Miscelánea Matemática **54** (2012) 3–23 SMM

¿Qué significa “comprender el teorema de Desargues”?

Carlos Torres Alcaraz
carlos.torres.0505@gmail.com
Facultad de Ciencias, UNAM.

Introducción

Ciertamente, no existe una noción clara de lo que significa *entender algo*. Y he de añadir, junto con quienes mantienen lo anterior, que en la matemática esta cuestión se dificulta aún más al no haber un referente empírico que permita comprobar sus resultados realizando experimentos. En cuanto a la demostración, concuerdo con quienes afirman que ésta puede muy bien garantizar que lo propuesto en el teorema en efecto sucede sin por ello explicarlo del todo.

En este ensayo se examina el teorema de Desargues con relación a éstas y otras cuestiones. En él se muestra cómo la comprensión de este resultado va más allá de la claridad de su demostración o del lugar que ocupa en la teoría, hasta alcanzar otros dominios. Con ello se intenta destacar ciertos aspectos de la actividad matemática que no han sido suficientemente estudiados como, por ejemplo, el empeño por poner al descubierto las posibilidades ocultas en un teorema. Esta tarea lleva a diferenciar los distintos niveles en que se puede decir que un resultado matemático ha sido *comprendido*, y a tres puntos de importancia: (1) a reconocer el hecho de que la riqueza de un teorema pocas veces se torna visible con su demostración; (2) a distinguir entre un teorema y el discurso requerido para entenderlo, y (3) a reforzar la idea de que en nuestras reflexiones es necesario incorporar nuevas nociones que permitan mirar la actividad matemática desde una perspectiva diferente, es decir, que permitan esclarecer aquellos aspectos del pensamiento matemático que las escuelas tradicionales simplemente han desdeñado (v. gr., la *comprensión* y la *profundidad* de un resultado, los *niveles* de comprensión, las *clases de pruebas*, el *valor* de una prueba o el *contexto* de

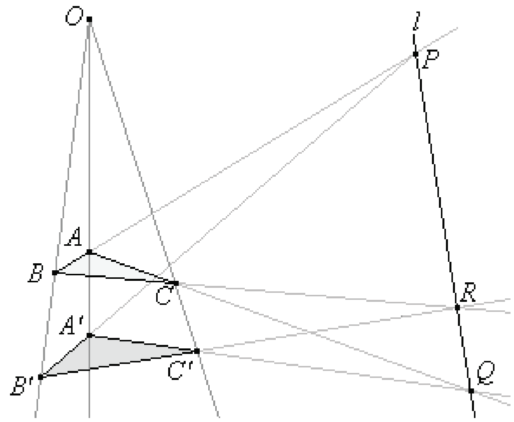


Figura 1.

una justificación, todos ellos presentes en el quehacer matemático). Dar la debida importancia a estos aspectos enriquece la imagen que se tiene de las matemáticas, pues muestra que se trata de una actividad no muy distinta del resto de las ciencias y brinda una visión más atinada de las mismas, al menos en comparación con los relatos que tradicionalmente nos han sido contados.

1. El teorema de Desargues

Como todos sabemos, el teorema de Desargues es un resultado perteneciente a la geometría proyectiva. Dice lo siguiente:

Dos triángulos están en perspectiva desde un punto si y sólo si están en perspectiva desde una línea recta[1].

Asociado a él se halla una notable figura en la que los vértices ABC de un triángulo se proyectan en los vértices $A'B'C'$ de otro triángulo por medio de rectas originadas en un punto O (perspectiva central).

En la figura, los lados de los triángulos se prolongan hasta intersecarse. Un hecho sorprendente es que los puntos de intersección P, Q, R de los lados correspondientes están alineados (perspectiva axial, Figura 1). Esto último es, en parte, lo que dice el teorema.

Otro hecho sorprendente es que si bien la figura anterior se halla en un plano, se le puede pensar en otros términos. Podemos imaginar que el triángulo ABC está en el espacio y que el cuadrángulo $OABC$ es en

[1]Una forma más coloquial de este teorema es la siguiente: Si dos triángulos ABC y $A'B'C'$ están situados de modo tal que las líneas AA', BB' y CC' convergen en un punto, entonces los pares de lados $AB - A'B'$, $AC - A'C'$ y $BC - B'C'$ se intersectan en una misma línea recta, e inversamente.

realidad un tetraedro (Figura 2). De manera semejante, $OA'B'C'$ sería otro tetraedro cuya base $A'B'C'$ estaría en perspectiva con ABC desde O. Esto último significa que un observador ubicado en O sólo percibiría un triángulo, pues desde esa posición ABC se miraría sobrepuesto a $A'B'C'$. Conforme a esta segunda línea de pensamiento los triángulos ABC y $A'B'C'$ están en dos planos distintos Π y Π', los determinados por sus vértices.

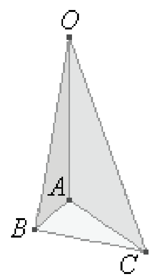


Figura 2.

Lo anterior permite una prueba muy simple del teorema (Figura 3). La recta AB se halla en Π, mientras que la recta $A'B'$ se halla en Π', de modo que su punto de intersección P está en ambos planos, e incide por tanto con la recta l en la que éstos se intersecan. Lo mismo sucede con las otras dos parejas de rectas $AC - A'C'$ y $BC - B'C'$, cuyas intersecciones Q y R también se hallan en la recta l (la cual puede ser la recta al infinito).

Resulta entonces que los puntos P, Q y R inciden con una misma recta, es decir, son colineales. En cuanto al hecho de que las rectas correspondientes se intersecan, esto lo podemos obviar advirtiendo, por ejemplo, que los puntos O, A, B, A' y B' se hallan todos en un mismo

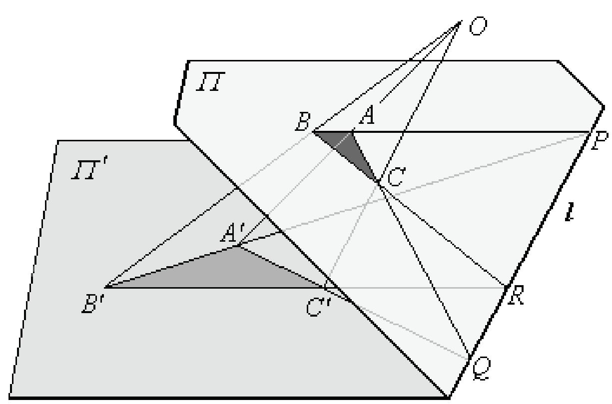


Figura 3.

