Estudio de tangencias

Enrique Hoyos Jiménez

Octubre, 2017

Sumario

Introducción.

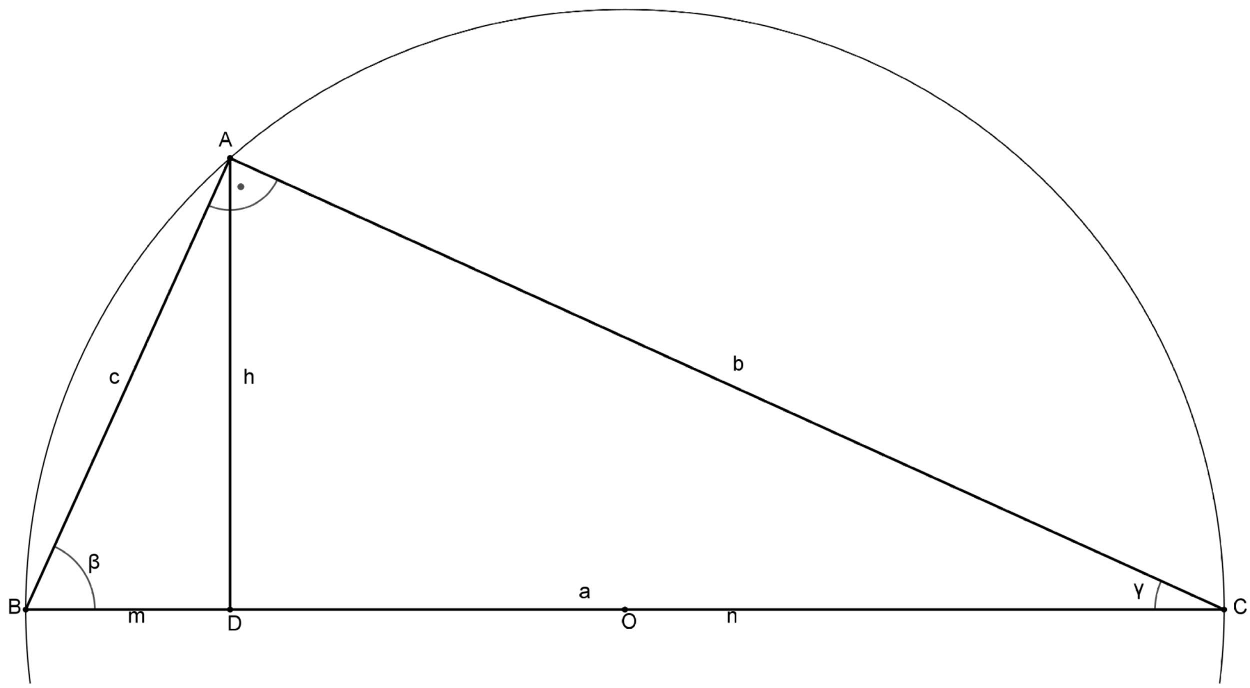
Una circunferencia puede pasar por un punto, ser tangente a una recta, o ser tangente a una circunferencia.
Tres de estas condiciones simultáneas determinan un circunferencia, si bien en general habrá un número finito de soluciones y no una sola.
Denotamos cada caso posible por la nomenclatura XXX, donde $X \in \{P, t, c\}$.
De este modo podemos contemplar tantos casos como combinaciones con repetición de 3 objetos tomados de 3 en 3, es decir

$$CR_{3,3} = \binom{3+3-1}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$$

Llamamos c_1 a la circunferencia solución en cada caso. Si hay varias se denominan $c_1, c_2, c_3, \ldots$ A su centro se le llamará Q_1 y a su radio r_1, (Q_1 , Q_2 , Q_3 ,... ; r_1 , r_2 , r_3 ,...) en su caso.

{PPP, PPt, Ptt, ttt, PPc, Ptc, Pcc, ttc, tcc, ccc}

Teorema del Cateto.

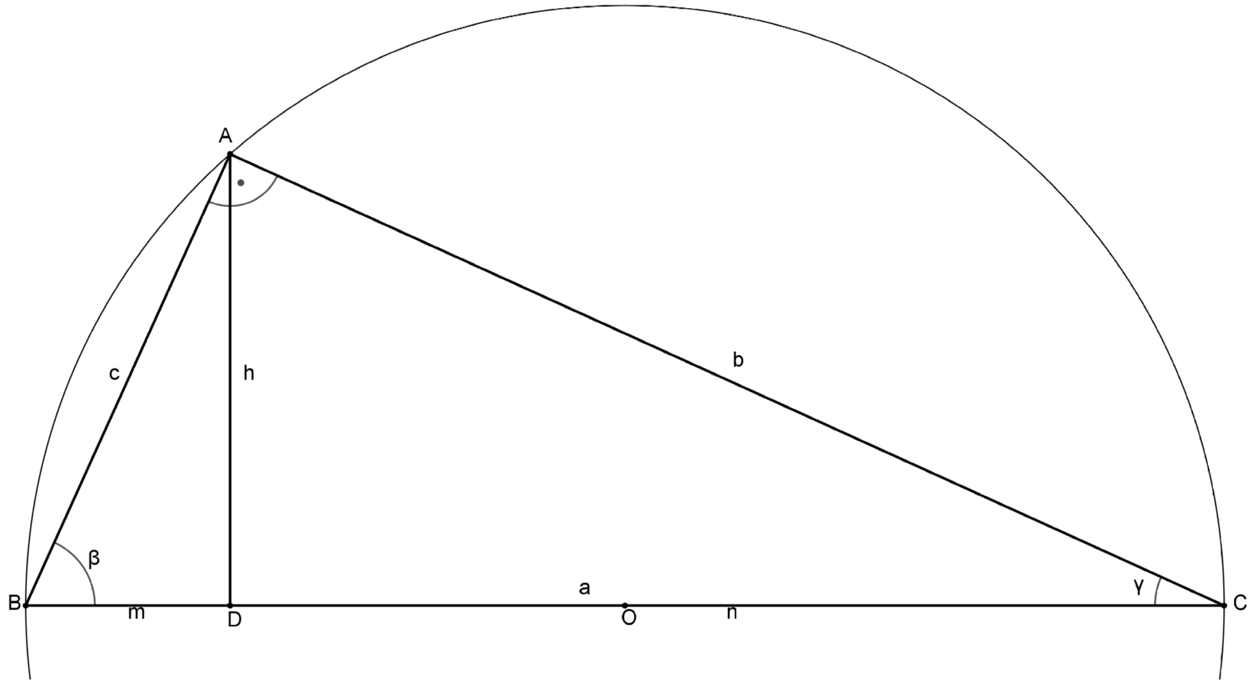


$$\triangle BAC \sim \triangle BDC \Rightarrow \frac{c}{m} = \frac{a}{c} \Rightarrow c^2 = a \cdot m$$

Y análogamente

$$b^2 = a \cdot n$$

Teorema de la altura.

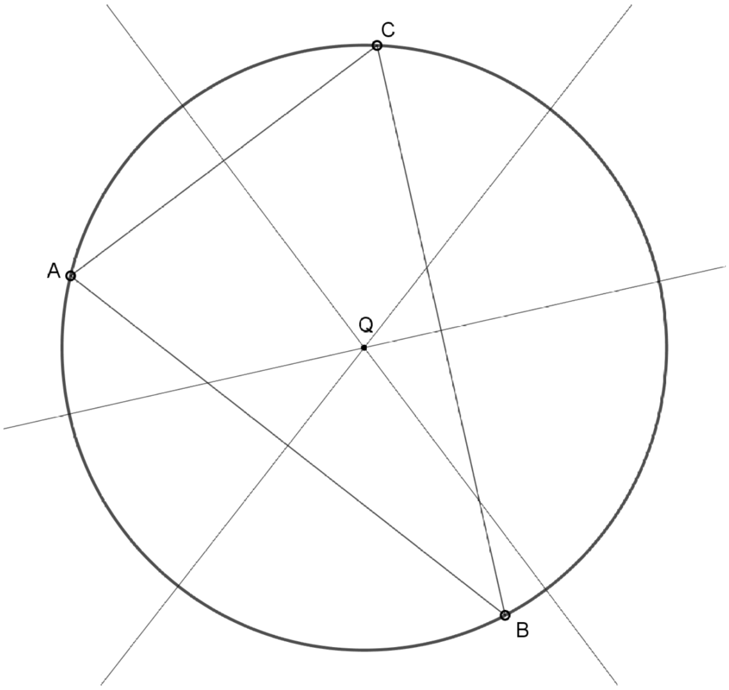


$$\triangle BDA \sim \triangle CDA \Rightarrow \frac{h}{m} = \frac{n}{h} \Rightarrow h^2 = m \cdot n$$

