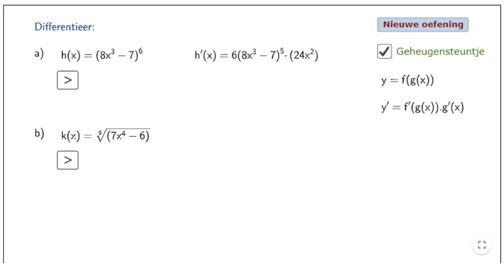


Figure 3: https://www.geogebra.org/m/MpFEGPfT

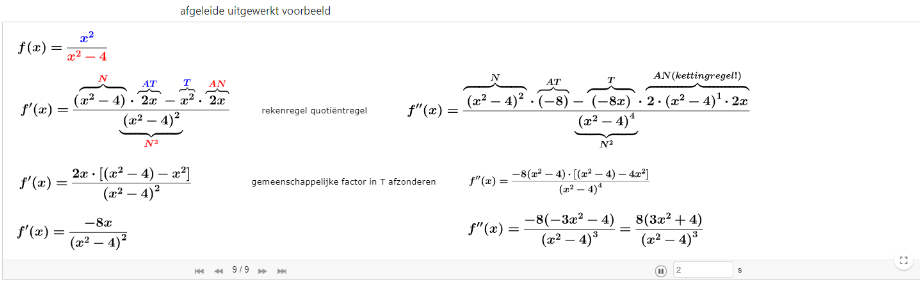


Figure 4: https://www.geogebra.org/m/MpFEGPfT

4 Verloop

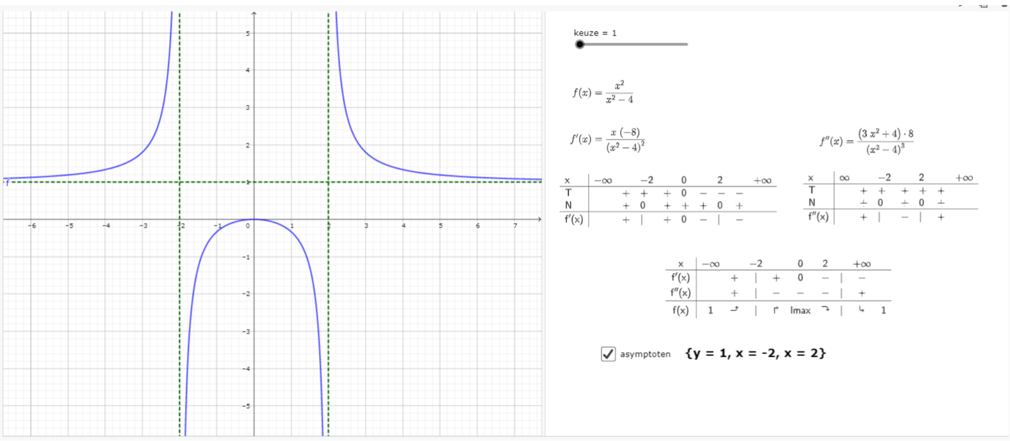


Figure 5: https://www.geogebra.org/m/gceq8KGM

5 Optimalisatieproblemen

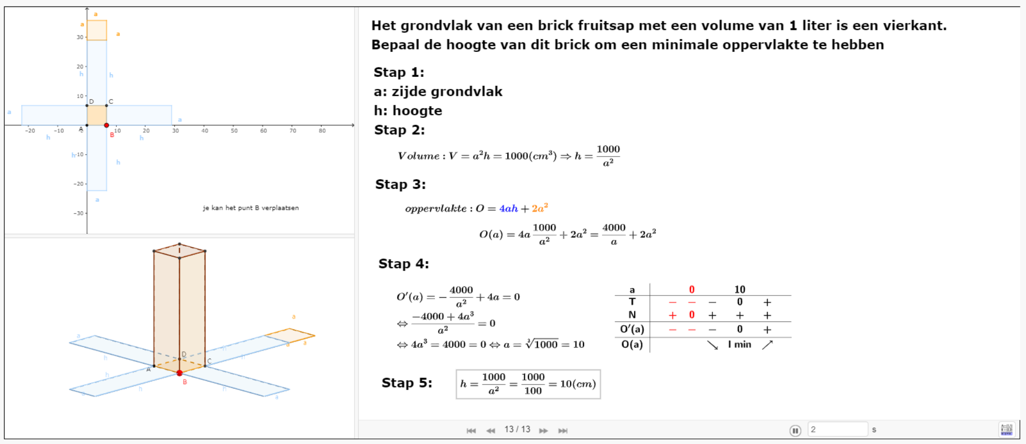


Figure 6: https://www.geogebra.org/m/gceq8KGM

6 Functievoorschriften opstellen

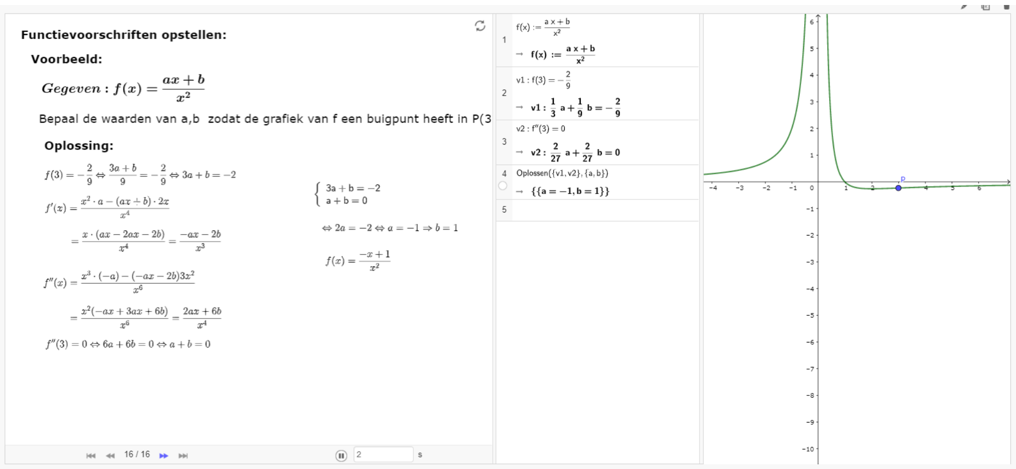


Figure 7: https://www.geogebra.org/m/MpFEGPfT

7 Oefeningen

1. Bepaal het verloop van

   (a) $f(x) = \frac{x^2+4x+4}{x^2-4}$

   (b) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

   (c) $f(x) = \frac{1}{x^2+5x+6}$

   (d) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+2x+1}$

2. Bespreek hoe de grafieken van de volgende functies wijzigen in functie van de parameter m:

   (a) $f(x) = \frac{1}{x^2+2x+m}$

   (b) $f(x) = \frac{x^2+m}{x^2-m}$

3. Gegeven: $f(x) = \frac{x}{2x-1}$ Bepaal de raaklijnen aan de grafiek van f(x) die door het P(-7,1) gaan. Bepaal voor deze raaklijnen ook de raakpunten.

