

Matrices

Karel Appeltans

14 april 2023

1 Begripsvorming

1.1 Begrip

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \leftarrow 2e \text{ rij}$$

↑
3e kolom

dimensie van A :
 $\dim A = 2 \times 3$ (aantal rijen, aantal kolommen) of
 $A \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$

elementen van A : a_{ij} met $1 \leq i \leq 2$ en $1 \leq j \leq 3$
 $a_{11} = 1$
 $a_{23} = 5$

Figuur 1: <https://www.geogebra.org/m/WXBpq5Ay>

1.2 Speciale matrices

Speciale Matrices			
Vierkante matrices $vb : A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 1 & 0 & \pi \\ -\sqrt{2} & 6 & 3 \end{bmatrix}$ $\dim A = 3 \times 3$ Algemeen: $\dim A = n \times n$	Diagonaalmatrix $vb : B = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ $\dim B = 3 \times 3$; $b_{ij} = 0$ als $i \neq j$ Algemeen: $\dim A = n \times n$ $a_{ij} = 0, i \neq j$	Scalaire matrix $vb : C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ $\dim C = 3 \times 3$; $c_{ij} = 0$ als $i \neq j$; $c_{11} = c_{22} = c_{33}$	Eenheidsmatrix $vb : I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ voorbehouden letters: I of E
Kolommatrix $vb : G = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -9 \\ 8 \end{bmatrix}$ Algemeen: $\dim G = m \times 1$	Rijmatrix $vb : K = [7 \quad 8]$ Algemeen: $\dim K = 1 \times n$	Nulmatrix $vb : O_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ Voorbehouden letter: O	Symmetrische matrix $vb : D = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 3 \\ 4 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ $\dim D = 3 \times 3$ $d_{ij} = d_{ji}$ $D^T = D$

Figuur 2: <https://www.geogebra.org/m/WXBpq5Ay>

2 Bewerkingen

2.1 lineaire combinatie

Lineaire combinatie van matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ en } B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -5 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Voorwaarde $\dim A = \dim B$

$$2A - 3B = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & -5 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) & 2 \cdot 3 - 3 \cdot (3) & 2 \cdot 4 - 3 \cdot (-5) \\ 2 \cdot (-1) - 3 \cdot (0) & 2 \cdot (1) - 3 \cdot (6) & 2 \cdot (-2) - 3 \cdot (1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 23 \\ -2 & -16 & -7 \end{pmatrix}$$

Figuur 3: <https://www.geogebra.org/m/wXBpq5Ay>

2.2 vermenigvuldiging

Matrixvermenigvuldiging:

$A \cdot B = C$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

$\dim : 2 \times 3 \cdot 3 = 2 \times 2$

Toon berekening:

Algemeen :
als $A \in \mathbb{R}^{n \times p}$ en $B \in \mathbb{R}^{p \times m}$
dan $C \in \mathbb{R}^{n \times m}$ en
 $c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{ip} \cdot b_{pj}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$
of
 $c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} \cdot b_{kj}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$

Berekening:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

c_{11} :
 $c_{11} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 5 \cdot (-2) = -11$
 $\uparrow \quad \nwarrow$
 $1e \quad 1e$
 $rij \quad kolom$
 $A \quad B$

c_{21} :
 $c_{21} = (-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot (-2) = -2$
 $\uparrow \quad \nwarrow$
 $2e \quad 1e$
 $rij \quad kolom$
 $A \quad B$

c_{12} :
 $c_{12} = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot (-3) = -1$
 $\uparrow \quad \nwarrow$
 $1e \quad 2e$
 $rij \quad kolom$
 $A \quad B$

c_{22} :
 $c_{22} = (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot (-3) = 2$
 $\uparrow \quad \nwarrow$
 $2e \quad 2e$
 $rij \quad kolom$
 $A \quad B$

Figuur 4: <https://www.geogebra.org/m/wXBpq5Ay>

2.3 machtsverheffing

Voorwaarde: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$: $A^2 = A \cdot A$; $A^n = A \cdot A \cdot A \cdots A$

Machtsverheffing:

Hiernaast kunnen de elementen van matrix A en B aangepast worden -->

Voorwaarde: A moet een vierkante matrix zijn

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -9 & 28 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -9 & 28 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 22 \\ 66 & -149 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 4 & 16 \\ 3 & -6 & 17 \\ 2 & 12 & 24 \end{pmatrix}$$

	A	B	C
1	2	1	
2	3	-5	
3			
4	1	-2	3
5	4	0	1
6	-1	2	5
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			

Figuur 5: <https://www.geogebra.org/m/WXBpq5Ay>

2.4 transponeren

Bewerkingen met matrices: transponeren

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{transponeren}} A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

☒ Wat is dus transponeren?

uitleg:rijen en kolommen verwisselen: 1e rij wordt 1e kolom, enz.wiskundig genoteerd: $(a_{ij})^T = a_{ji}$

Eigenschappen :

$$(A^T)^T = A$$

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

$$(kA)^T = kA^T$$

Figuur 6: <https://www.geogebra.org/m/WXBpq5Ay>

2.5 determinant

2.5.1 berekeningen

methode 1

Berekening 2 x 2-determinant:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = + (2) \cdot (-5) - (3) \cdot (4) = -22$$

☒ ☐

Berekening 3 x 3-determinant:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = + (2) \cdot (3) \cdot (5) + (1) \cdot (4) \cdot (-2) + (-1) \cdot (0) \cdot (-3) - (-2) \cdot (3) \cdot (-3) - (0) \cdot (4) \cdot (2) - (-1) \cdot (1) \cdot (5) = 9$$

☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒

	A	B	C
1	2	1	-3
2	-1	3	4
3	-2	0	5
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			
18			
19			
20			
21			
22			
23			
24			
25			
26			
27			
28			
29			
30			

Figuur 7: <https://www.geogebra.org/m/Thk96QYz>

methode 2

Berekening 3 x 3 determinant m.b.v. cofactoren

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

We kiezen eerst een rij of een kolom, hier kiezen we de 1ste rij

$$\det(A) = (-1)^{1+1} \cdot (2) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot (1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot (-3) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}$$

☐ ☐ ☐

$$= + (2) \cdot (15) - (1) \cdot (3) + (-3) \cdot (6)$$

$$= 9$$

	A	B	C	D
1	2	1	-3	
2	-1	3	4	
3	-2	0	5	
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				
18				
19				
20				
21				
22				

Figuur 8: <https://www.geogebra.org/m/Thk96QYz>

2.5.2 eigenschappen

1. Bij twee gelijke rijen (kolommen): $\det(A) = 0$
2. Een gemeenschappelijke factor in rij(kolom) mag afgezonderd worden
3. Een lineaire combinatie $R_i + k \cdot R_j$ of $K_i + k \cdot K_j$ verandert de waarde van een determinant niet

2.6 inverse

Definitie inverse matrix

Stel A is een vierkante matrix met $\dim A = n \times n$
 A^{-1} is de inverse matrix van $A \Leftrightarrow A^{-1} \cdot A = I_n = A \cdot A^{-1}$

Berekening Inverse matrix

$\dim A = 2 \times 2$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \text{Als } |A| \neq 0 \text{ dan } A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad |A| = ad - bc = 1 \cdot 4 - (2) \cdot (3) = -2$$

$$|A| \neq 0 \text{ dus } A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Figuur 9: <https://www.geogebra.org/m/yfqw9ndn>

Inverse matrix

$\dim A = 3 \times 3$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Als } |A| \neq 0 \text{ dan } A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{|A|} (Adj A)^T$$