1. Caso 1º: PPP.

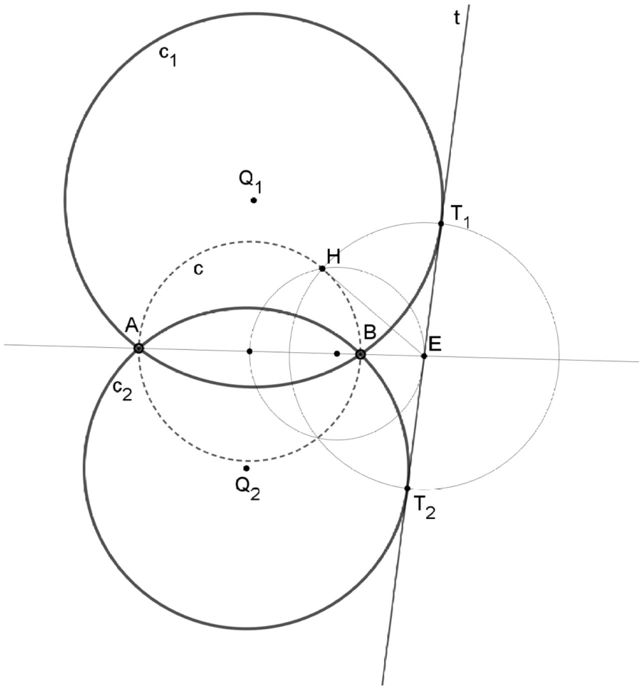
Siendo A, B, C los puntos, su distancia al centro (Q) de la circunferencia buscada es igual para los tres. Por tanto, Q está en la intersección de las mediatrices de $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$. El radio de *c* es entonces

$$r = \overline{QA} = \overline{QB} = \overline{QC}$$



2. Caso 2º: PPt.

2.1. Los dos puntos están en el mismo semiplano.



Siendo A, B los puntos, t la recta, la recta AB corta a t en E.
Trazamos la recta tangente desde E a la circunferencia c, de diámetro AB. Siendo H el punto de tangencia se tiene que:

$$pot(E,c)=\overline{EB}\cdot\overline{EA}=\overline{EH}^2$$

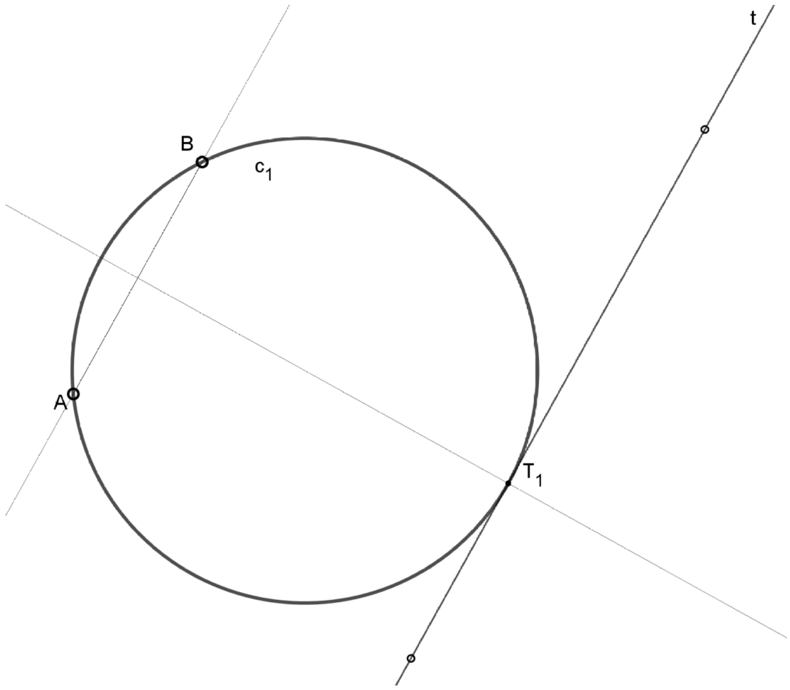
Si trazamos la circunferencia de centro E y radio $\overline{EH}$ ésta corta a t en dos puntos T_1 , T_2 , siendo

$$\overline{EB}\cdot\overline{EA}=\overline{ET_1}^2$$

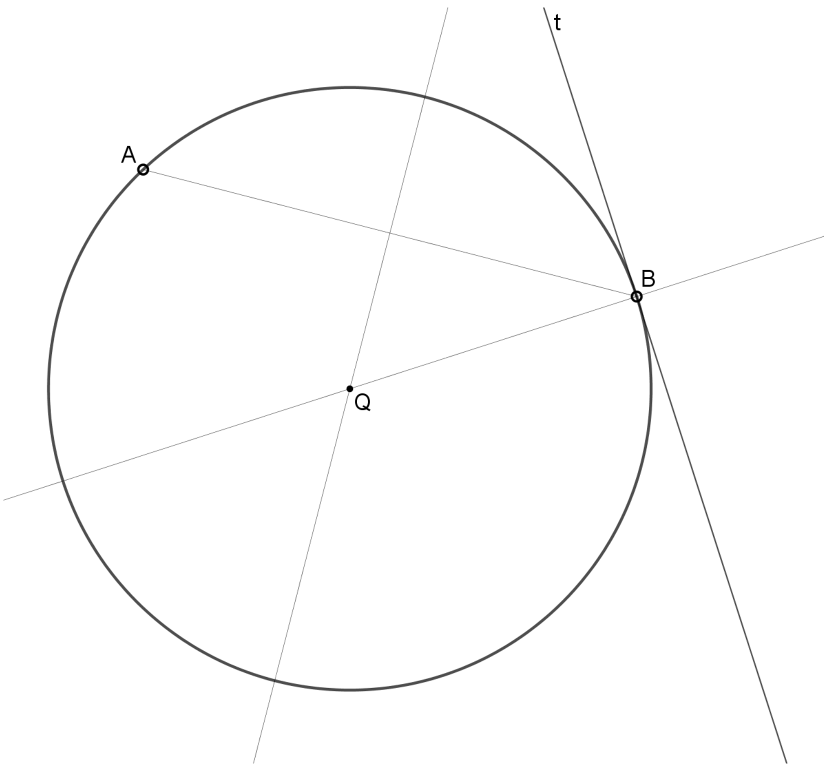
Luego los puntos A, B, T_1 determinan una circunferencia a la que el segmento ET_1 es tangente, y por tanto la recta t.

Análogamente para T_2 .

Caso de que $AB||t$ hay una sola solución. El punto T_1 es la intersección de t con la mediatriz de $\overline{AB}$.