4. Bestaat er een raaklijn aan de grafiek van $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$ die door het punt $P(-1,1)$ gaat?

5. Bepaal het punt waar de rechte door $P(0,4)$ raakt aan de grafiek van $f(x) = x + \frac{1}{x}$

6. Bepaal de waarden van a en b zodat volgende functie overal continu en afleidbaar is:
$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x^2+1} & x \leq 1 \\ ax^2 + bx + 1 & x > 1 \end{cases}$

7. Bepaal de waarde van de parameter a zodat de grafiek van de functie $f(x) = \frac{ax+5}{x^2-1}$ een kritiek punt heeft voor x=2

8. Geef een lineaire benadering voor $f(1.2)$ met $f(x) = \frac{x}{x+1}$

9. Gegeven: $f(x) = \frac{mx}{x^2-m^2}$ Bepaal m zodat de helling van de buigraaklijn 4 is.

10. Gegeven: $f(x) = \frac{4x}{x^2+a}$. Bepaal de waarde van de reële parameter a zodat het punt P $\left(\sqrt{3}, f(\sqrt{3})\right)$ een buigpunt is van de grafiek van f.

11. Gegeven: $f(x) = \frac{x^3+4m}{x^2}$. Voor elke waarde van m is er een lokaal extremum. Toon aan dat al deze extrema op een rechte liggen.

