LK-2, OPERASI PADA MATRIKS

Petunjuk : Lakukan aktivitas sesuai dengan butir-butir pertanyaan atau aktivitas di LKPD ini. Jika lembar LKPD tidak mencukupi, gunakan kertas tambahan.

Matriks dan representasinya

Disajikan tabel penjualan bunga dari tiga toko pada bulan Januari dan Februari 2023 sebagai berikut:

Penjualan Januari

	Toko "Segar"	Toko "Alami"	Toko "Harum"
Mawar	14	18	17
Lili	13	10	15
Carnation	12	11	12
Anggrek	11	12	13

Penjualan Februari

	Toko "Segar"	Toko "Alami"	Toko "Harum"
Mawar	10	12	15
Lili	10	5	10
Carnation	11	9	12
Anggrek	13	11	13

1. Dengan menghilangkan judul kolom dan baris, susunlah bilangan-bilangan pada kedua tabel di atas dalam tampilan baris dan kolom di bawah. Susunan A untuk penjualan bulan Januari, dan B untuk penjualan bulan Februari.

$$A = \begin{pmatrix} __ & __ & __ \\ __ & __ & __ \\ __ & __ & __ \\ __ & __ & __ \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} __ & __ & __ \\ __ & __ & __ \\ __ & __ & __ \\ __ & __ & __ \end{pmatrix}$$

Susunan bilangan dalam bentuk baris dan kolom di atas selanjutnya dikenal sebagai matriks.

2. Notasi a_{ij} atau kadang-kadang ditulis $a_{i,j}$ menyatakan elemen matriks A pada baris ke-i kolom ke-j. Dengan merujuk pada data penjualan di atas, tentukan nilai dan representasi dari masing-masing elemen berikut.

   a. $a_{24} =$ ___ , merepresentasikan _____

   b. $b_{31} =$ ___ , merepresentasikan _____

Penjumlahan Matriks

Total penjualan bunga pada bulan Januari dan Februari disajikan pada tabel berikut:

	Toko "Segar"	Toko "Alami"	Toko "Harum"
Bunga Mawar	24	___	___
Bunga Lili	___	___	___
Bunga Carnation	___	___	___
Bunga Anggrek	___	___	___

3. Jumlah penjualan bulan Januari dan Februari jika disajikan ke dalam matriks adalah

$$A \quad + \quad B \quad = \quad C$$

$$\begin{pmatrix} __ & __ & __ \\ __ & __ & __ \\ __ & __ & __ \\ __ & __ & __ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} __ & __ & __ \\ __ & __ & __ \\ __ & __ & __ \\ __ & __ & __ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} __ & __ & __ \\ __ & __ & __ \\ __ & __ & __ \\ __ & __ & __ \end{pmatrix}$$

4. Dalam konteks penjualan bunga pada tabel, merepresentasikan apakah elemen-elemen matriks C pada:

   a. Baris ke-2 b. Kolom pertama c. Baris dua kolom ketiga (c_{23})

   Jawab:

5. Dua soal di atas merupakan gambaran penjumlahan dua matriks. Secara umum penjumlahan matriks berordo 2×2 adalah;

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} __ + __ & __ + __ \\ __ + __ & __ + __ \end{pmatrix}$$

6. Menurut kalian, apakah matriks berikut dapat dijumlahkan? Berikan argumentasi.

   a. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \\ g \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & g & p \\ f & h & q \end{pmatrix}$

7. Berdasarkan No. 5 dan 6 diatas, jelaskan syarat penjumlahan dua buah matriks.

   Syarat penjumlahan dua buah matriks adalah _____

Perkalian Skalar pada Matriks

8. Karena banyaknya permintaan dari pelanggan ketiga toko bunga memperkirakan adanya penjualan pada bulan Maret 2023 sebesar dua kali lipat dibandingkan bulan Februari. Perkiraan penjualan bulan Maret adalah:

	Toko "Segar"	Toko "Alami"	Toko "Harum"
Mawar	___	___	___
Lili	___	20	___
Carnation	___	___	___
Anggrek	___	___	___

9. Dibandingkan penjualan bulan Februari, tabel pada No.8 di atas dapat dinyatakan ke dalam matriks sebagai

$$A = 2\begin{pmatrix} _ & _ & _ \\ _ & _ & _ \\ _ & _ & _ \\ _ & _ & _ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} _ & _ & _ \\ _ & _ & _ \\ _ & _ & _ \\ _ & _ & _ \end{pmatrix}$$

10. Perkalian pada kasus no. 9 dinamakan sebagai *perkalian skalar* yang merujuk pada perkalian bilangan real dengan sebuah matriks. Jika matriks $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dikalikan dengan skalar k, maka hasil perkaian matriks A dengan skalar k adalah

$$kA = k\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} _ & _ \\ _ & _ \end{pmatrix}$$

11. Untuk lebih memahami materi operasi matriks selesaikanlah soal dibawah ini.

Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 9 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Tentukan

a. $A + B$ b. $A - B$ c. $5A + 2B$

Berlatih Pembuktian (Pengayaan)

12. Jika A, B, C matriks berukuran $m \times n$, serta c, d skalar, buktikan bahwa
    a. $A + B = B + A$
    b. $A + (B + C) = (A + B) + C$
    c. $(cd)A = c(dA)$
    d. $1A = A$
    e. $c(A + B) = cA + cB$
    f. $(c + d)A = cA + dA$