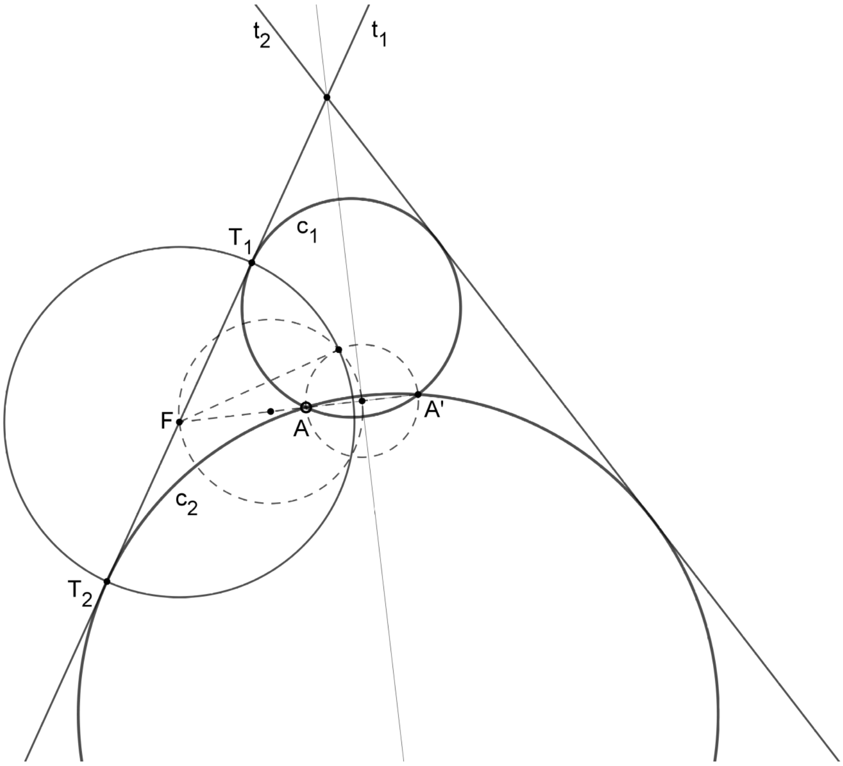


2.2. Un punto en la recta y otro fuera.



3. Caso 3º: Ptt.

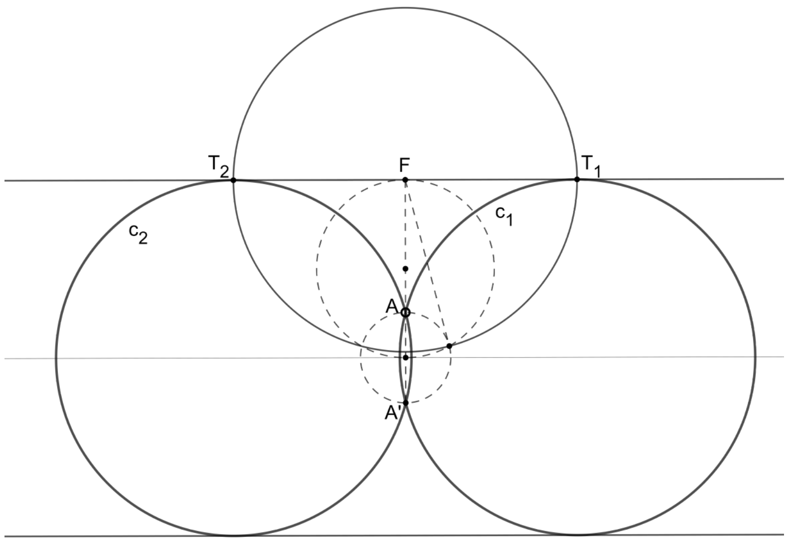
3.1. Rectas concurrentes.



Siendo t_1, t_2 las rectas, A el punto, determinamos A’ simétrico de A respecto a la bisectriz de $<t_1, t_2>$.

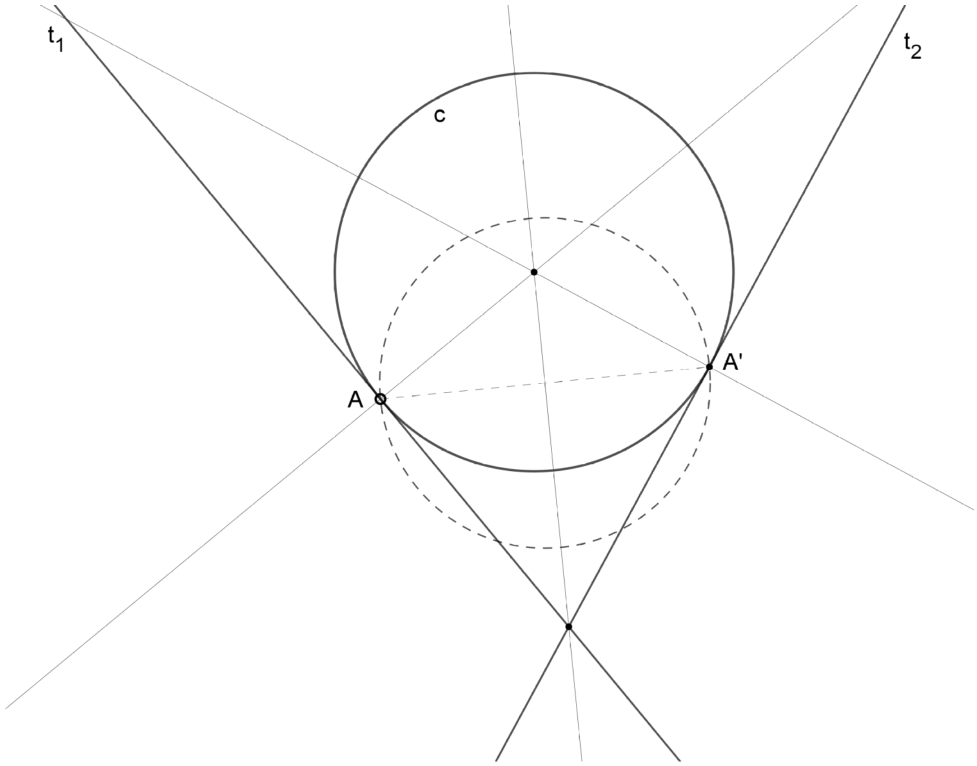
Si c_1 es tangente a t_1, t_2 y pasa por A, ha de pasar también por A’ (por simetría). Con eso reducimos el problema al caso PPt, siendo A, A’ los puntos y t_1 la recta.

3.2. Rectas paralelas.



La construcción es similar a la del caso en que las rectas se cortan, pero cambiando la bisectriz por la recta equidistante a las paralelas.

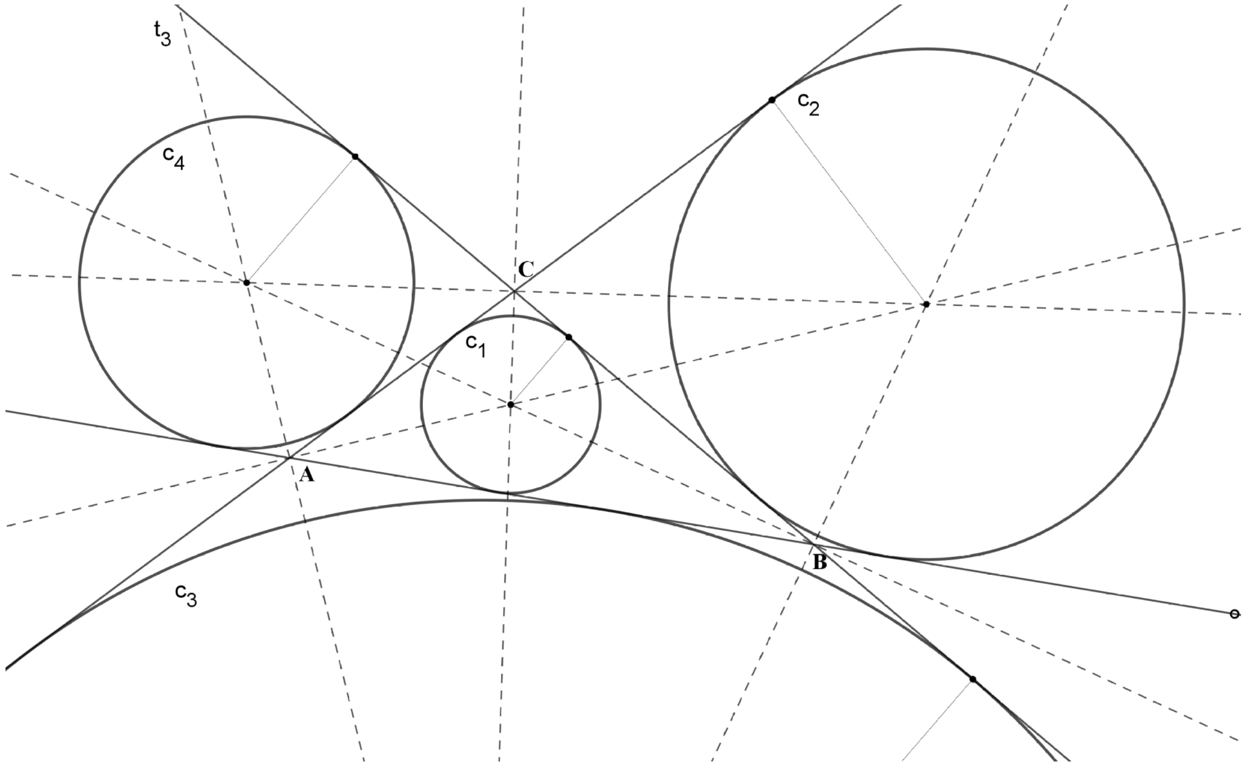
3.3. Punto en una de las rectas.



Si A está en t_1 su simétrico respecto a la bisectriz, A’, estará en t_2 y el centro de la circunferencia tangente que se busca estará en la intersección de las perpendiculares a t_1, t_2 por A, A' respectivamente.