Om A_{ij} te berekenen:
 1) Bereken de minoren: dit is de 2×2 determinant van de matrix die je bekomt door de i -de rij en j -de kolom te schrappen.
 2) Bepaal de cofactor: dit is de minor voorzien van volgend teken:

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

berekening determinant

Bereken AdjA

Bereken $(AdjA)^T$

Bereken inverse

$$|A| = -3$$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(Adj(A))^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

☐ Toon berekening A_{12}

Figuur 10: <https://www.geogebra.org/m/yfqw9ndn>

Eigenschappen inverse matrix

A en B zijn reguliere matrices met dimensie $n \times n$; $k \in \mathbb{R}_0$

$$AA^{-1} = I = A^{-1}A$$

$$BB^{-1} = I = B^{-1}B$$

'de inverse matrix van een geg matrix is de matrix die (rechts en links) vermenigvuldigt met de geg matrix de eenheidsmatrix geeft met als notatie: A^{-1}

1. $(A^{-1})^{-1} = A$ ☒ bewijs $(A^{-1})^{-1}$ is de matrix die (links en rechts) vermenigvuldigt met $A^{-1} I$ geeft, dat is dus A want geg $AA^{-1} = I = A^{-1}A$

2. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ ☒ bewijs $(AB)^{-1}$ is de matrix die (links en rechts) vermenigvuldigt met $AB I$ geeft

$$(B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

$$AB(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

3. $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$ ☒ bewijs $(kA)^{-1}$ is de matrix die (links en rechts) vermenigvuldigt met $kA I$ geeft

$$\left(\frac{1}{k}A^{-1}\right)kA = \left(\frac{1}{k}k\right)A^{-1}A = 1I = I$$

$$kA\left(\frac{1}{k}A^{-1}\right) = \left(k\frac{1}{k}\right)AA^{-1} = 1I = I$$

4. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ ☒ bewijs $(A^T)^{-1}$ is de matrix die (links en rechts) vermenigvuldigt met $A^T I$ geeft

$$(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = I^T = I$$

$$A^T (A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I^T = I$$

Figuur 11: <https://www.geogebra.org/m/yfqw9ndn>

2.7 eigenwaarden en eigenvectoren

Eigenwaarden en eigenvectoren

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda = 2 \quad \text{en met bijbehorende kolommatrix(vector)} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

worden een eigenwaarde en eigenvector van A genoemd omdat $\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

eigenwaarden zoeken via de karakteristieke vergelijking van A

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (3-\lambda)(-\lambda) + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$\begin{matrix} s = 3 \\ p = 2 \end{matrix} \quad \lambda = 1 \text{ en } \lambda = 2$$

eigenvectoren bepalen via methode van Gauss-Jordan $\left(\begin{array}{cc|c} 3-\lambda & -2 & 0 \\ 1 & 0-\lambda & 0 \end{array} \right)$

$$\lambda = 2 \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) y = k \text{ en } x = 2k \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 1 \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) y = k \text{ en } x = k \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Figuur 12: <https://www.geogebra.org/m/dkhddkgy>

3 oefeningen

1. Gegeven $F \in \mathbb{R}^{5 \times 2}$ met $f_{ij} = -2i + j$. Bepaal F
2. Geef een voorbeeld van een symmetrische matrix van orde 3. Een symmetrische matrix A is een matrix waarvoor geldt $A^T = A$ of anders gezegd: $a_{ij} = a_{ji}$.
3. Bepaal de dimensie van matrix A, B en C als $\dim E = 5 \times 2$ en

$$E = (A \cdot C^T - B^T)^T$$

4. Ga na dat de matrixvermenigvuldiging

(a) associatief is, m.a.w. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

(b) distributief is t.o.v. de optelling, m.a.w. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

5. Gegeven $\begin{bmatrix} p & 5-2p \\ 25-\frac{3p}{2} & 15 \end{bmatrix}$ en $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.
Bepaal de waarde van p, q en n als $A + qB = nI$

6. Bepaal de waarde van m:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3m & 8 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m & -6 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} m & -2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 3 & 22 \\ 87 & -38 \end{bmatrix}$$

7. Beschouw de matrix $M = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -6 & -9 \end{bmatrix}$ en $A(a) = \begin{bmatrix} a+1 & a+2 \\ a-2 & a+1 \end{bmatrix}$

(a) toon aan: $A(-a) + A(a) = 2A(0)$

(b) Bepaal de waarde(n) van a en b als er geldt: $A(a) \cdot A(b) = M$

8. Beschouw de matrix $A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$, met parameter $\alpha \in \mathbb{R}$. Voor welke α is $A^2 = -I$?

9. Toon aan dat A en B wel commuteren, m.a.w. $AB = BA$, $A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ en $B = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}$

10. Geldt in $\mathbb{R}^{n \times n}$: $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$?

11. Gegeven $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. TB: $A + A^T$ is symmetrisch
12. Gegeven $A \cdot B = A$ en $B \cdot A = B$. TB $A^2 = A$ en $B^2 = B$ (we zeggen dat A en B idempotent zijn)
13. Bepaal alle matrices B die commuteren met $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
14. Louis doet inkopen voor zijn verjaardagsfeest. Hij koopt drie soorten wijn: witte, rode en rosé. Van elk van die soorten koopt hij Franse en Australische wijnen. De prijzenmatrix P in euro en de aantallenmatrix A zijn:
- | | <i>wit</i> | <i>rood</i> | <i>rose</i> | | <i>Fr</i> | <i>Aus</i> | |
|---------------|--|-------------|-------------|-------|---|------------|--|
| A zijn: $P =$ | $\begin{bmatrix} 7,50 & 8,00 & 8,70 \\ 4,20 & 5,00 & 5,70 \end{bmatrix}$ | | | Fr | Aus | | |
| | | | | $A =$ | $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ | | <i>wit</i>
<i>rood</i>
<i>rose</i> |

Gevraagd:

- Bereken $P \cdot A$. Wat is de betekenis van de getallen op de hoofddiagonaal?
 - Bereken $A \cdot P$. Wat is de betekenis van de getallen op de hoofddiagonaal?
 - Is $P \cdot A = A \cdot P$? Welke eigenschap blijkt hier wel of niet te gelden?
 - Hebben de overige getallen in $P \cdot A$ en in $A \cdot P$ betekenis? Indien wel, geef die betekenis. Indien niet, waarom dan niet?
 - De som van de getallen op de hoofddiagonaal van $P \cdot A$ en van $A \cdot P$ is gelijk. Geef een verklaring
15. Robert en Bertrand hebben elk een stappenteller gekregen. Ze houden nu dagelijks bij hoeveel stappen ze gezet hebben. De gegevens van de laatste volledige week zijn weergegeven in onderstaande matrix:

$$S = \begin{matrix} & \begin{matrix} ma & di & wo & do & vrij & za & zo \end{matrix} \\ \begin{matrix} Robert \\ Bertrand \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3124 & 2322 & 1526 & 2589 & 2552 & 9811 & 7896 \\ 1244 & 1255 & 2325 & 1255 & 3256 & 8415 & 1898 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

- Stel een matrix V op zodat je uit $S \cdot V$ kan aflezen hoeveel stappen ze elk op vrijdag deden
- Stel een matrix W op zodat je uit $S \cdot W$ kan aflezen wat het totaal aantal stappen per persoon tijdens de weekdays was.