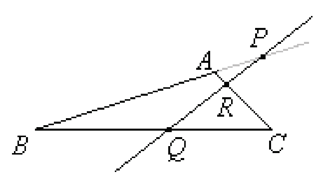
plano, el cual no es otra cosa que una de las caras del tetraedro, sucediendo lo mismo con las otras quintetas de puntos $\{O, A, C, A', C'\}$ y $\{O, B, C, B', C'\}$.

2. Una prueba del teorema de Desargues en el plano

En el pasaje anterior hemos delineado una prueba del teorema de Desargues con base en la idea de que los triángulos ABC y $A'B'C'$ están en el espacio. No obstante, esta última suposición es prescindible, en el sentido de que podemos probar el teorema evitando el elemento espacial, i. e., tratando la Figura 1 como un arreglo bidimensional. Un ejemplo es la siguiente demostración basada en el teorema de Menelao, el cual proporciona un criterio para determinar si tres puntos están alineados. Dice lo siguiente:

Proposición 2.1 *Tres puntos P, Q, R correspondientes a los lados AB, BC y CA de un triángulo están alineados si y sólo si*

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = -1.$$



Consideremos de nuevo la Figura 1. Con relación a los triángulos OAB, OAC y OBC, las rectas $B'A'P$, $A'C'Q$ y $B'C'R$ son, respectivamente, transversales a sus lados. Por repetidas aplicaciones del teorema de Menelao tenemos que

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BB'}{B'O} \cdot \frac{OA'}{A'A} = -1 \text{ (transversal } B'A'P \text{ de } OAB),$$
$$\frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AA'}{A'O} \cdot \frac{OC'}{C'C} = -1 \text{ (transversal } A'C'Q \text{ de } OAC),$$
$$\frac{BR}{RC} \cdot \frac{CC'}{C'O} \cdot \frac{OB'}{B'B} = -1 \text{ (transversal } B'C'R \text{ de } OBC).$$

Multiplicando miembro a miembro las tres igualdades resulta que

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{BR}{RC} = -1.$$

De lo anterior se sigue, por el teorema de Menelao, que los puntos P, Q y R son colineales.

La prueba anterior presenta una cuestión de orden lógico. Al examinarla desde el punto de vista de la *pureza* del método podemos ver que en ella hemos recurrido a la noción de distancia (que no es proyectiva) por razón del teorema de Menelao (el cuál atañe a cocientes formados con las longitudes de ciertos segmentos), siendo que el teorema de Desargues no trata con nociones métricas (en él sólo se alude a cuestiones proyectivas como la incidencia y la colinealidad). Queda la pregunta de si habrá una demostración del teorema en la que se prescinda de tales nociones y del elemento espacial (es decir, en la que no se suponga que los triángulos ABC y $A'B'C'$ están en el espacio).

3. Puntos armónicos y teorema de Desargues

Quienes se acercan por primera vez a la geometría proyectiva suelen sorprenderse por la gran cantidad de resultados "clásicos" que se hallan ausentes, como si la mayor parte de lo aprendido fuera ajeno a este dominio. Teoremas como el de Pitágoras o el del ángulo inscrito ya nada significan, pues esta geometría no se ocupa de longitudes, áreas o volúmenes, sino de *incidencias*. Una pregunta fundamental en este dominio es la siguiente: ¿Qué se conserva por proyección, cuando no lo hacen ni la longitud ni los ángulos? Aunada a ella se encuentra esta otra interrogante: ¿Cuándo una figura se puede proyectar en otra? Comenzando por los elementos más simples, los puntos y las rectas, el llamado *teorema fundamental de la geometría proyectiva* tiene una respuesta a esta última pregunta:

Proposición 3.1 *Dadas dos líneas rectas, existe un único mapeo proyectivo que transforma tres puntos dados de la primera en otros tres puntos dados de la segunda.*

En el caso de cuatro puntos alineados A, B, C, D la respuesta es sorprendente:

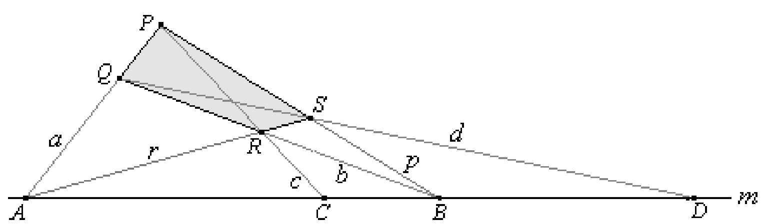
Proposición 3.2 *Cuatro puntos alineados A, B, C, D se pueden transformar proyectivamente en otros cuatro puntos alineados A', B', C', D'*

si y sólo si la razón doble[2] *de los primeros es la misma que la de los segundos, es decir, si y sólo si*

$$\frac{AC}{CB}\cdot\frac{DB}{AD}=\frac{A'C'}{C'B'}\cdot\frac{D'B'}{A'D'}.$$

No deja de ser extraño que una noción como la razón doble, originada en consideraciones métricas, resulte el invariante más importante de la geometría proyectiva, que desdeña dicha noción. Se trata, de hecho, de la única invariante numérica conocida. Esto nos lleva de nuevo a una cuestión a la que se le dio gran importancia en el siglo XIX, la pregunta de la pureza del método: ¿Acaso la geometría proyectiva no debería ser independiente de las nociones métricas? Al respecto, en el siglo XIX se halló la manera de caracterizar las hileras armónicas sin recurrir a la noción de *longitud de segmentos*. Esto se logró a través del siguiente teorema:

Proposición 3.3 *Cuatro puntos A, C, B, D sobre una línea recta forman una hilera armónica si y sólo si se puede construir un cuadrángulo $PQRS$ con respecto al que A, C, B y D están determinados por las relaciones de incidencia que se muestran en la siguiente figura:*



Las relaciones son: (i) que A y B son los puntos de intersección de pares de lados opuestos del cuadrángulo $PQRS$, y (ii) que las diagonales del cuadrángulo intersecan a m en C y D. De este resultado deriva un método para construir un cuarto punto armónico D toda vez que se tienen tres puntos colineales A, C, B. El método se puede explicar con base en la figura anterior. Tómense como punto de partida los puntos

[2]En la geometría euclidiana la razón doble (AB, CD) de cuatros puntos colineales A, C, B, D es un cociente de cocientes, el $(AC/CB)/(AD/DB)$, el cual escribimos como $(AC/CB)\cdot(DB/AD)$. En él se compara la razón en que el punto C divide al segmento AB con la razón en que el punto D divide al mismo segmento. Al respecto, cuando los puntos C y D dividen a AB interna y externamente en la misma razón (salvo por el signo), se dice que A, C, B, D es una *hilera armónica* (o que D es el *conjugado armónico* de C con respecto a A y B). En tal caso la razón doble es igual a -1.