4. Caso 4º: ttt.

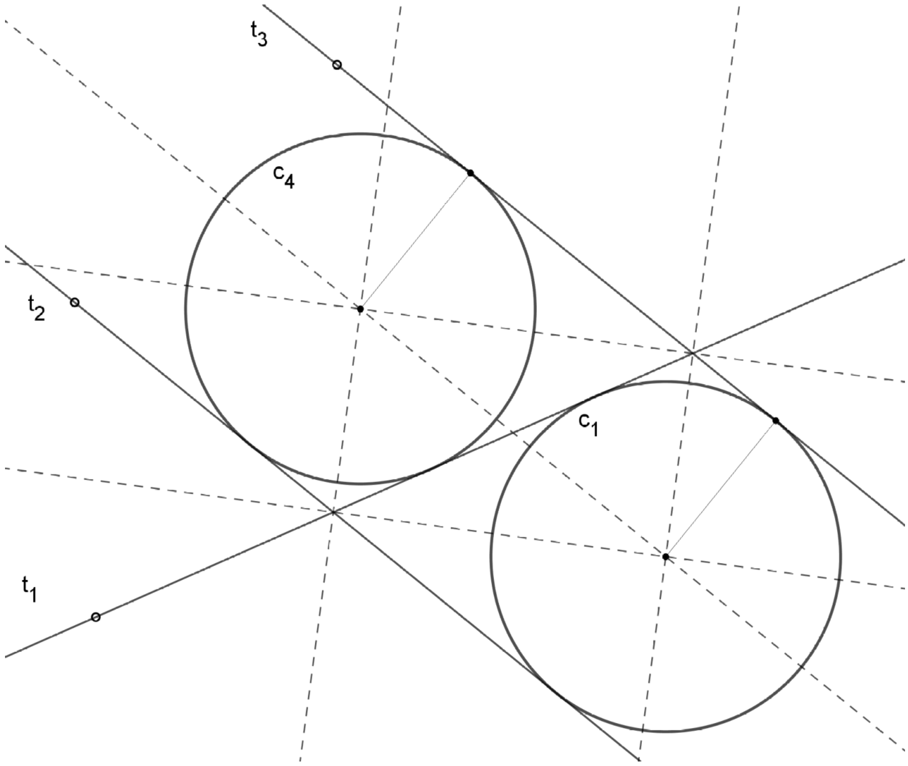
4.1. Las rectas se cortan 2 a 2.



En este caso las rectas determinan un triángulo $\triangle ABC$. Las bisectrices interiores de $\triangle ABC$ determinan el *incentro* o centro de la circunferencia inscrita.
Cada dos bisectrices exteriores junto con una interior determinan un exincentro o centro de una circunferencia exinscrita.

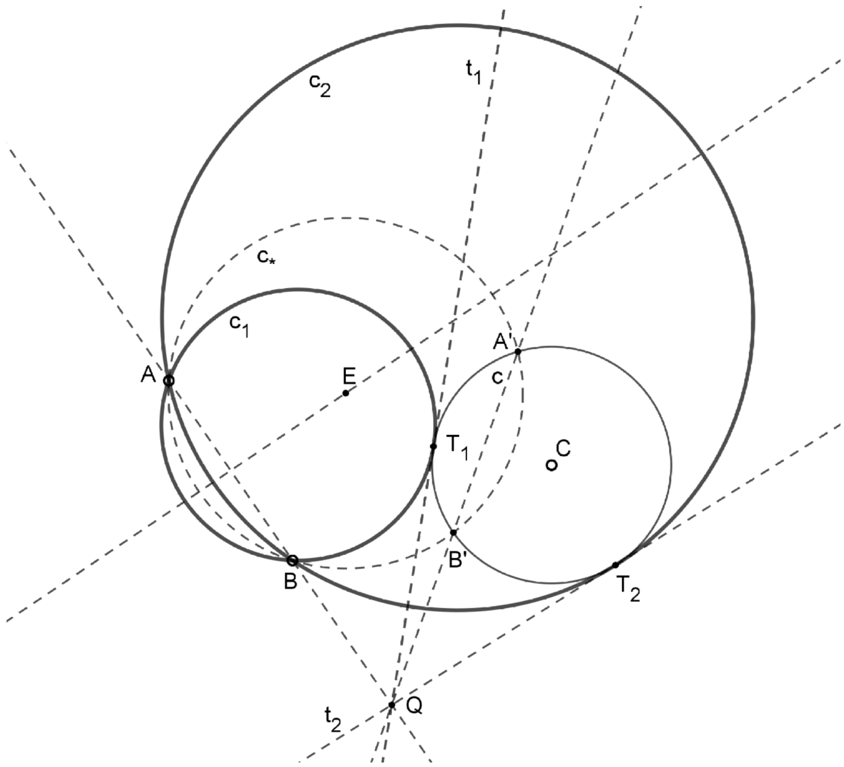
4.2. Dos rectas paralelas y una transversal.

En este caso no se determina ningún triángulo. No obstante, siendo $t_2 \| t_3$, $t_1 \nparallel t_2$, las bisectrices de $<t_1, t_2>$ y $<t_1, t_3>$ se cortan en dos puntos distintos que son los centros de las circunferencias tangentes buscadas.



5. Caso 5º: PPc.

5.1. Dos puntos exteriores a la circunferencia.



Sean A, B los puntos, c la circunferencia con centro en C.
Con centro en un punto (E) de la mediatriz de $\overline{AB}$ se traza una circunferencia c_* que corte a c en los puntos A', B'.
Las rectas AB , A'B' se cortarán en un punto Q. Desde Q se trazan las tangentes a c.
Siendo T_1, T_2 los respectivos puntos de tangencia, se tiene que

$$\overline{QT_2}^2 = \overline{QT_1}^2 = pot(Q,c) = \overline{QA}' \cdot \overline{QB}' = pot(Q,c_*) = \overline{QA} \cdot \overline{QB}$$

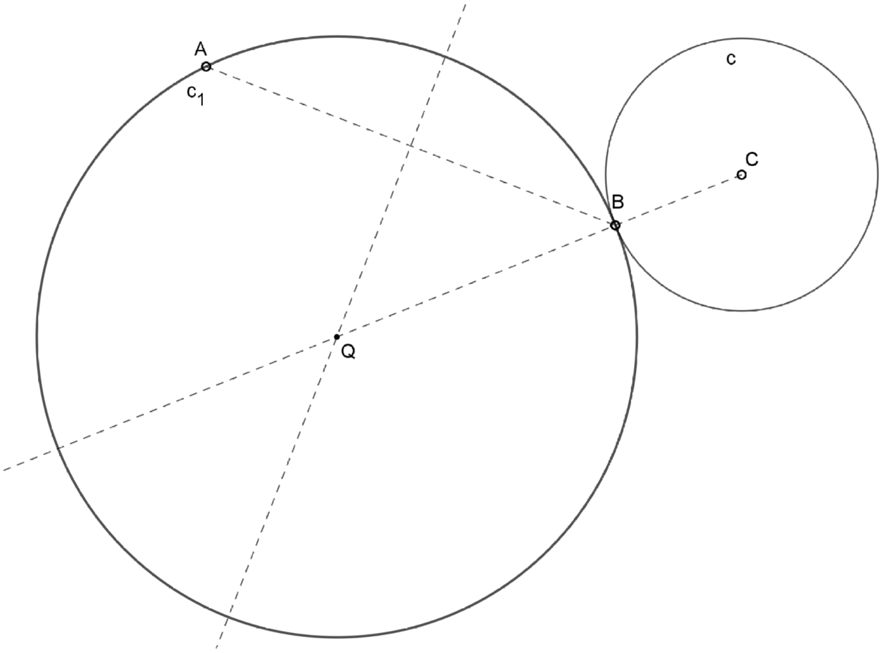
Por lo que Q llamando c_1 a la circunferencia que pasa por A, B, T_1 se tiene

$$pot(Q,c_1) = \overline{QT_1}^2$$

y por tanto QT_1 es tangente a c_1 al igual que c, por lo que c_1 es una solución.

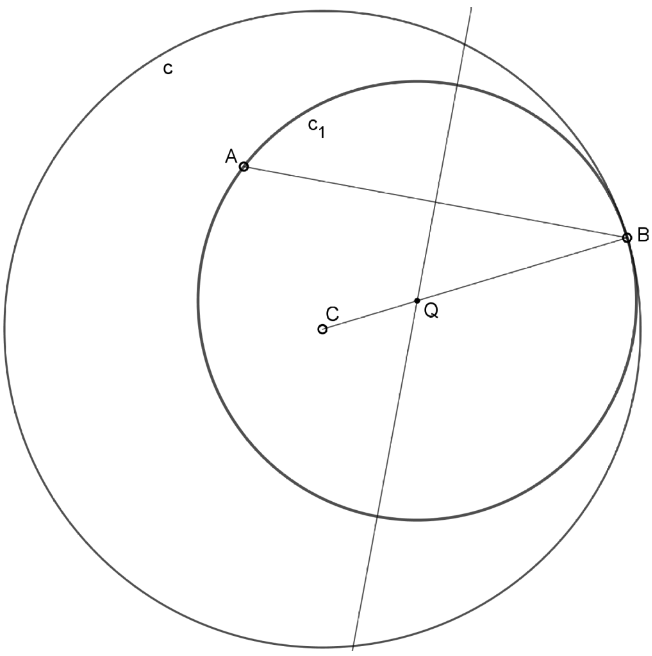
Análogamente para c_2 que pasa por A, B, T_2 .