16. Bereken: $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \\ 3 & 9 & 7 \end{vmatrix}$

17. Toon aan dat $\begin{vmatrix} x-y & x-y & x^2-y^2 \\ 1 & 1 & x+y \\ -y & 1 & x \end{vmatrix} = 0$

18. Bepaal alle mogelijke waarden van x zodat: $\begin{vmatrix} 3x-8 & 3 & 8 \\ 3 & 3x-8 & 3 \\ 3 & 3 & 3x-8 \end{vmatrix} = 0$

19. Bepaal alle mogelijke waarden van x zodat: $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 20 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & 2x & 5x^2 \end{vmatrix} = 0$

20. Als A inverteerbaar is met $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & a & 1 \end{bmatrix}$. Bepaal dan de voorwaarde op a en bepaal vervolgens het element op rij 2 en kolom 1 van A^{-1}

21. Toon aan dat $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\cos \theta} & \tan \theta \\ \tan \theta & \frac{1}{\cos \theta} \end{bmatrix}$ regulier is.

22. Gegeven $A = \begin{bmatrix} 1 & \tan x \\ -\tan x & 1 \end{bmatrix}$. Toon aan dat $A^T \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos 2x & -\sin 2x \\ \sin 2x & \cos 2x \end{bmatrix}$

23. Bepaal a als $X + X^{-1} = I$ met $X = \begin{bmatrix} 2 & a \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$
24. Bepaal A zodat $(A^T - 8I)^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$
25. Gegeven: $A = \begin{bmatrix} 0 & k \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Bepaal $k \in \mathbb{R}_0$ zodat $A^{-1} = A^3$
26. Als A en B reguliere matrices zijn bepaal dan X uit $A \cdot X \cdot B = C$
27. Zonder X af: $(AX^T + 2I^{-1})^{-1} = A^2$
28. Juist of fout: Bij juist bewijs en bij fout geef tegenvoorbeeld
- (a) Uit $AB = AC$ volgt $B = C$?
 - (b) Als A en B van orde 2 en singulier zijn, dan is $A \cdot B$ ook singulier
 - (c) Als zowel A_1 en A_2 met B commuteren, dan commuteert $(A_1 \cdot A_2)$ met B ook.
29. Als $A^3 = I$ dan is A regulier
30. Als $A^2 - 2A + I = 0$, dan bestaat A^{-1} . Toon aan en geef een uitdrukking van A^{-1}
31. Bewijs: (alle gegeven matrices zijn regulier)
- (a) $(A^{-1})^{-1} = A$
 - (b) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
 - (c) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
32. Bewijs, gebruik hiervoor volgende eigenschap: $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
- (a) $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.
 - (b) de determinant van een idempotente matrix is 0 of 1
33. Bereken de eigenwaarden en eigenvectoren van
- (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
 - (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

4 Oplossen van stelsels

4.1 Methode van Gauss-Jordan

4.1.1 inleidend voorbeeld

4.1.2 elementaire rijoperaties

Elementaire rijoperaties:

Het verwisselen van rijen

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{12}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$\nearrow$
 R_1 en R_2 verwisselen

Het product van een rij met een reëel getal

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{4R_3} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -4 & 8 & 20 \end{bmatrix}$$

$\nearrow$
elk element van R_3 maal 4

Het combineren van rijen

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3+R_2} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$\nearrow$
 R_3 vervangen

Figuur 13: <https://www.geogebra.org/m/junM2djw>

4.1.3 unieke oplossing

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x + y + 3z = 1 \\ 2x + 4y + 2z = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{coëfficiëntenmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 1 & 1 & 3 & | & 1 \\ 2 & 4 & 2 & | & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 1 & 1 & 3 & | & 1 \\ 2 & 4 & 2 & | & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 - R_1 \\ R_3 - 2R_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 2 & -2 & | & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{23}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 2 & -2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{2R_1 - R_2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 & | & -1 \\ 0 & 2 & -2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1 - 6R_3 \\ R_2 + 2R_3}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & | & -7 \\ 0 & 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{R_1 \cdot \frac{1}{2} \\ R_2 \cdot \frac{1}{2}}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

$x = -\frac{7}{2}, y = \frac{3}{2}, z = 1$

Unieke oplossing voor x,y en z. Bepaald stel

Figuur 14: <https://www.geogebra.org/m/junM2djw>

4.1.4 geen oplossing

$$\begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ 3x + y + 2z = 6 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{coëfficiëntenmatrix}} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & | & 4 \\ 3 & 1 & 2 & | & 6 \\ 1 & 2 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{2R_2 - 3R_1 \\ 2R_3 - R_1}} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & | & 4 \\ 0 & 5 & 1 & | & 0 \\ 0 & 5 & 1 & | & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{5R_1 + R_2 \\ R_3 - R_2}} \begin{bmatrix} 10 & 0 & 6 & | & 20 \\ 0 & 5 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & -2 \end{bmatrix}$$

De laatste rij geeft nu: $0 = -2$
Dit kan natuurlijk niet. We spreken van een vals stelsel.
Er is geen enkele oplossing voor x, y en z zodat
aan de drie vergelijkingen voldaan is.

Figuur 15: <https://www.geogebra.org/m/junM2djw>

4.1.5 oneindig veel oplossingen

$$\begin{cases} 2x + 3y - 3z = 0 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \xrightarrow{\text{coëfficiëntenmatrix}} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 & | & 0 \\ 2 & -1 & 0 & | & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 - R_1} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 & | & 0 \\ 0 & -4 & 3 & | & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{4R_1 + 3R_2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 & | & 9 \\ 0 & -4 & 3 & | & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{R_1 \cdot \frac{1}{2} \\ R_2 \cdot \frac{-1}{4}}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & | & \frac{9}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & | & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

geen rij om z 'uniek' te maken, z is onbepaald

$$\begin{cases} x - \frac{3}{2}z = \frac{9}{2} \\ y - \frac{3}{4}z = -\frac{3}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{9}{2} + \frac{3}{2}k \\ y = -\frac{3}{4} + \frac{3}{4}k \\ z = k \end{cases}$$

$z = k, k \in \mathbb{R}$
we noemen dit een onbepaald stelsel,
voor elke waarde van k is er een andere oplossing

Figuur 16: <https://www.geogebra.org/m/junM2djw>

4.1.6 Oefeningen

1. Los op volgens de methode van Gauss-Jordan

(a)
$$\begin{cases} 3x - 2y = 12 \\ 7x + 2y = 8 \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} x + 4y - 12z = 8 \\ 2x - y + 3z = 6 \\ x - 14y + 42z = 10 \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

(d)
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 6x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

2. Bepaal de waarde(n) van a en b zodat onderstaand stelsel

$$\begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ 3x + y - z = 1 \\ x - 3y + az = b \end{cases}$$

- (a) unieke oplossing heeft
(b) geen oplossing heeft

(c) oneindig veel oplossingen heeft

3. Bepaal de waarde(n) van a en b zodat
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & -3 \\ 0 & 0 & a & | & b \end{bmatrix}$$

(a) er geen oplossing is

(b) juist één oplossing is

(c) oneindig veel oplossingen zijn

4. De rijcanonieke vorm van een stelsel is:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{bmatrix}$$

Bepaal de oplossingsverzameling.

5. Een stelsel met twee vergelijkingen en drie onbekenden heeft steeds een unieke oplossing. Is dit een juiste bewering? Verklaar jullie antwoord.

6. Een nulrij in de uitgebreide matrix geeft altijd een onbepaald stelsel. Is dit een juiste bewering? Verklaar jullie antwoord.