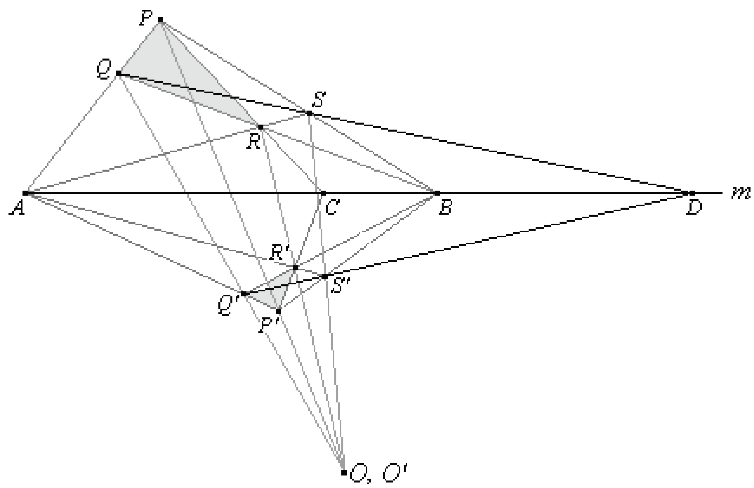


Figura 4.

A, C, B y la recta *m*. Por dichos puntos trácense respectivamente tres rectas no concurrentes *a, c, b* formando un triángulo *PQR*; después, trácense $r = l(A,\ R)$ y $p = l(B,\ P)$. Si *S* es el punto de intersección de *r* y *p*, entonces la recta $l(Q,\ S) = d$ interseca a *m* en *D*, el punto buscado[3].

El método recién indicado sólo se sirve de relaciones de incidencia. Por tanto, se tiene una caracterización proyectiva de las hileras armónicas[4]. Falta resolver el problema de la unicidad del cuarto armónico. En efecto, ¿Qué sucede si se traza otro cuadrángulo *P'Q'R'S'* como en la Figura 4?, ¿se llega al mismo punto *D*?

La cuestión anterior se resuelve con el teorema de Desargues y la respuesta es afirmativa: el punto *D* es único. En efecto, al observar la Figura 4 se verá que, por construcción, los triángulos *PQR* y *P'Q'R'* están en perspectiva desde la recta *m* (siendo *A, C* y *B* los puntos donde convergen los lados correspondientes). Por el teorema de Desargues hay un punto *O* desde el cual los vértices del triángulo *P'Q'R'* se proyectan en los vértices del triángulo *PQR*. De la misma manera, los triángulos *PRS* y *P'R'S'* están en perspectiva desde *m* (donde, nuevamente, *A*, *C* y *B* son los puntos donde convergen los lados correspondientes), por lo que hay un punto *O'* desde el cual *P'R'S'* se proyecta en *PRS*. Ahora

[3]El primero en utilizar este método del cuadrángulo completo para construir el cuarto armónico fue von Staudt en 1847.

[4]La importancia de la noción de "hilera armónica" se pone de manifiesto en la definición misma de *proyectividad*: Una *proyectividad* entre dos líneas X e Y es una correspondencia $f\colon X \to Y$ que preserva la relación armónica, es decir, tal que si A, B, C, D es una hilera armónica, entonces $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$, $f(D)$ también es una hilera armónica (v. Coxeter, 1992, p. 40).

bien, las rectas *RR'* y *PP'* concurren en ambos centros de proyección *O* y *O'*, por lo que estos puntos son el mismo. Así, los triángulos *PQS* y *P'Q'S'* están en perspectiva desde *O*, de modo que, por el teorema de Desargues, el punto de intersección de *PS* y *P'S'* es colineal con *A* y *B*. Pero dicho punto de intersección es *D*.

Como se ve, el teorema de Desargues resultó una pieza central en la delicada tarea de organizar la geometría proyectiva. Es más, con el paso del tiempo su importancia aumentó por múltiples razones. Dos de ellas son significativas para este trabajo: su compleja relación con los axiomas básicos de la geometría proyectiva, una tarea en la que los geómetras trabajaron arduamente en el siglo XIX, y los vínculos que permitió establecer entre la geometría y otros dominios de las matemáticas. En lo que sigue habremos de ahondar en estas cuestiones.

4. El teorema de Desargues en el espacio afín

Si bien el teorema de Desargues enuncia una propiedad proyectiva, se le puede formular con relación a un espacio afín[5]; para ello, se tienen dos casos: el paralelo y el no paralelo. El primero de ellos es el siguiente:

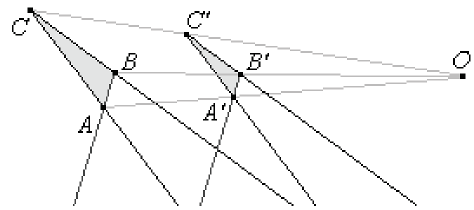
Teorema 4.1 (Teorema de Desargues) [6] *Si en el espacio (en el plano) dos triángulos (ABC) y (A'B'C') están situados de modo que las rectas AA', BB' y CC' que unen los vértices homólogos pasan por un mismo punto O, y si los lados homólogos AB-A'B' y AC-A'C' son paralelos entre sí, entonces los lados homólogos restantes BC y B'C' también son paralelos entre sí*[7]*.*

Esta formulación corresponde al teorema 32 del libro *Fundamentos de la geometría* de Hilbert, donde la presentación se lleva a cabo en

[5]Un espacio afín se caracteriza por la propiedad de la paralela única, para lo cual no es necesario contar con la noción de ángulo ni con la noción de longitud o medida (es decir, en un sentido estricto los postulados 3 y 4 de Euclides no significan nada en un espacio afín). En términos de transformaciones, una propiedad es afín cuando ésta se conserva bajo cualquier transformación paralela de un plano a otro. Podemos decir que la geometría afín es una generalización de la geometría euclidiana caracterizada por distorsiones en la inclinación y la escala.

[6]Nuevamente se trata de dos teoremas que, por similitud, se designan bajo un mismo nombre: uno acerca de configuraciones espaciales, y otro acerca de configuraciones en el plano.