5.2. Un punto en la circunferencia, el otro exterior.



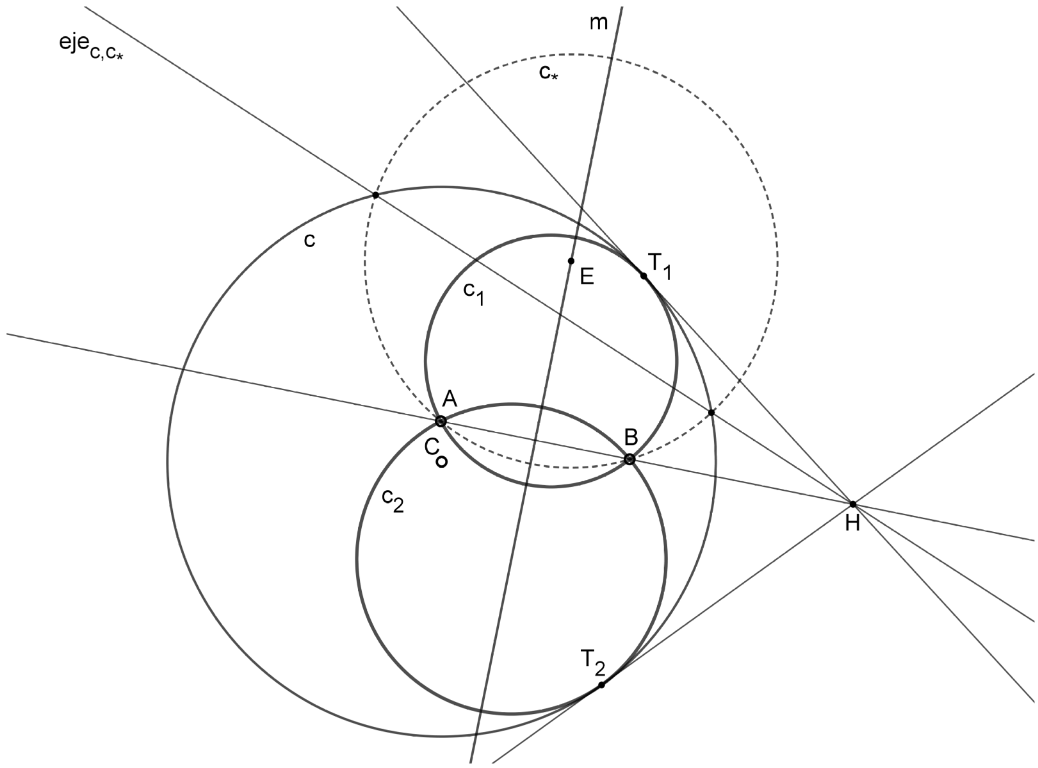
El centro de la circunferencia tangente está en la intersección de la mediatriz de $\overline{AB}$ con la recta BC. El radio, obviamente, es $\overline{QA}=\overline{QB}$.

5.3. Un punto en la circunferencia y otro interior.



Análogo al caso anterior (5.2).

5.4. Dos puntos interiores a la circunferencia.



La resolución es similar a la del caso 5.1. Trazando la mediatriz, m, del segmento $\overline{AB}$ se elige un punto, E, de ella como centro de una circunferencia c_* que pase por A, B.

Determinamos con ello el eje radical de $c, c_* \left(eje_{c,c_*}\right)$.

La intersección de esta recta con la recta AB es el punto H.
Trazando desde H las tangentes a c, y siendo T_1, T_2 los puntos de tangencia, se verifica que siendo c_1 la circunferencia que pasa por A, B, T_1 :

$$pot(H, c_1) = \overline{HB} \cdot \overline{HA} = \overline{HT_1}^2 = pot(H, c)$$

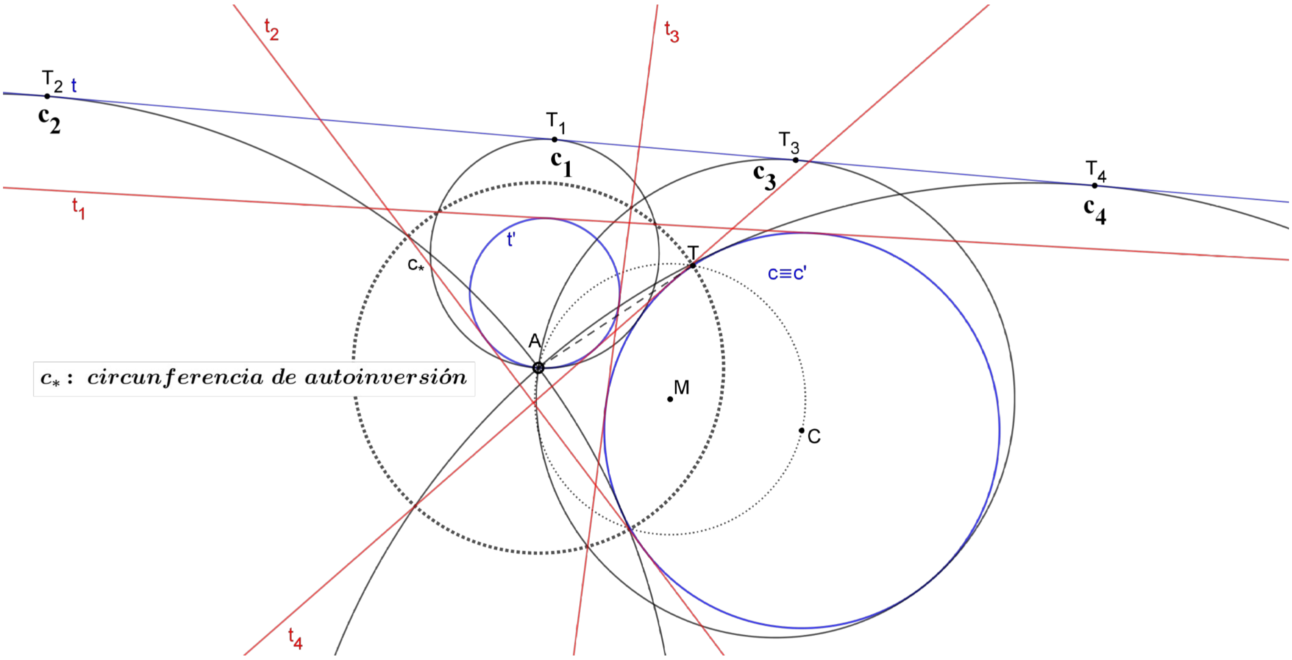
Por lo que $\overline{HT_1}$ es tangente tanto a c como a c_1 y por tanto c_1 es tangente a c en T_1 .

Análogamente para la circunferencia c_2 que pasa por A, B, T_2 .

{PPP, PPt, Ptt, ttt, PPc, Ptc, Pcc, ttc, tcc, ccc}

6. Caso 6º: Ptc.

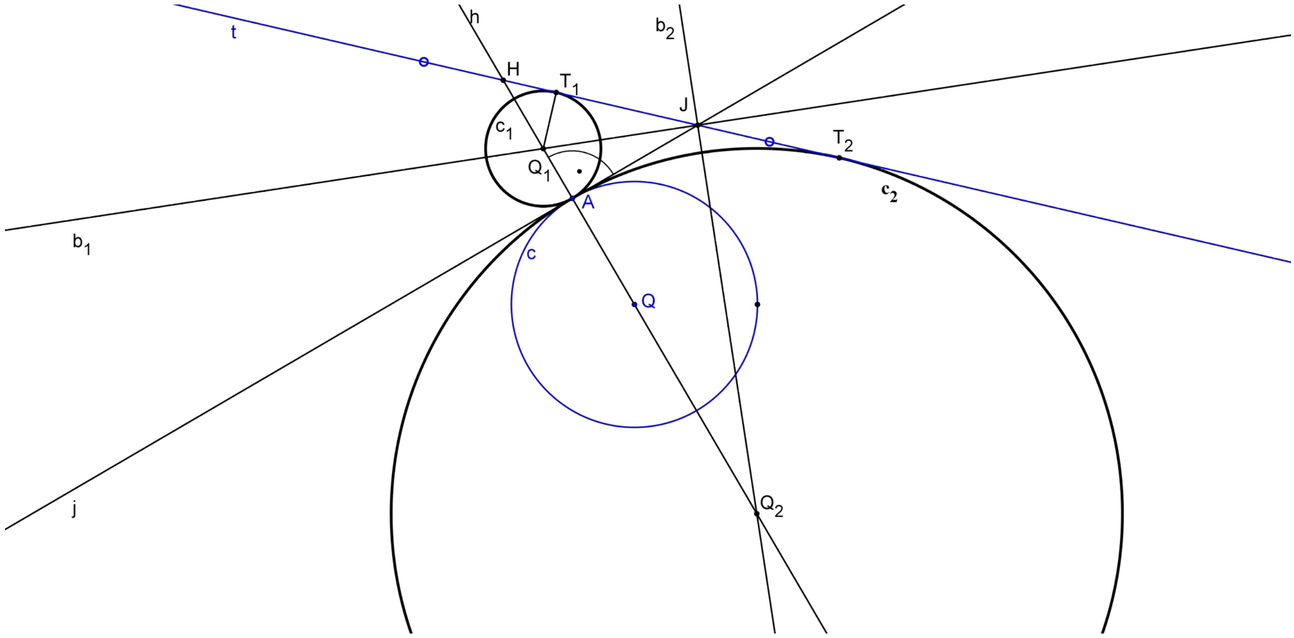
6.1. Punto exterior a la circunferencia.