7. Een homogeen stelsel is steeds oplosbaar. Is dit een juiste bewering? Verklaar jullie antwoord.

8. Bepaal de inverse matrix m.b.v. methode van Gauss-Jordan

(a)
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

9. Het begrip rang van een matrix. Bespreek de oplosbaarheid van een stelsel in functie van de rang van een matrix

4.2 methode Cramer en methode inverse matrix voor stelsels met unieke oplossing

4.2.1 methode Cramer

Methode van Cramer:

$$\begin{cases} -1x + 1y = -2 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1x + 1y = -2 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$$

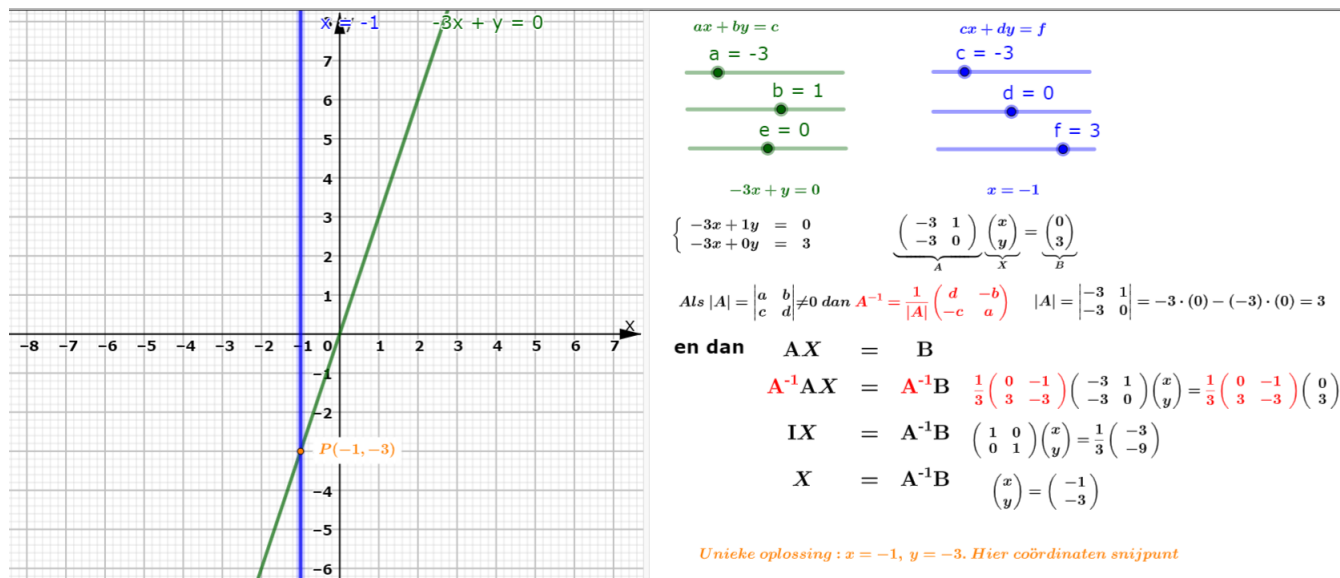
$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -5 \quad |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Methode van Cramer kan toegepast worden}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-12}{-5} = \frac{12}{5}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-2}{-5} = \frac{2}{5}$$

Figuur 17: <https://www.geogebra.org/m/qcgdebvh>

4.2.2 inverse matrix



Figuur 18: <https://www.geogebra.org/m/yfqw9ndn>

4.2.3 oefeningen

- Los volgend stelsel op met de methode van Cramer en enkel voor de onbekende y

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x + y - z = -1 \\ -x - y + z = 2 \end{cases}$$

(A. $y=3$)

- Los onderstaand stelsel op

$$\begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ -x + 5y = 7 \end{cases}$$

- met de methode van Cramer
- met de behulp van de inverse matrix

- Gegeven is volgend stelsel met parameters h en k :

$$\begin{cases} x - y - 2z = 1 \\ x - 2y + hz = k \\ 4x + hy - 7z = 7 \end{cases}$$

- Neem aan dat dit stelsel een unieke oplossing heeft

- Bewijs dan dat $h \neq -3$
- Geef dan de oplossingen van dit stelsel

- Neem aan dat dit stelsel oplossingen heeft

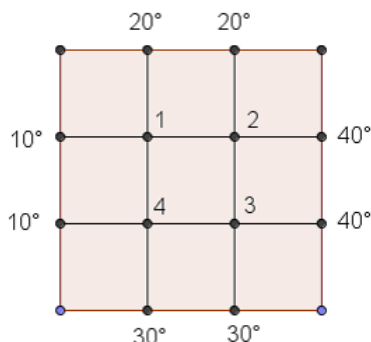
- Bewijs dan dat $k = -2$
- Geef dan de oplossingen van dit stelsel

4. Gegeven: $\begin{cases} ax & -y & = & 3 \\ -4x & +ay & = & 2 \end{cases}$

- Bepaal de waarde(n) van a zodat dit stelsel een unieke oplossing heeft.
- Bepaal m.b.v. de methode van Cramer de oplossing voor x onder deze voorwaarde(n).

5 Vraagstukken matrices

- Drie studenten kopen samen een fiets voor 100 euro. De eerste zegt tegen de tweede 'ik zal hem betalen als jij me de helft van je geld geeft' Daarop zegt de tweede tegen de derde 'Als jij me één derde van je geld geeft, betaal ik hem wel'. Waarop de derde tegen de eerste: 'je zou me beter één vierde van je geld geven, dan betaal ik die fiets wel'. Hoeveel geld heeft elk?
- Zoek een getal van 3 cijfers, waarvan het volgende gegeven is.
 - De som van de cijfers is 17
 - Het cijfer van de tientallen is het drievoud van het cijfer van de honderdtallen
 - Keren we het getal om, dan verkrijgen we een getal dat 693 eenheden groter is dan het oorspronkelijke getal
- Ans, Bart en Cindy spelen een spel. Na elke ronde moet de verliezer de twee andere spelers evenveel geld geven, als ze op dat moment hebben. De eerste ronde verliest Ans, de tweede ronde Bart en de derde ronde Cindy. Na drie ronden hebben ze elk 24 euro. Wat was het beginbedrag van elke speler?
- Een bouwfirmat heeft volgende modules om een verdieping van een appartementsblok te zetten.
 module A: 3 flats met 3 slaapkamers, 6 flats met 2 slaapkamers en 9 flats met 1 slaapkamer
 module B: 4 flats met 3 slaapkamers, 5 flats met 2 slaapkamers en 7 flats met 1 slaapkamer
 module C: 2 flats met 3 slaapkamers, 7 flats met 2 slaapkamers en 11 flats met 1 slaapkamer
 Ik wil een building neerzetten met 36 flats met 3 slaapkamers, 81 flats met 2 slaapkamers en 123 flats met 1 slaapkamer.
 Hoeveel modules A, B en C nodig?
- Toen Kasper in het ziekenhuis lag, kreeg hij van Xander een grote fruitmand gevuld met appels, peren en sinaasappelen. Toen kwam moeder en nam een vierde van de appels, een derde van de peren en de helft van de sinaasappelen. Er bleven 24 vruchten in de fruitmand over. Dan kwam Laura en nam een derde van de appels, helft van de peren en een vierde van de sinaasappelen. Er bleven 15 stukken nog over. En ten slotte kwam broer Jonas en nam 1 peer en 2 sinaasappelen. Toen die dan vertrok bleven evenveel appels als sinaasappelen als peren over. Hoe zag de oorspronkelijke fruitmand eruit? (A. 8 appels, 15 peren en 16 sinaasappels)
- Een verhuurfirma van bestelwagens wil zijn wagenpark uitbreiden door 25 wagens aan te kopen met een totale laadruimte van 2800 m^3 . Er zijn drie modellen beschikbaar: 10-foot bestelwagens met een capaciteit van 35 m^3 ; 14-foot bestelwagens met een capaciteit van 70 m^3 en 24-foot bestelwagens met een capaciteit van 140 m^3 . Hoeveel stuks van elk moet de firma aankopen om de totale laadruimte te bekomen?
- Bij de studie van warmtetransport wenst men de temperatuurverdeling bij evenwicht te kennen van een dunne plaat, wanneer de temperatuur op de rand van de plaat gekend is.