[7]Notación. Con (ABC) se denota el triángulo con vértices *A, B, C*; con *AB* se denota la línea determinada por los puntos *A* y *B*, y con *ABC* el plano determinado por tres puntos no colineales *A, B, C*.



el contexto de un sistema de axiomas para la geometría euclidiana[8]. A causa del axioma de las paralelas el espacio en cuestión es un espacio afín. Aquí también hay una demostración simple del teorema en el caso tridimensional. Veamos[9].

Por el teorema II, $ABC \| A'B'C'$. De lo anterior se sigue que BC y *B'C'* no se intersecan, pues de lo contrario los planos ABC y *A'B'C'* no serían paralelos. Por otra parte, como *BB'* y *CC'* concurren en O, los puntos *B, B', C* y *C'* son coplanares (teorema I). Por tanto, BC y *B'C'* pertenecen a un mismo plano y no se intersecan. De esto se sigue que $BC \| B'C'$.

Es de esperarse que en el plano el teorema de Desargues se pruebe a partir del axioma de las paralelas y los axiomas de incidencia para el plano (axiomas I.1 y I.2 de Hilbert). No obstante, la cosa no es así. Para evidenciar este hecho mostramos un plano afín en el que dichos axiomas son válidos, pero no el teorema. Se trata del *plano de Moulton*, una estructura $\langle \mathbb{R}^2, L, I \rangle$ donde $\mathbb{R}^2$ es el plano real, L es un conjunto de “líneas rectas” que a continuación definimos, e I es la relación de incidencia entre puntos y rectas que se realiza cuando las coordenadas de un punto satisfacen la ecuación de la recta. Veamos.

Los elementos de L son los siguientes:

a) Las rectas verticales y horizontales del plano real; b) las rectas con pendiente positiva del plano real; c) las líneas quebradas del plano real formadas por dos semirrectas que se unen en el eje Y y cumplen lo siguiente: la semirrecta a la izquierda del eje Y tiene pendiente negativa m, en tanto que la semirrecta a la derecha del eje Y tiene pendiente $2m$ (refracción en el eje Y).

---

[8]En http://www.gutenberg.org/ebooks/17384 el lector hallará una copia en PDF del libro *Foundations of Geometry* de David Hilbert (ed. 1902) en el que presenta su famosa lista de 20 axiomas para la geometría. Dichos axiomas los incorpora en cinco grupos: –(I) de incidencia, (II) de orden, (III) de las paralelas, (IV) de congruencia y (V) de continuidad conforme al tipo de nociones que figuran en ellos.

[9]En la prueba nos servimos de los siguientes teoremas, los cuales se demuestran a partir de los axiomas del grupo I (axiomas de incidencia): **Teorema I**. Si dos líneas m y n concurren en un punto P, entonces hay un plano π que las contiene. **Teorema II**. Sean (*A, B, C*) y (*A', B', C'*) dos ternas de puntos no colineales. Si $AB \| A'B'$ y $BC \| B'C'$, entonces $ABC \| A'B'C'$ (paralelismo entre planos).

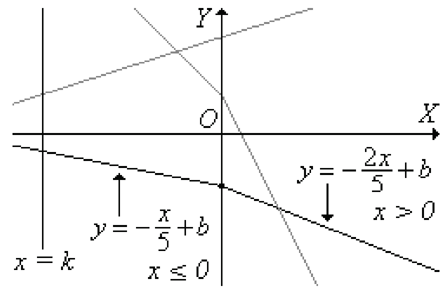
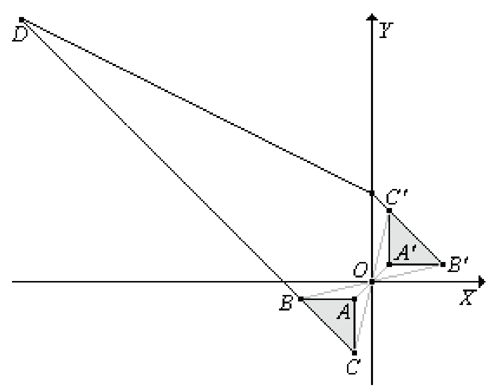


Ilustración del plano de Moulton.

El plano de Moulton satisface el axioma de las paralelas, los axiomas de orden (grupo II) y los axiomas I.1-I.3 de incidencia para el plano[10]. No obstante, como a continuación se muestra, en él no se cumple el teorema de Desargues.

En la siguiente figura, dos triángulos de Moulton *ABC* y *A'B'C'* están en perspectiva desde el origen *O* y los lados homólogos *AB*-*A'B'* y *AC*-*A'C'* son paralelos entre sí. No obstante, los lados *BC*-*B'C'* no son paralelos entre sí, pues se intersecan en *D*.[11] Esto es un contraejemplo al teorema de Desargues.



De lo anterior se sigue que:

(1) El (caso paralelo del) teorema de Desargues es independiente del axioma de las paralelas y los axiomas de orden e incidencia para el plano, pues el plano de Moulton es un modelo de dichos axiomas y en él no se cumple el teorema.

[10]Por ejemplo, dado un par de puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1), con $x_0 \leq 0 < x_1$ y $y_1 < y_0$, para hallar la línea de Moulton que incide con ellos, tal como lo afirma el axioma I.1, basta con resolver para m y b el sistema de ecuaciones $y_0 = mx_0 + b$; $y_1 = 2mx_1 + b$, el cual siempre tiene una única solución.

[11]Todo esto se puede probar algebraicamente, como un ejercicio de geometría analítica.

(2) Al extender el plano de Moulton a un plano proyectivo mediante la adición de los puntos y la recta al infinito, lo que resulta es un plano proyectivo *no arguesiano*[12] que, por lo mismo, no es isomorfo al plano proyectivo $P^2(\mathbb{R})$.

Un descubrimiento similar al anterior llamó poderosamente la atención de Hilbert, quien en los *Fundamentos de la geometría* dedicó un capítulo completo al teorema de Desargues (si de "comprender el teorema" se trata). Entre los resultados alcanzados se encuentran los siguientes:

(a) El teorema de Desargues para el plano afín se puede demostrar a partir del axioma de las paralelas, los axiomas de orden e incidencia para el plano (axiomas I.1-I.2) y los axiomas de congruencia (grupo III) (v. gr., con base en el teorema de Menelao).