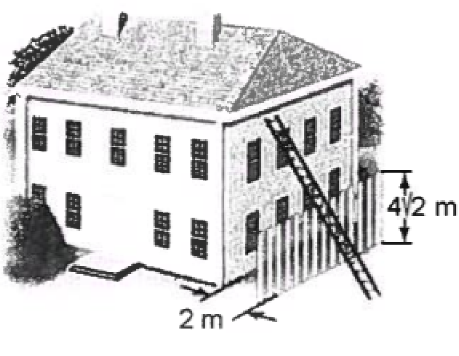
12. Gegeven: $f(x) = \frac{px^2+qx-1}{rx+s}$. Bepaal de waarden van p,q,r,s als de grafiek van f
    - een VA heeft voor $x = \frac{3}{2}$,
    - een SA heeft evenwijdig met $y = -x$,
    - een nulpunt heeft voor $x = \frac{1}{2}$,
    - de rico van de raaklijn in P(1,f(1)) 1 is.

13. Een bepaalde wormsoort tast de sparren in het hoge noorden aan. De natuurlijke vijand zijn de vogels. Het percentage wormen dat kan opgegeten worden kan gemodelleerd worden volgens onderstaand model:
$$f(N) = \frac{14N}{121 + N^2}$$
met N het aantal wormen per m^2. Bepaal de intervallen waar de predatiegraad toe- en afneemt

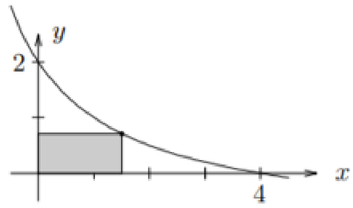
14. Een doos met vierkante bodem en zonder deksel moet een volume hebben van $13500cm^3$. Bepaal de afmetingen zodat minimaal materiaal voor de bodem en zijwanden wordt gebruikt.

15. Een doos met vierkante bodem en zonder deksel wordt bekomen door uit een vierkant stuk karton in de hoeken 4 gelijke vierkanten uit te snijden. De doos moet een inhoud van 25 l hebben. Ook wordt de binnenkant van de doos geverfd. De zijwanden aan een kostprijs van 10 euro/dm^2 en de bodem aan een kostprijs van 4 euro/dm^2. Bepaal de afmetingen zodat de kostprijs minimaal is.

16. Een $4\sqrt{2}$ hoge omheining staat op een afstand van 2m evenwijdig een gebouw. Bepaal de minimale lengte van die ladder die van buiten de omheining tegen de muur van het gebouw geplaatst wordt, zodat de omheining (net) niet geraakt wordt (A. $6\sqrt{3}$)



17. Bepaal de afmetingen van de rechthoek met maximale oppervlakte, waarvan één hoekpunt ligt op de grafiek van $f(x) = \frac{4-x}{2+x}$ zoals afgebeeld.



18. Een rechte met negatieve rico door $P(3,5)$ bakent samen met de x-as en y-as een driehoekig gebied af. Bepaal de waarde van de rico zodat de opp van deze driehoek maximaal is (A. $rico = -\frac{5}{3}$)

19. Teken de grafiek van een functie f die voldoet aan:
   - $f(x)$ is continuous on its entire domain, which is all x except $x = 2$.
   - $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ and $\lim_{x\to\infty} f(x) = 3$.
   - $\lim_{x\to 2} f(x) = \infty$.
   - $f'(x)$ is continuous at all x except $x = -1$, $x = 2$, and $x = 5$.
   - $f'(x) > 0$ for $x < -1$ and for $0 < x < 2$ and for $4 < x < 5$ and for $x > 5$.
   - $f'(x) < 0$ for $-1 < x < 0$ and for $2 < x < 4$.
   - $\lim_{x\to-1^-} f'(x) = 3$ and $\lim_{x\to-1^+} f'(x) = -3$.
   - $\lim_{x\to 5} f'(x) = \infty$.
   - $f''(x) > 0$ for $-4 < x < -1$ and for $-1 < x < 2$ and for $2 < x < 5$.
   - $f''(x) < 0$ for $x < -4$ and for $x > 5$.
   - $f(-4) = -1$, $f(-1) = 4$, $f(0) = 2$, $f(4) = -2$, and $f(5) = 0$.

   Label all horizontal and vertical asymptotes, local extrema, and inflection points.