We zoeken T_1 , T_2 , T_3 en T_4 , de temperaturen in de 4 inwendige knopen. We weten dat de temperatuur in een knooppunt bij benadering gelijk is aan het gemiddelde van de temperaturen in de nabijgelegen knooppunten. Zo is voor de figuur hierboven bijvoorbeeld $T_1 = \frac{10+20+T_2+T_4}{4}$.

- Anna, Brigitte en Charlotte vormen een driegeslacht. Samen zijn ze 105 jaar oud. Anna is negen jaar ouder dan B en C samen. A en C samen komen nog 3 jaar tekort om dubbel zo oud te zijn als B. Hoe oud zijn deze dames?

9. Een bioloog heeft voor een experiment met muizen een voedselmengeling nodig, dat buiten andere stoffen, moet bestaan uit $23g$ proteïne, $6,2g$ vet en $16g$ vocht. Hij beschikt over mengsels met de volgende samenstelling:

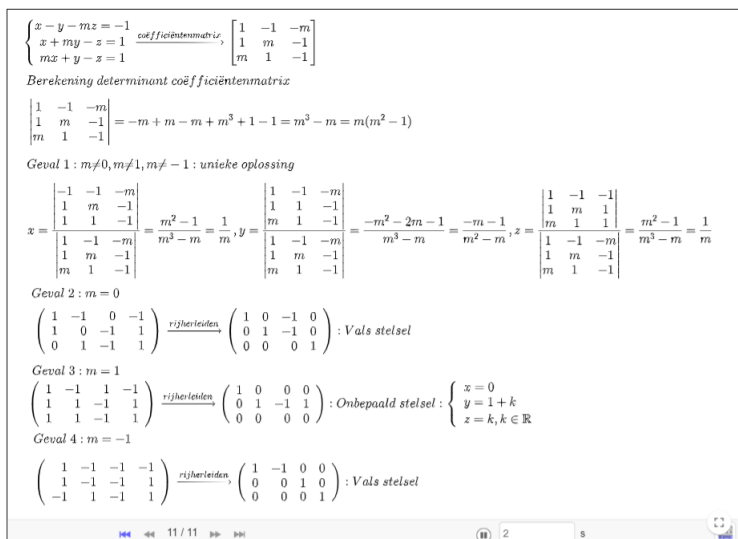
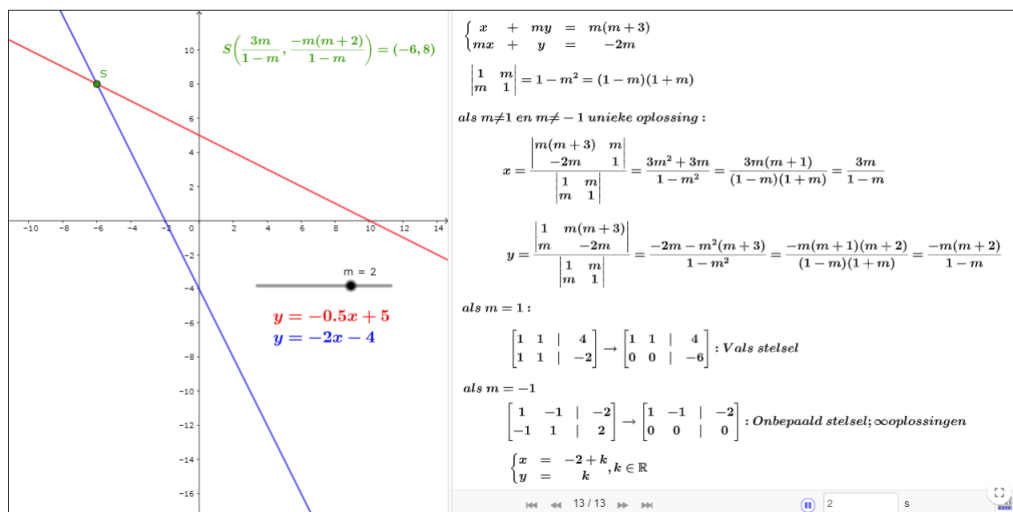
	proteïne(%)	vet (%)	vocht(%)
Mengsel 1	20	2	15
Mengsel 2	10	6	10
Mengsel 3	15	5	5

Welke hoeveelheid van mengsel 1 moet de bioloog gebruiken om, in combinatie met gepaste hoeveelheden van de mengsels 2 en 3, het gevraagde voedselmengsel te bekomen ?

10. Bewijs de formule voor de inverse van een reguliere 2×2 -matrix
11. Hartosh, Mark en Keiko werken bij een schildersbedrijf. Hartosh schildert eens zo snel als Mark. Hartosh en Keiko schilderen 6 kamers in 8 uur. Samen schilderen ze 14 kamers in 16 uur. Hoeveel kamers kunnen ze elk per uur schilderen? (ant: $1/4, 1/2, 1/2$)
12. Uno, Duo en Tres zijn drie vrienden. Zij hebben allemaal geld geleend van malafide makelaar. Samen hebben zij 600 euro geleend. Duo heeft 200 euro meer geleend dan Uno, Uno en Duo hebben samen even veel geleend als Tres. Hoeveel hebben zij elk geleend?(50,250,300)
13. Balanceer de volgende chemische reacties:
- (a) $Al_2O_3 + C \rightarrow Al + CO_2$
 - (b) $H_3O + CaCO_3 \rightarrow H_2O + Ca + CO_2$
 - (c) $B_2S_3 + H_2O \rightarrow H_3BO_3 + H_2S$

6 Stelsels met parameter

6.1 begripsvorming



Figuur 19: <https://www.geogebra.org/m/g7TcQBkv>

6.2 Oefeningen

1. Bespreek volgende stelsels in functie van de parameter m:

(a) $\begin{cases} x + m^2y + z = m \\ mx + y + (m-2)z = m \\ x + y + z = 1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 2x - my - z = -1 \\ x - 2my + z = m \\ x + my - 2z = 1 \end{cases}$

2. Bepaal de voorwaarde op a,b en c zodat volgend stelsel steeds oplosbaar is:

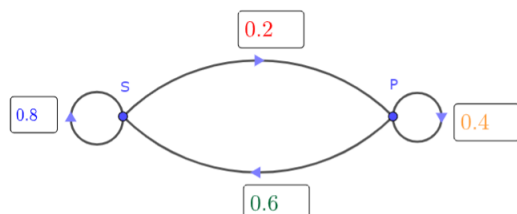
$$\begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ 4x + y = 9 \\ ax + by = c \end{cases}$$

7 Toepassingen

7.1 Markovketen

Migratiematrices:

Onderstaande graaf geeft de migratiepercentages tussen stad (S) en platteland (P)



Deze gegevens kunnen weergegeven worden in een migratiematrix:

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} S & P \end{matrix} \\ \begin{matrix} S \\ P \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Deze matrix is een voorbeeld van een markovmatrix:
elk element ≥ 0 en de som van elke kolom geeft 1

Beginsituatie:

$$N_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Evolutie na 1 perioden:

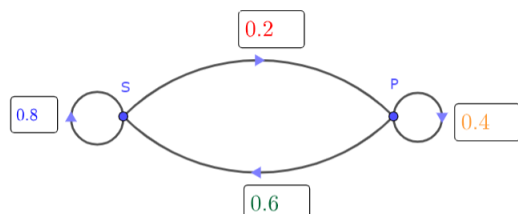
t = 1

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}^1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.4 \\ 3.6 \end{pmatrix}$$

Figuur 20: <https://www.geogebra.org/m/h7g2xd8b>

Migratiematrices:

Onderstaande graaf geeft de migratiepercentages tussen stad (S) en platteland (P)



Deze gegevens kunnen weergegeven worden in een migratiematrix:

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} S & P \end{matrix} \\ \begin{matrix} S \\ P \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Deze matrix is een voorbeeld van een markovmatrix:
elk element ≥ 0 en de som van elke kolom geeft 1

Stabiele situatie:

$$\begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0.8x + 0.6y = x \\ 0.2x + 0.4y = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -0.2x + 0.6y = 0 \\ 0.2x - 0.6y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$RREF \begin{pmatrix} -0.2 & 0.6 & 0 \\ 0.2 & -0.6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.75 \\ 0 & 1 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

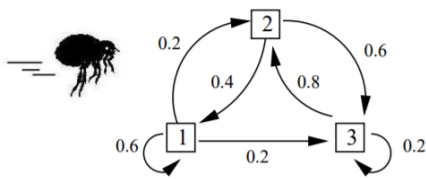
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0.75 \\ y = 0.25 \end{cases}$$

$$\text{andere methode: } \begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}^{100} = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.75 \\ 0.25 & 0.25 \end{pmatrix}$$

De stabiele situatie: 75% woont in de stad en 25% zal op het platteland wonen.