(b) Sea $\mathcal{G}$ una geometría plana que satisface el axioma de las paralelas, los axiomas de orden y los axiomas de incidencia para el plano (axiomas I.1-I.3). Una condición necesaria y suficiente para que $\mathcal{G}$ sea parte de una geometría espacial que cumple con los axiomas de los grupos I, II y IV es que satisfaga el teorema de Desargues. Esto último permite, postulando el teorema de Desargues, establecer un plano proyectivo que cumple con las propiedades establecidas en los grupos I, II y IV y es extensible a un espacio con un mayor número de dimensiones.

(c) El teorema de Desargues para el plano afín se puede demostrar a partir del axioma de las paralelas y los axiomas de incidencia toda vez que se incluyan los axiomas espaciales I.4-I.8.[13] Por tanto, si lo que se busca es evitar los axiomas de congruencia en la prueba del teorema de Desargues, no hay otro camino que admitir el elemento espacial.

Todo esto originó una serie de interrogantes: ¿Por qué la prueba de un teorema proyectivo en el plano requiere de una noción como la de congruencia, la cual es equivale al concepto métrico de longitud?; ¿por qué la única manera de evitar los axiomas de congruencia es suponiendo que el plano está inmerso en un espacio con un mayor numero de dimensiones? Lo anterior pone de manifiesto cierta insuficiencia en la teoría, una oquedad en los axiomas de incidencia para el plano. De hecho, el plano es el único lugar donde el teorema de Desargues puede fallar, lo cual no deja de ser un descubrimiento singular.

En todo esto hay un modo muy peculiar de pensar el teorema de Desargues: lo relevante ya no es la pregunta por su *verdad*, sino su

[12]Un plano proyectivo se dice *arguesiano* cuando el teorema de Desargues es válido en él, y *no arguesiano* en el caso contrario.

[13]En este caso, la configuración bidimensional (dos triángulos en perspectiva en un mismo plano, etc.) se puede considerar como la proyección de una configuración tridimensional, y utilizar este hecho para demostrar el teorema en el plano.

relación con los axiomas[14]. *Comprender* el teorema pasa por lo anterior y por cuestiones como la de la *pureza del método*. Esto último explica en gran medida el interés habido en este teorema. Y eso no es todo: Como a continuación veremos, el teorema resultó una pieza clave en la coordenatización de la geometría sintética y en la construcción de un álgebra de segmentos en los espacios afín y proyectivo.

5. Un álgebra de segmentos

Veamos cómo se establece un álgebra de segmentos en el plano afín. Esto se relaciona con la siguiente pregunta: ¿qué se requiere geométricamente para tener una estructura de campo ordenado en la recta? Como veremos, el teorema de Desargues es una pieza fundamental en esta tarea. Para ello, supongamos una geometría afín que cumple con los axiomas de orden e incidencia para el plano. Con base en estos axiomas podemos definir una operación de *suma* para los segmentos de una línea recta l como sigue.

Sea m una línea recta que interseca a l en un punto O (Figura 5). Con base en m se puede definir un cálculo de segmentos sobre l como sigue. Tómense dos segmentos OE y OE' sobre l y m, respectivamente[15]; estos segmentos actuarán como unidades en el álgebra. Se escribe $OE = OE' = 1$. Sean A y B dos puntos sobre l. La suma de los segmentos $a = OA$ y $b = OB$ se define como sigue (donde las letras con comilla indican puntos pertenecientes a m):

1) sea AA' la paralela a EE' por A;

2) sea p la paralela a l por A' y q la paralela a m por B. p y q no son paralelas y se intersecan en un punto X;

3) sea n la paralela a EE' por X. n no es paralela a l y la interseca en un punto C.

Por definición, el segmento $c = OC$ es la suma de OA y OB: Escri-

[14]Ciertamente, lo que está en juego ya no es determinar la verdad o falsedad del teorema de Desargues, sino precisar su lugar frente a los axiomas. Si el interés fuera lo otro, se podrían esgrimir distintos argumentos en favor de la "verdad" del teorema. Por ejemplo, se podría recurrir a lo que llamamos la *teoría de la verdad anidada*: "Si la proposición resulta verdadera al encuadrar la geometría plana en la geometría espacial, entonces se le debe admitir como verdadera en la primera, aunque los axiomas de ésta no logren demostrarla (es decir, sin importar que ninguna inconsistencia resulte al negarla)".

[15]Aquí la escritura se vuelve ambigua: la notación AB se utiliza tanto para designar al segmento con extremos A y B como a la recta por A y B, reconociéndose el sentido que se le da por el contexto.

bimos $OC = OA + OB$ (o bien, $a + b = c$)[16].

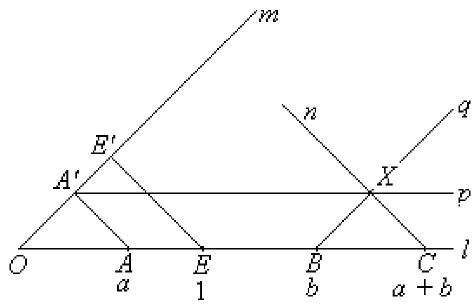


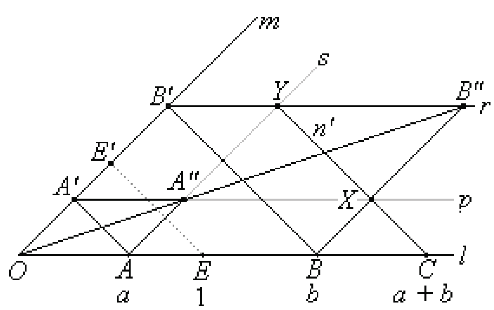
Figura 5.

Las propiedades algebraicas de esta operación dependen de los axiomas aceptados. En particular, la conmutatividad de la suma precisa del teorema de Desargues y su recíproco[17]. En efecto, hagamos la suma $OB + OA$ siguiendo el procedimiento recién señalado.

1) Sea *BB’* la paralela a *EE’* por B;

2) sea r la paralela a l por *B’* y s la paralela a m por A. r y s no son paralelas y se intersecan en un punto Y;

3) sea *n’* la paralela a *EE’* por Y. *n’* no es paralela a l y la interseca en un punto que, como se probará, es C.



Conforme a lo anterior se tiene: $AA' \| EE' \| BB'$, $A'X \| B'Y \| OA$ y $AY \| BX \| OA'$.