Jawab:

Perkalian Dua Matriks

Amir, Budi, dan Cici akan membeli peralatan ujian berupa pensil, penghapus dan rautan. Daftar jumlah barang yang akan mereka beli dan harga masing-masing toko disajikan dalam tabel berikut:

	Pensil	Peng-hapus	Rautan
Amir	2	1	1
Budi	3	1	1
Cici	2	0	1

	Harga toko X (Rp.)	Harga Toko Y (Rp.)
Pensil	3000	3500
Penghapus	2000	2500
Rautan	4000	4500

	Harga Toko Z (Rp.)
Pensil	2000
Penghapus	2500

Untuk menuntun kalian memahami perkalian dua matriks, isilah tempat kosong berikut dan buatlah kesimpulan berdasarkan pemahaman yang kalian peroleh.

1. Kita akan menghitung harga uang yang dibayarkan Amir, Budi dan Cici (dalam rupiah) untuk membeli ketiga barang itu.

   a. Harga yang harus dibayar oleh Amir jika membeli di toko X adalah

   $$__ \times _____ + __ \times _____ + __ \times _____ = _____$$

   Harga yang harus dibayar oleh Amir jika membeli di toko Y adalah

   $$__ \times _____ + __ \times _____ + __ \times _____ = _____$$

   b. Harga yang harus dibayar oleh Budi jika membeli di toko X adalah

   $$__ \times _____ + __ \times _____ + __ \times _____ = _____$$

   Harga yang harus dibayar oleh Budi jika membeli di toko Y adalah

   $$__ \times _____ + __ \times _____ + __ \times _____ = _____$$

   c. Harga yang harus dibayar oleh Cici jika membeli di toko X adalah

   $$__ \times _____ + __ \times _____ + __ \times _____ = _____$$

   Harga yang harus dibayar oleh Cici jika membeli di toko Y adalah

   $$__ \times _____ + __ \times _____ + __ \times _____ = _____$$

2. Andaikan, tabel kebutuhan pensil, penghapus dan rautan ketiga orang tersebut dinyatakan dalam matriks A, dan tabel harga dinyatakan dalam bentuk matriks B, maka perhitungan jumlah harga yang harus dibayarkan masing-masing dapat disajikan dalam bentuk matriks C. Lengkapi tabel di bawah ini, tuliskan hasil akhir saja.

$$AB = C$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3000 & 3500 \\ 2000 & 2500 \\ 4000 & 4500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} _____ & _____ \\ _____ & _____ \\ _____ & _____ \end{pmatrix}$$

3. Operasi terhadap dua matriks A dan B di atas dinamakan sebagai perkalian matriks. Lengkapi bentuk umum perkalian matriks dalam bentuk umum di bawah ini.

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & s \\ q & t \\ r & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} _\times_+_\times_+_\times_ & _\times_+_\times_+_\times_ \\ _\times_+_\times_+_\times_ & _\times_+_\times_+_\times_ \end{pmatrix}$$

4. Jika pada masalah 2, ketiganya membeli di toko Z. Matriks perkaliannya disajikan di bawah. Dapatkah mereka mendapatkan total harga yang harus dikeluarkan untuk ketiga jenis barang yang akan dibeli? Berikan penjelasannya.
   Jawab _____ .

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2000 \\ 2500 \end{pmatrix}$$

Dari kasus pertanyaan nomor 4, dan hasil pekerjaan nomor 3, tuliskan syarat agar dua matriks dapat dikalikan.

Jawab _____

5. Diketahui $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, dan $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, selidiki apakah berlaku:
   a. $AB = BA$ (sifat komutatif perkalian matriks)?
   b. $A(B + C) = AB + AC$ (sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan matriks)?

   Jawab _____

6. Adakah matriks P dan Q sedemikian sehingga berlaku $PQ = QP$? Jika ada, berikan contohnya.

   Jawab _____

7. Benar atau salah pernyataan berikut ini dan berikan penjelasannya.
   a. Untuk setiap matriks P dan Q, selalu dapat dicari matriks PQ.

      Jawab:

      _____

   b. Ada matriks K dan L, sedemikian sehingga $KL = LK$.

      Jawab:

      _____

   c. Perkalian dua matriks UV dapat ditentukan jika banyak kolom matriks U sama dengan banyak baris matriks V.

Jawab:

Matriks persegi adalah matriks yang banyak baris dan kolomnya sama.

d. Jika A, B, dan C matriks persegi dengan ordo sama dan berlaku $AC = BC$, maka $A = B$.
   Jawab:

e. Dua matriks persegi selalu dapat dikalikan.
   Jawab:

Sekilas Info:
Konsep perkalian matriks diperkenalkan pada tahun 1844 oleh matematikawan Jerman, Gotthold Eisenstein untuk menyederhanakan proses substitusi dalam sistem persamaan linear. Ide ini dikembangkan dan diformalkan oleh Arthur Cayley dalam publikasinya *Memoir on the Theory of Matrices* yang diterbitkan pada tahun 1858. Eisenstein merupakan murid dari Gauss, seorang tokoh matematika yang bisa disejajarkan dengan Isaac Newton dan Archimedes. Sayangnya, Eisenstein mengalami kesehatan yang buruk sepanjang hidupnya. Ia meninggal di usia 30 tahun sehingga potensinya terhenti.


Gotthold Eisenstein (1823–1852)