Figuur 21: <https://www.geogebra.org/m/h7g2xd8b>

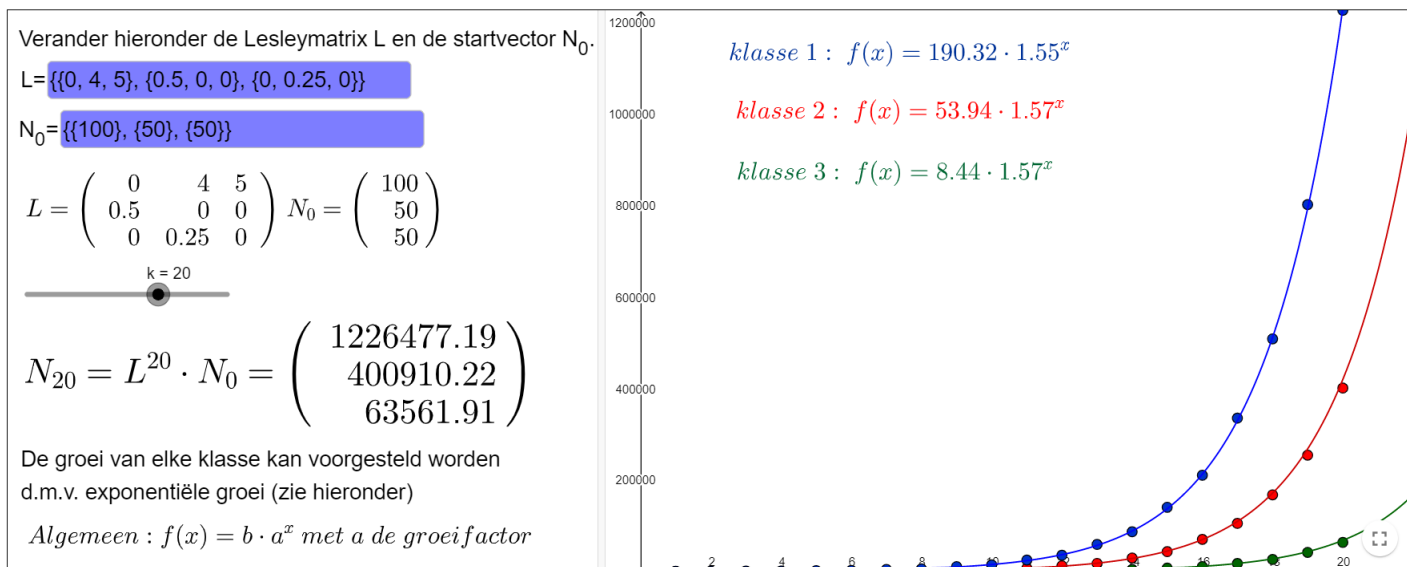
- Op een afgelegen eiland waarop 1000 mensen wonen is een eigenaardige ziekte uitgebroken. Op een gegeven moment zijn er 900 personen gezond en 100 ziek. In een tijdsbestek van een week wordt 20% van de gezonde mensen ziek en de overige blijven gezond. Van de zieke mensen geneest in die week 30%, de rest blijft ziek.
 - Bepaal het aantal zieke en gezonde mensen op dit eiland na één maand.
 - Hoe evolueert deze aantallen op lange termijn? Leg uit waarom er een stabiele situatie is.
- Een wiskundevlieg verplaatst zich elk uur op de hoekpunten van een driehoek volgens volgende graaf



- Bepaal de overgangsmatrix
- Om 12u00 bevindt de vlieg zich in hoekpunt 1. Bereken de kans dat zij zich om 15u00 opnieuw in hoekpunt 1 bevindt.
- Bepaal de stabiele situatie.

3. Page Rank algoritme van Google

7.2 Lesleymatrices



De groeifactor kan men ook algebraïsch berekenen. Dit is namelijk de dominante eigenwaarde. Een eigenwaarde λ kan men berekenen door de vergelijking $A \cdot X = \lambda X$ op te lossen met A een vierkante matrix met $\dim A = n \times n$ en X een kolomvector met $\dim X = n \times 1$

$A = \{\{0, 4, 5\}, \{0.5, 0, 0\}, \{0, 0.25, 0\}\}$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \end{pmatrix}$

$AX = \lambda X \Leftrightarrow (A - \lambda I)X = 0$

Wil dit stelsel een niet triviale oplossing hebben, moet

$|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 2\lambda + 0.625 = 0$

oplossingen : $\{\lambda = -1.2197, \lambda = -0.3306, \lambda = 1.5502\}$

Figuur 22: <https://www.geogebra.org/m/jcS4NRh8>

Opgave ▼

Een bepaalde diersoort wordt in drie leeftijdsgroepen van 4 jaren verdeeld. Op zeker tijdstip ($t = 0$) is de opbouw van een populatie van deze dieren:

- 200 jonge dieren;
- 100 volwassen dieren;
- 50 oude dieren.

Er worden geen dieren ouder dan 12 jaar. Deze graaf beschrijft het verloop tussen de leeftijdscategorieën van deze diersoort:

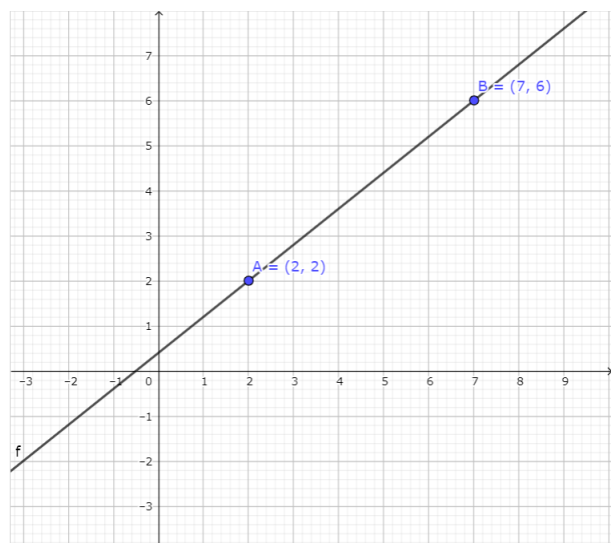


- Stel een populatievoorspellingsmatrix P voor deze diersoort op.
- Wat is de betekenis van P^2 ? En van P^3 ?
- Bereken de aantallen dieren per leeftijdsgroep over 4 jaar ($t = 1$).
- Onderzoek de groei van deze populatie dieren en teken een grafiek van het verloop van de totale populatie.
- Is er sprake van exponentiële groei? Zo ja, bepaal dan de groeifactor.
- Hoeveel bedraagt de levensverwachting van een pasgeboren exemplaar van deze diersoort?