Sean *A”* = $AY \cap$ *A’X* y *B”* = $BX \cap$ *B’Y*. Figura 6:

[16]Euclidianamente, lo que se hace es construir un triángulo BCX congruente con *OAA’*, de modo que $AC = OB$. Esta idea (que encierra la noción métrica de congruencia, la cual no tiene sentido en las geometrías afín y proyectiva) constituye el fundamento heurístico de la definición anterior.

[17]El recíproco del teorema de Desargues dice los siguiente: *Si en el plano dos triángulos (*ABC*) y (*A’B’C’*) están situados de modo que sus lados homólogos* AB-A’B’, AC-A’C’ *y* BC-B’C’ *son paralelos entre sí, entonces las líneas* AA’, BB’ *y* CC’ *que unen los vértices homólogos son paralelas entre sí o concurren en un punto.* Este teorema y el de Desargues son equivalentes entre sí, por lo que se les designa con el mismo nombre.

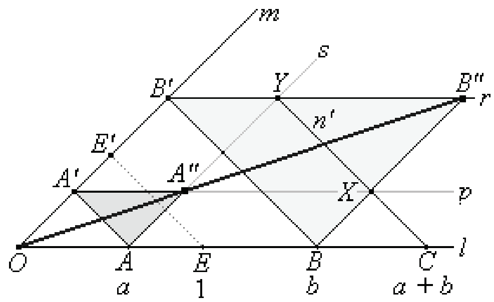


Figura 6.

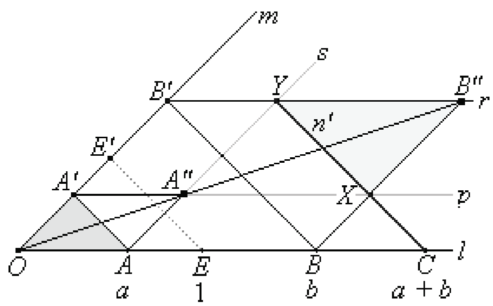


Figura 7.

Los triángulos A*A'A"* y *BB'B"* tienen lados *AA'-BB'*, *AA"-BB"* y *A'A"-B'B"* paralelos entre sí, y están en perspectiva desde *O* (esto último por el recíproco del teorema de Desargues), de modo que *O*, *A"* y *B"* son colineales. En consecuencia (Figura 7), los triángulos *OAA'* y *B"YX* están en perspectiva desde *A"*, y como los lados homólogos *OA'-XB"* y *OA-YB"* son paralelos entre sí, conforme al teorema de Desargues los lados homólogos *AA'* y *XY* son paralelos entre sí. Ergo la línea *n'* es la paralela a *EE'* por *X*, es decir, es la línea *n* que interseca a *l* en *C* en la Figura 5. Pero este último punto es el que determina la suma de *OB* con *OA*. Por tanto, *OB + OA = OC*.

Como se ve, la propiedad conmutativa de la suma se debe al teorema de Desargues. De hecho, se tiene el siguiente resultado:

Proposición 5.1 *En todo plano afín arguesiano, el álgebra de segmentos sobre cualquier línea recta es un anillo con división*[18].

Conclusión: Para que el álgebra de segmentos tenga una estructura de anillo con división es necesario postular la propiedad arguesiana,

[18]La *multiplicación* de segmentos se puede introducir en forma análoga a la suma (cosa que aquí no haremos), y con base en ella es que nos referimos al álgebra de segmentos como un *anillo*.

incluir los axiomas de congruencia, o admitir los axiomas espaciales de incidencia. Obviamente, desde la perspectiva de la pureza del método, la primera opción es preferible.

En cuanto a un álgebra con estructura de campo, es indispensable la validez del teorema de Pappus[19]. Esto lo resumimos en la siguiente proposición:

Proposición 5.2 *El teorema de Pappus se cumple en un plano afín arguesiano si y sólo si la multiplicación de segmentos es conmutativa*[20].

Al respecto, se sabe que el teorema de Pappus implica al teorema de Desargues, pero no a la inversa (para el caso hay contraejemplos). Aquí también, el teorema de Pappus sólo se puede demostrar a partir de los axiomas espaciales de incidencia, o de los axiomas de incidencia para el plano junto con los axiomas de congruencia. Por tanto, hay al menos tres caminos para dar lugar a una suma y multiplicación de puntos en la recta con estructura de campo: (a) postular el axiomas de las paralelas junto con los axiomas de congruencia y los axiomas de incidencia para el plano; (b) postular el axioma de las paralelas junto con los axiomas de incidencia para el plano y el espacio; o (c) postular el teorema de Pappus junto con el axioma de las paralelas y los axiomas de incidencia para el plano. ¿Cuál es la mejor opción? Esto lo decidirá el investigador, cuya respuesta depende del propósito que tenga en mente al edificar la teoría.

6. Un recorrido a la inversa

Las investigaciones precedentes no fueron todo. Por el contrario, pronto se descubrió la manera de transitar del álgebra a la geometría invirtiendo el camino, es decir, construyendo planos afines a partir de ciertas estructuras algebraicas. También se halló la manera de introducir coordenadas en el plano afín sintético, es decir, de asociar a cada punto

[19]**Teorema de Pappus**: *Si los puntos* A, B *y* C *están en una recta, y los puntos* A', B' *y* C' *están en otra recta, entonces los puntos de intersección* P = AB' ∩ A'B, Q = BC' ∩ B'C *y* R = CA' ∩ C'A *están alineados.* (En otras palabras: Si los vértices de un hexágono se hallan alternados en dos rectas, entonces los puntos de intersección de los lados opuestos están alineados). El lector no familiarizado con este teorema hará bien en trazar un diagrama. Los vértice del hexágono en orden sucesivo son *A, B', C, A', B, C', A*.

[20]Recordemos que un anillo con división es un campo cuando la multiplicación es conmutativa. Por tanto, el álgebra de segmentos en un plano afín arguesiano será un campo si y sólo si se satisface el teorema de Pappus.

P del plano afín una única pareja $(x,\ y)$ de elementos tomados de un conjunto Γ con una estructura algebraica similar a la del cálculo de segmentos[21]. Al respecto, una de las ideas originales era introducir los números reales en la escena. Éste fue el inicio de la geometría algebraica, en el que el teorema de Desargues desempeñó un importante papel. Lo que sigue es una breve nota en torno a estas cuestiones.

La Proposición I recién expuesta indica cómo establecer un álgebra con estructura de anillo de división entre los segmentos de cualquier recta en un plano afín arguesiano. Veamos ahora la manera de invertir el camino, es decir, de obtener un plano afín arguesiano con base en un anillo de división $\mathcal{D}$.