Llamamos A al punto dado, t, c, respectivamente a la recta y circunferencia dadas.
Realizamos una inversión de centro A y potencia pot(A, c).
La circunferencia c es doble para esta inversión y c_* es la circunferencia de autoinversión (de puntos dobles).
Siendo t' la circunferencia inversa de la recta t, las tangentes comunes a $c \equiv c'$ y r' son inversas de las circunferencias buscadas, c_1, c_2, c_3, c_4 .

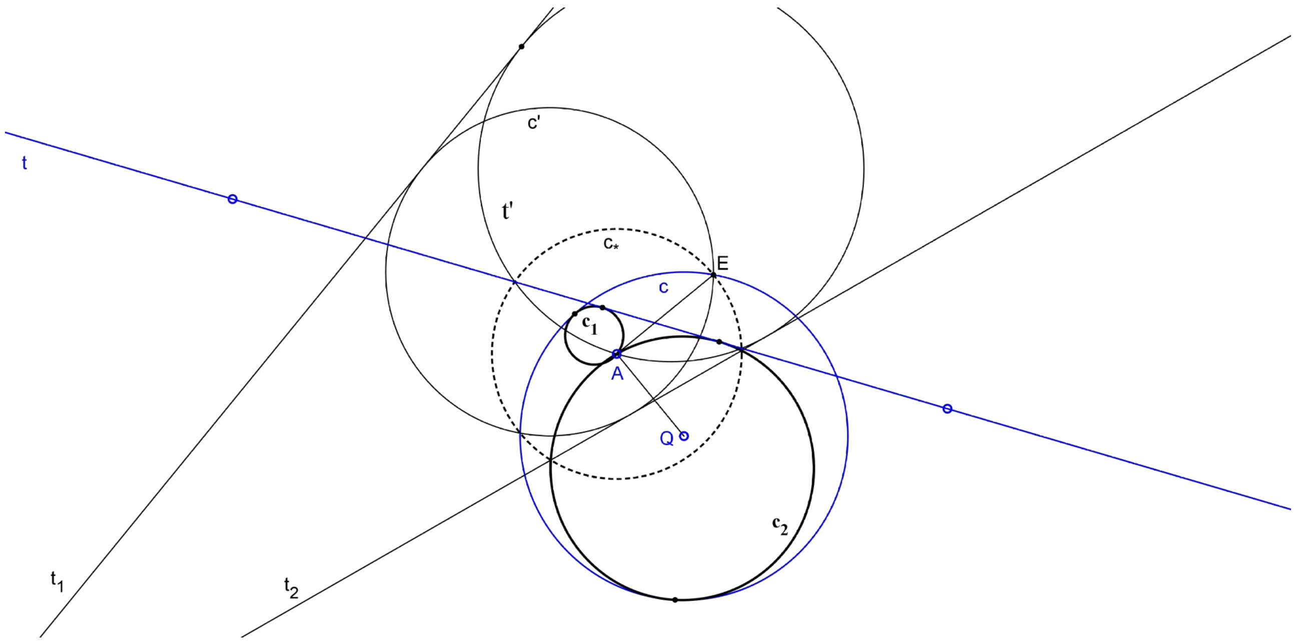
Si A y c están en distinto semiplano respecto t, no hay solución.

6.2. Punto en la circunferencia.



El centro de la circunferencia tangente ha de estar en la recta AQ y equidistar de A y de t.
Por tanto ha de equidistar de las rectas t y la perpendicular a AQ por A, es decir ha de de estar en la bisectriz de $<t, j>$.
Hay por tanto dos soluciones correspondientes con las dos bisectrices b_1, b_2 de $<t, j>$.

6.3. Punto dentro de la circunferencia.

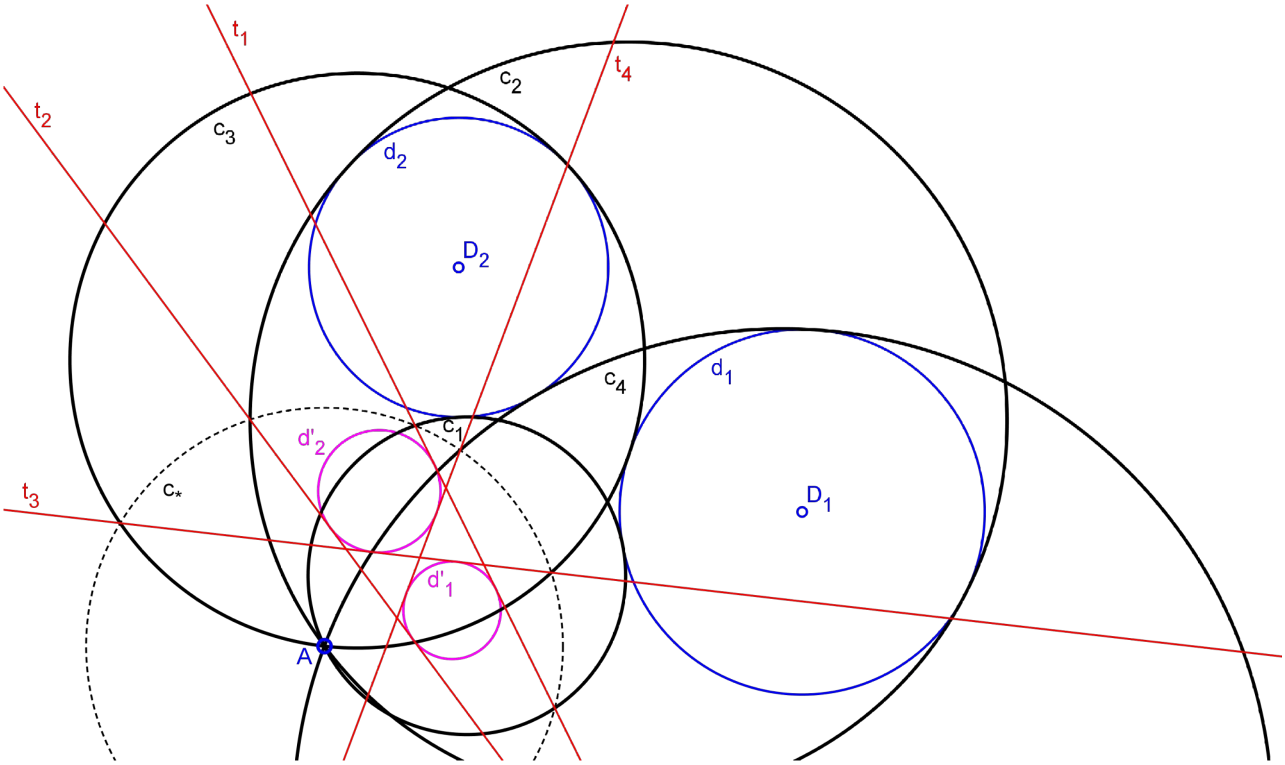


Realizamos una inversión de centro A y potencia pot(A, c). Determinamos la circunferencia c_* de autoinversión y las circunferencias c’ , t’ inversas de c, t respectivamente.

Las rectas t_1, t_2 tangentes comunes a c', t', tienen como inversas circunferencias c_1, c_2 que pasan por el centro de inversión A y son tangentes a c, t.