Door vervuiling van hun natuurlijk milieu worden de overlevingskansen van deze populatie dieren na 8 jaar ($t = 2$) kleiner. Stel dat alle overlevingskansen met dezelfde factor k worden vermenigvuldigd.

- Bereken bij welke waarde van k de populatie nog net niet zal gaan uitsterven.
- Een keversoort kan bepaald worden door het aantal eitjes, larven en volwassen kevers. 95% van de eitjes sterven af, 75% van de larven worden een volwassen kever en per volwassen kever zijn er 100 eitjes. Als er 400 eitjes, 200 larven en 50 kevers zijn, hoe ontwikkelt zich deze soort op lange termijn?

7.3 Meetkundige toepassingen



Determinantvergelijking rechte:

$$r \leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Dit geeft hier:

$$r \leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 7 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow r \leftrightarrow -4x + 5y = 2$$

Afleiding formule:

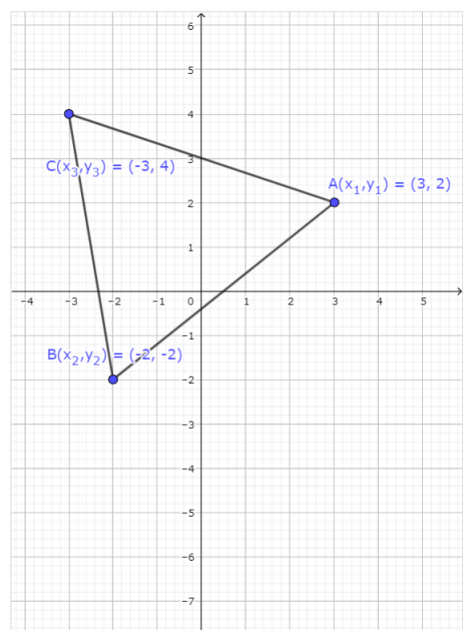
$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \xrightarrow[R_3 - R_2]{R_1 - R_2} \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & 0 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{ontwikkeling naar } K_3} (x - x_1)(y_2 - y_1) - (x_2 - x_1)(y - y_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_2 - x_1)(y - y_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1)$$

$$\Leftrightarrow y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

Figuur 23: <https://www.geogebra.org/m/vfenrnkv>



Oppervlakte driehoek m.b.v. determinant

$$\text{opp } \Delta ABC = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Dit geeft hier: $\text{opp } \Delta ABC = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{|-34|}{2} = 17$

Afleiding formule:

$$\text{opp } \Delta ABC = \frac{b \cdot h}{2} \quad \text{met } b = |BC| \text{ en } h = d(A, BC)$$

$$|BC| = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}$$

$$BC \leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \xrightarrow[\text{ontw. } R_1]{\Leftrightarrow} (y_2 - y_3)x - (x_2 - x_3)y + x_2y_3 - x_3y_2 = 0$$

$$d(A, BC) = \frac{|ux_1 + vy_1 + w|}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{(y_2 - y_3)^2 + (x_3 - x_2)^2}}$$

$$\text{opp } \Delta ABC = \frac{1}{2} \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} \cdot \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{(y_2 - y_3)^2 + (x_3 - x_2)^2}}$$

Figuur 24: <https://www.geogebra.org/m/vfenrnkv>

1. Bepaal voor welke waarde(n) van k de volgende rechten concurrent zijn. Bepaal in beide gevallen ook de coördinaten van het snijpunt

$$a \leftrightarrow 3x - 4y + 2 = 0$$

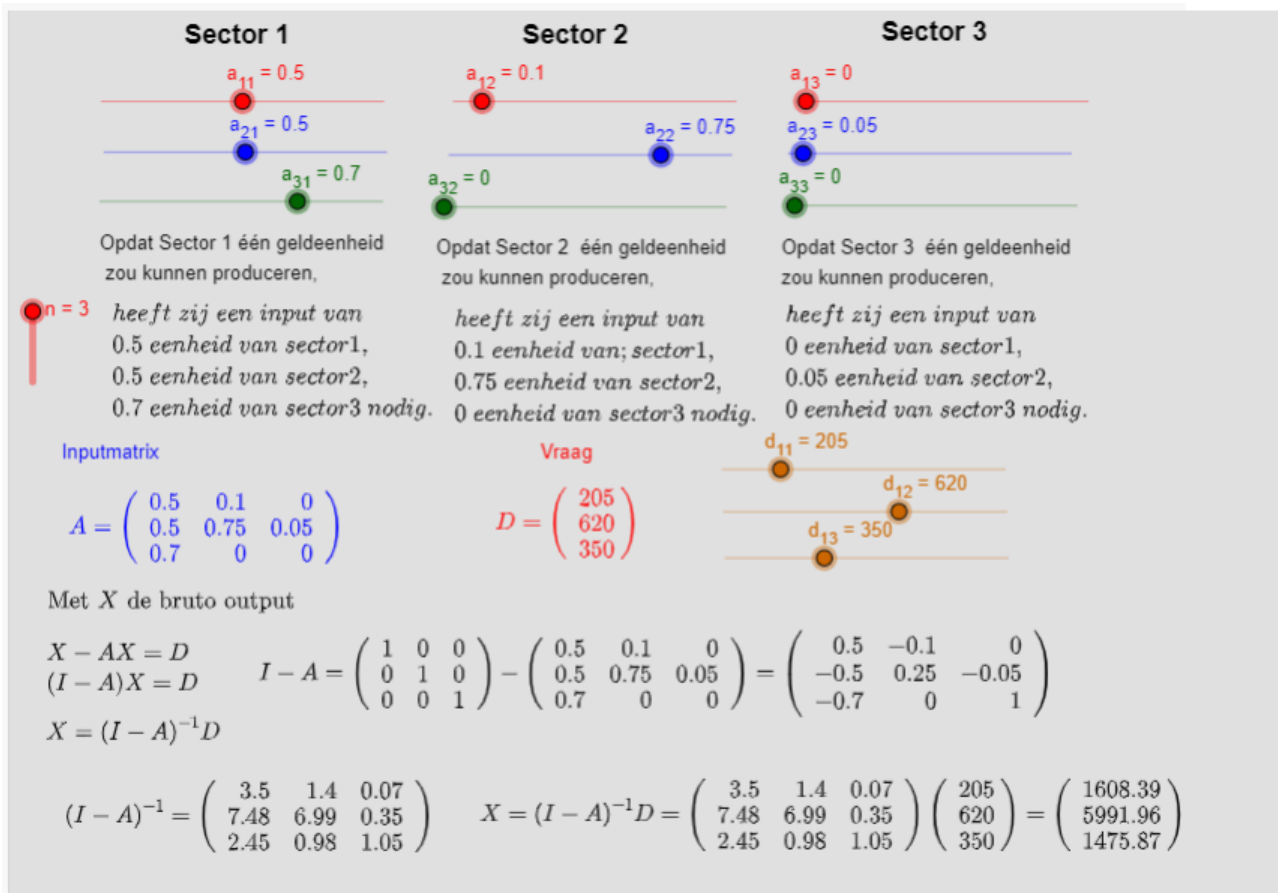
$$b \leftrightarrow 2x + ky - 5 = 0$$

$$c \leftrightarrow x + y - 8k = 0$$

2. Bepaal de vergelijking van de rechten door de punten $A(1, 3)$ en $B(-2, 3)$

7.4 Input-Output modellen van Leontief

7.4.1 begripsvorming



Figuur 25: <https://www.geogebra.org/m/xes8c7NN>

7.4.2 oefeningen

- Gegeven is de inputmatrix en de consumptie(vraag)matrix:

$$A = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.25 & 0.34 \\ 0.33 & 0.10 & 0.12 \\ 0.19 & 0.38 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1800 \\ 20000 \end{bmatrix}$$

- Leg de betekenis van de getallen $a_{21} = 0.33$ en $c_2 = 200$
 - Maak de som van de elementen in de derde kolom van A. Leg de betekenis uit van dit getal.
 - Los dit input-output systeem op voor de gegeven consumptievector C
- Veronderstel dat de economie van een regio slechts bestaat uit een staal- en een houtindustrie. Het kost 0.1 eenheden staal en 0.5 eenheden hout om één eenheid staal te produceren; het kost 0.2 eenheden staal en 0.0 eenheden hout om één eenheid hout te produceren. Voor volgende maand is er een export van 16 eenheden staal en 8 eenheden hout voorzien. Hoeveel eenheden van elk moeten er dan geproduceerd worden?