Los puntos del plano en cuestión son los elementos de $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$. Si $a,\ b,\ c$ son tres elementos de $\mathcal{D}$, con a y b no ambos cero, el conjunto $l(a,b,c) = \{(x,y)|xa + yb = c\}$ es una recta del plano afín de la que $xa + yb = c$ es una ecuación. Por ejemplo, $x \cdot 2 + y \cdot 3 = 1$ es ecuación de una recta en el plano afín Z^2. El tratamiento moderno de esta construcción se sirve del concepto de espacio vectorial izquierdo. En este enfoque los puntos del plano $\mathcal{D}^2$ son vistos como vectores y $\mathcal{D}$ como el conjunto de escalares. El uso del adjetivo "izquierdo" obedece al hecho de que los escalares sólo multiplican a los vectores por la izquierda, es decir, que la única operación escalar utilizada es $r(x,\ y) = (rx,\ ry)$.[22] Esta manera de abordar el tema permite demostrar en forma elegante la siguiente proposición con relación al plano $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$, donde $\mathcal{P} = \mathcal{D}^2$ y $\mathcal{L}$ es el conjunto de todas las líneas rectas $l(a,\ b,\ c)$.

Proposición 6.1 *Si $\mathcal{D}$ es un anillo de división, entonces el plano $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ es un plano afín arguesiano. Por otra parte, si $\mathcal{D}$ es un campo, entonces en el plano $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ se cumple el teorema de Pappus.*

---

[21]Con relación a cualquier espacio afín se puede probar lo siguiente: (1) todas las líneas tienen un mismo número de puntos n (donde n puede ser transfinito); (2) por cada punto pasan $n + 1$ líneas; (3) la relación de paralelismo es antireflexiva, simétrica y transitiva; (4) si una línea intersecta a una de dos paralelas, también intersecta a la otra; (5) si n es el número de puntos sobre una línea l, entonces l tiene $n - 1$ paralelas. Todas estas propiedades se utilizan al introducir coordenadas.

[22]En general, los espacios vectoriales suelen definirse sobre un campo. No obstante, el conjunto de escalares puede ser un anillo de división mientras se tenga el cuidado de realizar la multiplicación escalar siempre del mismo lado. Cuando D es un campo, la ecuación $xa + yb = c$ se puede escribir en la forma $ax + by = c$ que nos es familiar. No obstante, cuando D no es conmutativo esto puede conducir a errores. Por ejemplo, si D es el conjunto H de los cuaternios de Hamilton, el par $(i,\ k)$ satisface la ecuación $xj = y$, pero no la ecuación $jx = y$. Por tanto, las líneas determinadas por ecuaciones con las variables y los coeficientes invertidos no serían las mismas.

El lector se podrá ejercitar considerando, por ejemplo, el espacio $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$, donde $\mathcal{P} = Z_5 \times Z_5$. Se trata de un anillo de división el cual, a causa del teorema de Wedderburn, es un campo (el teorema dice justo eso: todo anillo de división finito es un campo). ¿Cuál es el conjunto de puntos de este espacio? ¿Cuáles son sus líneas rectas? Verificar que se trata de un plano afín es un ejercicio de álgebra lineal. V. gr., con relación al axioma "Dados dos puntos distintos, hay una y sólo una recta que los contiene" la cuestión se reduce a probar lo siguiente: Dados (x, y) y (x', y') distintos entre sí, hallar $a, b, c \in Z_5$ tales que a y b no son ambos cero y $xa + yb = c$, $x'a + y'b = c$ (en Z_5) y a probar que si (x, y) y (x', y') satisfacen cualquier otra ecuación $ua' + vb' = c'$, entonces las dos ecuaciones son equivalentes.

En cuanto al teorema de Desargues, la prueba de que éste se cumple en todo plano afín definido a partir de un anillo de división se halla en [**1**]. Tenemos, por tanto, un plano afín arguesiano para cada anillo con división. Además, sabemos que cuando k no es primo el plano correspondiente a Z_k no es afín (v. gr., Z_4), pues el anillo no es de división.

Para concluir esta sección diremos que nada de lo anterior se vislumbra en la demostración del teorema de Desargues, ni en la consideración de su relación con los axiomas. Tampoco se vislumbra el importante papel que tuvo el teorema en el surgimiento de la geometría algebraica. En otras palabras, la comprensión de un teorema no siempre se logra con su demostración, o mejor dicho, con sus demostraciones.

7. Breves reflexiones

Así como el valor de una demostración depende de su capacidad para aclarar el resultado, o de si puede convertirse en una técnica de demostración utilizable en otros casos (v. gr., el método diagonal de Cantor), el valor de un teorema se halla también en su utilidad para resolver otros problemas, o en su capacidad para incidir en otras áreas. En este sentido, el teorema de Desargues ha servido como elemento de enlace entre la geometría y el álgebra, y como un instrumento esencial en la coordenatización de la geometría sintética. Por otra parte, desde el punto de vista de la axiomática el teorema es independiente de los axiomas de orden, incidencia y paralelismo para el plano, algo inesperado que obligó a investigar las causas de su autonomía y lo colocó en un rango similar al del quinto postulado de Euclides.

Lo anterior ejemplifica la enorme diferencia que puede haber entre un resultado matemático y el discurso requerido para entenderlo, o en-

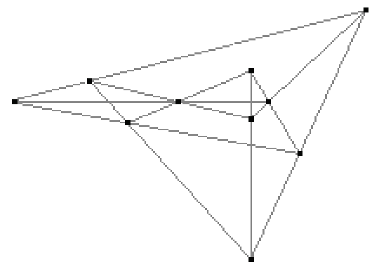


Figura 8. Una configuración de Desargues.

tre esto último y la simplicidad de su demostración. También arroja mucha luz sobre la naturaleza de la exposición axiomática, la cual se ha convertido en un estándar de presentación en nuestros días. Un teorema matemático difícilmente puede ser entendido y valorado cuando sólo se le mira en el contexto de la axiomática. Más bien, su comprensión requiere de un esfuerzo adicional. No obstante, en la actualidad son muchas las publicaciones que tienden a sacrificar la claridad y compresión en aras de la brevedad del argumento, la notación telegráfica y el orden lógico.

Examinemos de nuevo el teorema de Desargues. Detrás de él se halla oculta una estructura (la *configuración* de Desargues), consistente en un arreglo de diez puntos y diez rectas, la cual tiene la virtud de ser completamente simétrica con relación a sus partes (Figura 8).