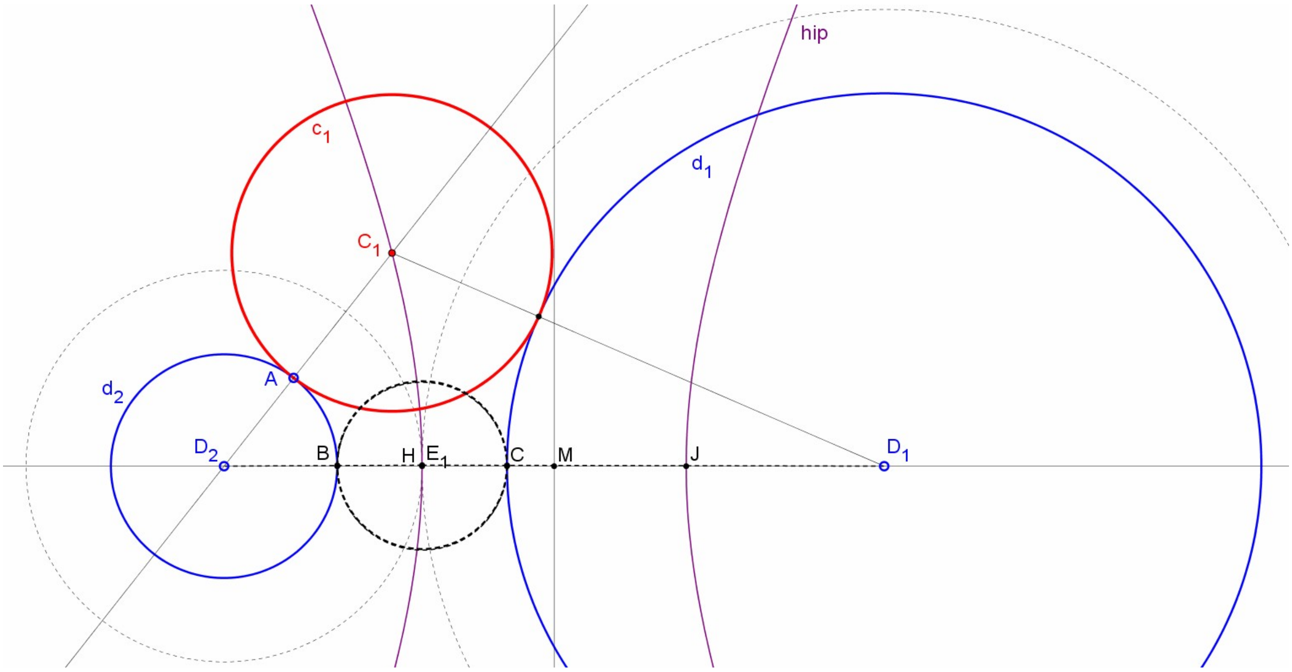
7. Caso 7º: Pcc.

7.1. Punto exterior a las dos circunferencias.



Llamamos A al punto, d_1, d_2 a las circunferencias.
Con centro en el punto dado (A) se traza una circunferencia c_* que se toma como circunferencia de autoinversión.
A las inversas d'_1, d'_2 se les traza las tangentes t_1, t_2, t_3, t_4 . Las inversas de estas son las circunferencias c_1, c_2, c_3, c_4 que pasan por A y son tangentes a d_1, d_2 .

7.2. Punto en una de las circunferencias.



Sean A el punto, d_1 , d_2 las circunferencias dadas, c_1 la circunferencia tangente a d_1 , d_2 que pasa por A.
Para que la circunferencia buscada pase por A, éste debe ser el punto de tangencia de d_2 con c_1 . Luego su centro (C_1) ha de estar en la recta D_2A
Por otra parte, siendo:

$$\begin{Bmatrix} r_1 : \ radio(c_1) \\ s_1 : \ radio(d_1) \\ s_2 : \ radio(d_2) \end{Bmatrix}$$

ha de cumplirse:

$$\left.\begin{matrix} dist(C_1, D_1) = s_1 + r_1 \\ dist(C_1, D_2) = s_2 + r_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow dist(C_1, D_1) - dist(C_1, D_2) = s_1 - s_2 \equiv k$$

Luego C_1 está en una hipérbola (*hip*) de focos D_1 , D_2 y que pasa por el punto

H=(h,0): PuntoMedio(B,C)

Llamando *a* el semieje mayor de la hipérbola y siendo

$$\left(\begin{array}{c} M=(m,0):PuntoMedio(D_1,D_2) \\ D_1=(x_1,0) \\ D_2=(x_2,0) \\ B=(b,0)=(x_2+s_2,0) \\ C=(c,0)=(x_1-s_1,0) \end{array}\right)$$

Se verifica:

$$\left(\begin{array}{c} m=\frac{x_1+x_2}{2} \\ h=\frac{b+c}{2}=\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{s_2-s_1}{2} \end{array}\right)$$

De donde

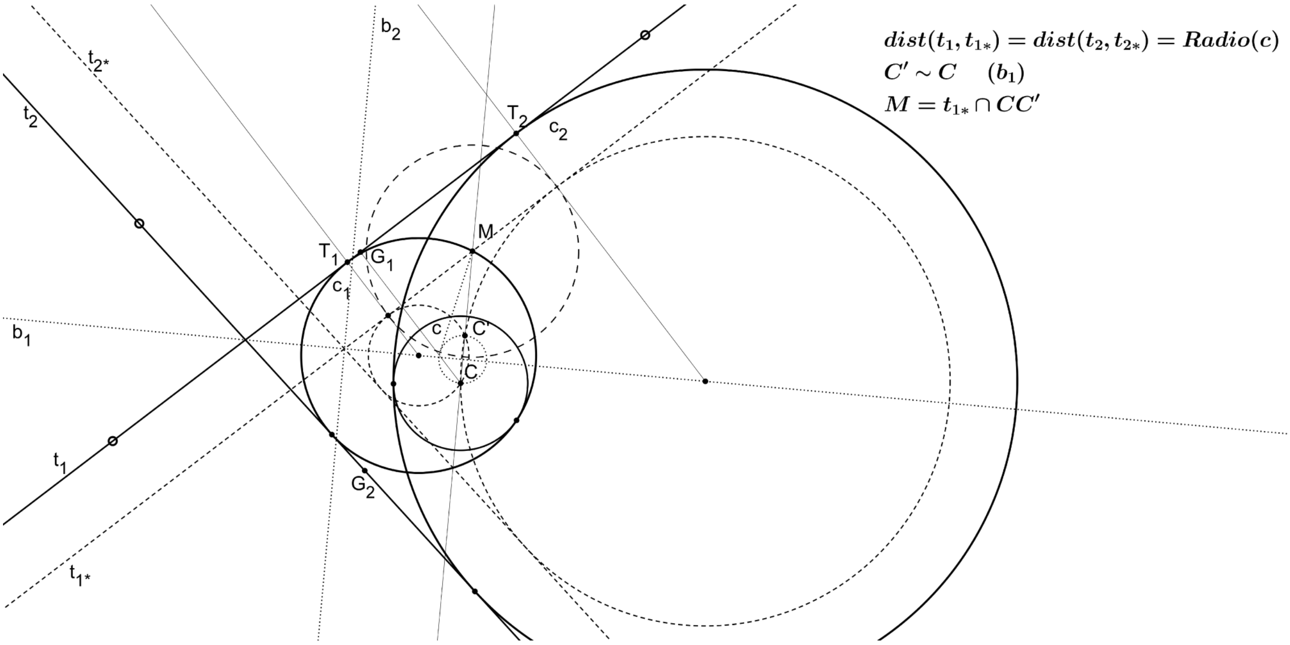
$$SemiEjeMayor(hip)\equiv a=m-h=\frac{s_1-s_2}{2}$$