8 Taken

- Bewerkingen met matrices
- Stelsels oplossen met methode van Gauss Jordan

3. Stelsels met parameter Bespreek volgende stelsels in functie van de parameter m of a

$$(a) \begin{cases} m^2x & -my & +z & = & -1 \\ x & -my & +mz & = & -m \\ mx & -my & +z & = & -1 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x & -2y & +az & = & 1 \\ x & -2ay & +z & = & -2 \\ ax & -2y & +z & = & 1 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x & +7y & +mz & = & 1 \\ 2x & +15y & +z & = & 3 \\ x & +7y & +m^2z & = & m \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} 3x & +1y & +2z & = & 4 \\ mx & +2y & -z & = & 5 \\ 3x & +(m-5)y & +7z & = & 7 \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} 1x & +2y & +mz & = & 0 \\ & +y+3z & & = & 0 \\ 2x & +m^2y & -7z & = & 1-m^2 \end{cases}$$

$$(f) \begin{cases} mx & +y & +z & = & m^2 \\ x & +my & +z & = & 3m \\ x & +y & +mz & = & 2 \end{cases}$$

$$(g) \begin{cases} mx & +(m+1)y & +z & = & 0 \\ mx & +y & +(m+1)z & = & 0 \\ 2mx & +y & +z & = & m+1 \end{cases}$$

$$(h) \begin{cases} mx & +y & +z & = & 1 \\ x & +my & +z & = & m \\ x & +y & +mz & = & m^2 \end{cases}$$

$$(i) \begin{cases} x & +ay & +z & = & a^2 \\ ax & +2ay & +2z & = & 2a^2 \\ x & +ay & +az & = & 1 \end{cases}$$

$$(j) \begin{cases} x & -y & -mz & = & -1 \\ x & +my & -z & = & 1 \\ mx & +y & -z & = & 1 \end{cases}$$

$$(k) \begin{cases} ax & +2y & +z & = & 1 \\ x & +y & +z & = & 0 \\ x & +y & +2z & = & a \end{cases}$$

$$(l) \begin{cases} 2x & +3y & +z & = & 4 \\ -x & +ay & +2z & = & 5 \\ 7x & +3y & +(a-5)z & = & 7 \end{cases}$$

$$(m) \begin{cases} mx & -my & +m^2z & = & m \\ x & +y & -z & = & m \\ (m-1)x & +(m^2-1)y & -(m-1)z & = & m^2-1 \end{cases}$$

$$(n) \begin{cases} ax & +ay & -az & = & a \\ a^2x & -2a^2y & -az & = & a^2 \\ x & -ay & -a^2z & = & 1 \end{cases}$$

$$(o) \begin{cases} ax & +(1-2a)y & +(2a-1)z & = & -a \\ -x & +(2-a)y & (a-2)z & = & a^2 \\ -a^2x & +a^2y & +(a^2-1)z & = & 1 \end{cases}$$

$$(p) \begin{cases} x & +1y & +(m^2-1)z & = & -m \\ mx & +1y & +2(m-1)z & = & -m \\ (1+m)x & -my & +(m+1)z & = & m^2+3m+3 \end{cases}$$

$$(q) \begin{cases} -mx & +(m^2+m)y & +z & = & m^2+m \\ 1x & +(-m+1)y & -mz & = & -1 \\ -mx & +(m^2+1)y & +z & = & -m-1 \end{cases}$$

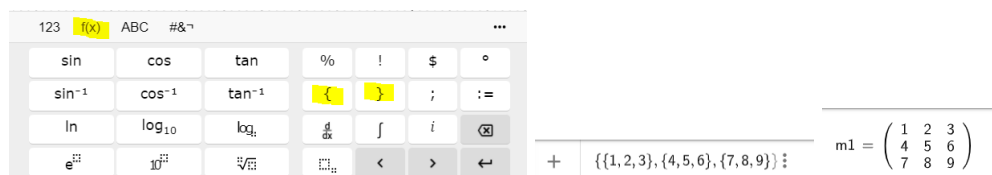
$$\begin{aligned}
\text{(r)} \quad & \begin{cases} x & +y & +z & = & 1 \\ x & -y & +z & = & -1 \\ m^2x & +my & +z & = & m^3 \end{cases} \\
\text{(s)} \quad & \begin{cases} (m+2)x & +3y & -3z & = & 0 \\ x & +(m+1)y & -z & = & 1 \\ 2x & +3y & +(m-3)z & = & 0 \end{cases} \\
\text{(t)} \quad & \begin{cases} x & +ay & +z & = & 2a \\ ax & +y & +z & = & 0 \\ x & +ay & +(a+1)z & = & a \end{cases} \\
\text{(u)} \quad & \begin{cases} ax & +3y & +3z & = & a \\ x & & +az & = & a \\ 2x & +ay & & = & 0 \end{cases} \\
\text{(v)} \quad & \begin{cases} ax & +y & +z & = & a^2 \\ 2ax & +ay & +2z & = & 2a^2 \\ ax & +y & +az & = & 1 \end{cases} \\
\text{(w)} \quad & \begin{cases} (3-a)x & +y & -z & = & 0 \\ 2x & +(2-a)y & -2z & = & 0 \\ x & -y & +(1-a)z & = & 0 \end{cases} \\
\text{(x)} \quad & \begin{cases} (m+2)x & +2y & +4z & = & 3m \\ -mx & +5y & +2mz & = & -2m \\ 2x & +7y & +6z & = & 1 \end{cases} \\
\text{(y)} \quad & \begin{cases} x & +my & +z & = & 1 \\ mx & +y & +(m-1)z & = & m \\ x & +y & +z & = & m+1 \end{cases} \\
\text{(z)} \quad & \begin{cases} mx & +y & -z & = & 0 \\ 2x & +my & +z & = & 1 \\ & +y & +z & = & 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

4. Toepassingen op matrices

9 Matrixbewerkingen m.b.v. geogebra

9.1 Ingeven

Dit moet via de accolades gebeuren. Er is een {} nodig voor de matrix en voor elke rij een {} nodig. Zowel de getallen als de rijen moeten door , gescheiden worden.



Geogebra geeft vervolgens automatisch een naam aan deze matrix, hier m1.

9.2 bewerkingen

Bewerkingen die je kan ingeven zijn:

1. transponeer(m1)
2. determinant(m1)
3. $m1^{-1}$
4. rref(m1)

$m1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$	$\vdots$
$a = \text{Determinant}(m1)$	$\vdots$
$\rightarrow 0$	
$m2 = \text{Transponeer}(m1)$	$\vdots$
$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$	
$l1 = m1^{-1}$	$\vdots$
$\rightarrow ?$	
$m3 = \text{RREF}(m1)$	$\vdots$
$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	

Ook hier zal geogebra automatisch een naam toekennen.