Cada recta incide con tres puntos y cada punto incide con tres rectas, y ninguna recta o punto tiene preferencia sobre los demás, de modo que cualquiera de los diez puntos se puede tomar como centro de proyección, dando lugar a un total de diez arreglos. En cada caso aparecerá un diseño conforme al teorema de Desargues, es decir, dos triángulos en perspectiva cuyos lados correspondientes se intersecan en tres puntos alineados (hágase esto con las Figuras 1 y 8).

La configuración de Desargues permite descubrir casos del teorema en "espacios" con un número finito de puntos y rectas, lo cual desborda el ámbito de la geometría tradicional, y entraña la simetría entre dos elementos (puntos y rectas) que en un principio no parecen tenerla. Así, el teorema encierra la posibilidad de intercambiar la interpretación de los términos punto y línea recta sin alterar la verdad del teorema. Tenemos, por tanto, una variación en la semántica del teorema que se origina en la configuración que encierra.

Resulta entonces que algo tan sencillo como el teorema de Desargues es más de lo que en un principio parece ser. En apariencia el teorema tan sólo enuncia algo definitivo acerca de los triángulos en perspectiva; no obstante, debajo de esta aparente simplicidad se oculta una red de vínculos entre la geometría y el álgebra. Veamos cómo se expresa al respecto Gian-Carlo Rota en ([**13**], p. 147):

> El enunciado del teorema de Desargues pretende ser definitivo, pero en realidad es tan solo la punta de un iceberg de conexiones con otros hechos de la matemática. El valor del teorema de Desargues, y la razón por la cual el enunciado de este teorema ha sobrevivido el paso de siglos, cuando otros teoremas geométricos igualmente impactantes han sido olvidados, radica en que abrió un horizonte de posibilidades que relacionan la geometría y el álgebra de maneras inesperadas.

Ni la red de conexiones ni la importancia del teorema son tangibles en su presentación axiomática. Esto tampoco se advierte en su prueba formal. Su importancia sólo se hace evidente cuando, por fuera de la presentación axiomática, examinamos el lugar que ocupa en la matemática y el peso que ha tenido en su desarrollo.

8. Observaciones finales

Una actividad poco descrita de los matemáticos es la incesante búsqueda de nuevas pruebas, pues en la matemática no suele haber demostraciones definitivas. Una de las razones de lo anterior es la necesidad de contemplar cada resultado desde múltiples perspectivas. Así, por ejemplo, en los siglos diecinueve y veinte se dio un renovado interés en el teorema de Desargues a causa de las posibilidades que éste encerraba. Esto llevó a descubrir diversos hechos ocultos en sus primeras demostraciones, sacando a la luz, por ejemplo, la necesidad de recurrir a nociones métricas. La pregunta era: ¿habrá una demostración del teorema que sólo se apoye en propiedades de orden e incidencia? Esto condujo al descubrimiento de la imposibilidad de probar el resultado en el plano a partir de axiomas de su misma índole, y a buscar una explicación de dicha imposibilidad. Por ello es que hoy contamos con estructuras geométricas como el modelo de Moulton que tanto dice acerca de los espacios afines y de la relación entre ellos y el espacio que lo rodea (si es que acaso los rodea un espacio).

Más allá de los vínculos que el teorema de Desargues ha permitido establecer entre el álgebra y la geometría, la exploración de los alcances del teorema dejó de ser importante cuando los hechos que lo circundaban fueron finalmente entendidos. Al respecto, lo sucedido es perturbador. En primer lugar, porque en su caso lo que se dio fue lo contrario a una simplificación en su demostración; en segundo lugar, porque el trabajo en torno a él mostró que se trata de un teorema cuya complejidad es mucho mayor de la que a primera vista parece tener. Dicha complejidad sólo se hizo aparente cuando la supuesta simplicidad del teorema se removió, poniendo al descubierto la configuración subyacente.

Nada de lo anterior se explica si, haciendo caso a quienes lo sostienen, aceptamos que la labor de los matemáticos se centra en demostrar nuevos teoremas y enunciar nuevas conjeturas, dejando lo demás a los docentes y a los hombres ilustrados. Por el contrario, uno de los motores de la matemática ha sido el deseo de poner al descubierto las posibilidades que encierran sus resultados, es decir, la voluntad de entender. En particular, con lo dicho acerca del teorema de Desargues espero haber puesto en claro la necesidad de contemplar la actividad matemática desde otra perspectiva, en la que las nociones de valor, evidencia, comprensión y utilidad ocupen un lugar junto a las habituales nociones de verdad, rigor y construcción axiomática. Espero también haber puesto en claro dos cuestiones ya señaladas en la introducción: (1) que el valor o la importancia de un teorema pocas veces se torna visible con su demostración; y (2) que entre un teorema y el discurso requerido para entenderlo suele mediar una enorme distancia.

Bibliografía

1. M. K. Bennett, *Affine and Projective Geometry*, John Wiley & Sons, New York, 1995.
2. D. Brannan, M. Esplen, y J. Gray, *Geometry*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
3. R. Courant y H. Robbins, *What is Mathematics?*, Oxford University Press, New York, 1941.
4. H. S. M. Coxeter, *Projective Geometry*, Springer-Verlag, New York, 1987.
5. ———, *The Real Projective Plane*, Springer-Verlag, New York, 1992.
6. R. Hartshore, *Geometry: Euclid and Beyond*, Springer, New York, 2000.
7. D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie, Traducción al inglés de E. J. Townsend, The Foundations of Geometry, 1962. Disponible en PDF en http://www.gutenberg.org/ebooks/17384.*, 2 ed., The Open Court Publishing Company, La Salle, Illinois, 1902.
8. D. Hilbert y S. Cohn-Vosse, *Geometry and the Imagination*, Chelsea Publishing Company, New York, 1952.
9. M. Kline, *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*, Alianza Editorial, Madrid, 1992.
10. D. N. Lehmer, *An Elementary Course in Synthetic Pro-*

jective Geometry, Ebook 17001, The Project Gutenberg, en http://www.gutenberg.org/wiki/Main_Page, 2005.

11. M. B. Leonard, *A Modern View of Geometry*, Dover Publications, Inc. New York., 1980.
12. D. Pedoe, *Geometry, A Comprehensive Course*, Dover Publications Inc. New York., 1970.
13. G. C. Rota, *Indiscrete Thoughts*, Birkhäuser, Boston, 1997.