Como conclusión

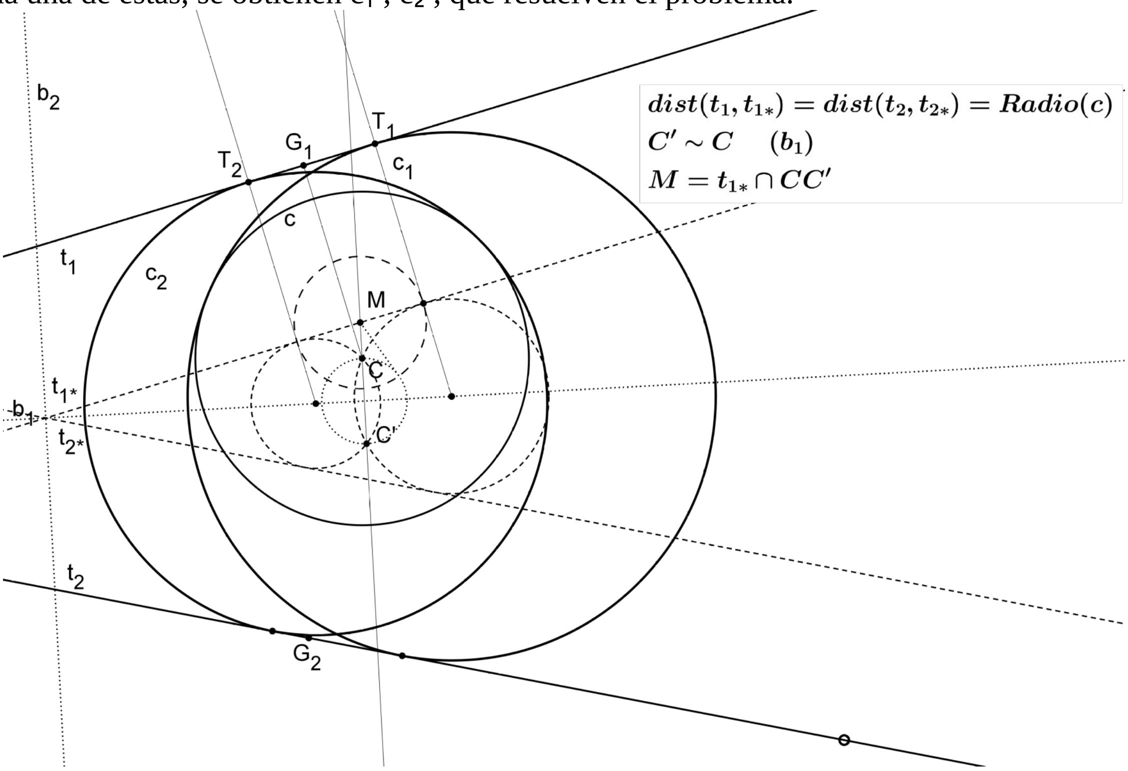
$$\begin{array}{c} Centro(c_1)\equiv C_1=hip\cap D_2A \\ Radio(c_1)=\overline{C_1A} \end{array}$$

8. Caso 8º: ttc.

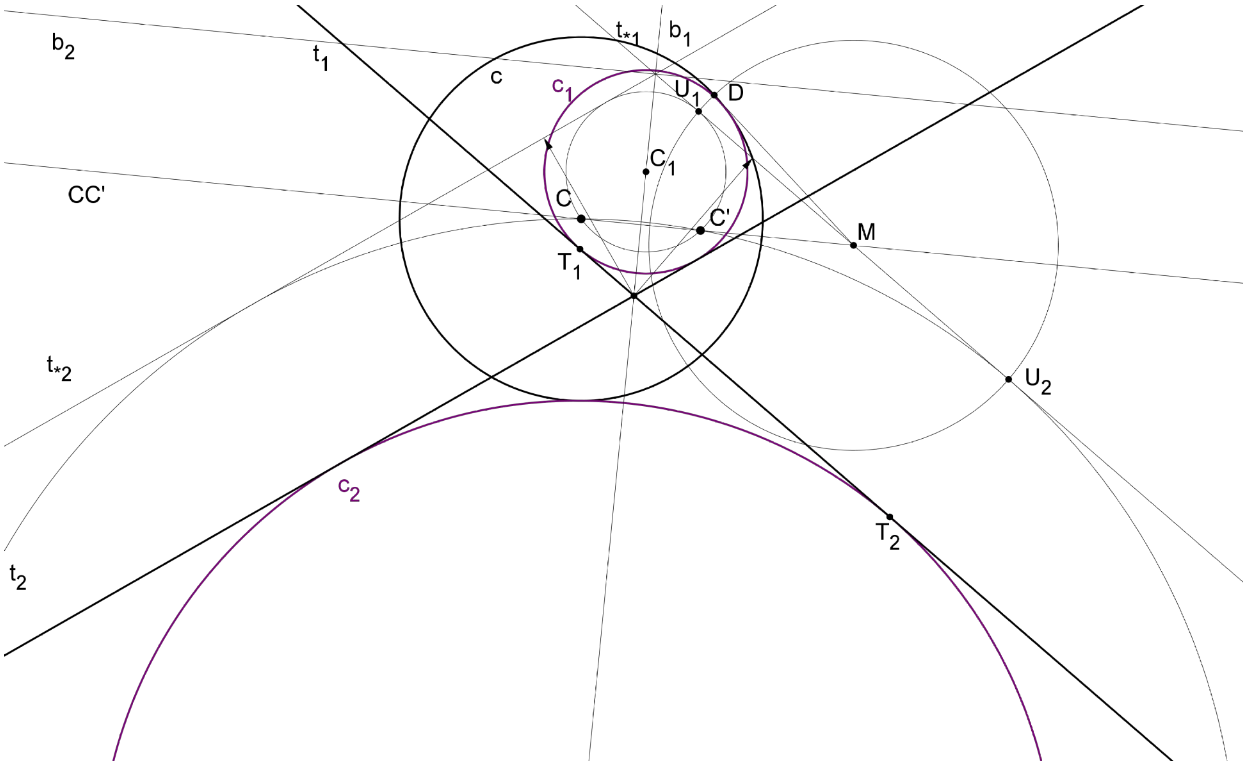
8.1. Rectas concurrentes.



Se reduce al caso Ptt, trasladando t_1 , t_2 paralelamente a sí mismas una distancia igual a Radio(c). Resolvemos el problema para C , t_{1*} , t_{2*} , obteniendo c_{1*} , c_{2*} . Sumando Radio(c) al radio respectivo de cada una de estas, se obtienen c_1 , c_2 , que resuelven el problema.

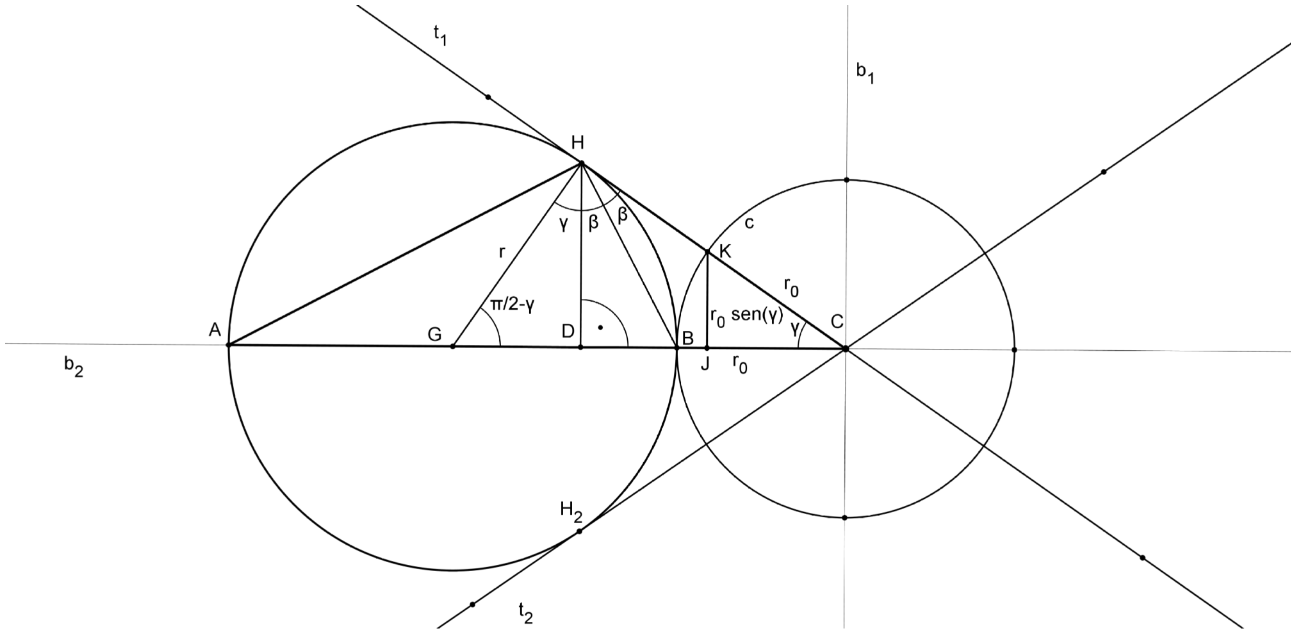


8.1.1. Rectas concurrentes y circunferencia que las corta.



Se resuelve del mismo modo salvo trasladar las rectas hacia el lado conveniente para que C esté dentro del ángulo preciso para realizar las transformaciones. las circunferencias resultantes se «ampliarán» en correspondencia.

8.1.1.1. Centro de la circunferencia en la intersección de las rectas.

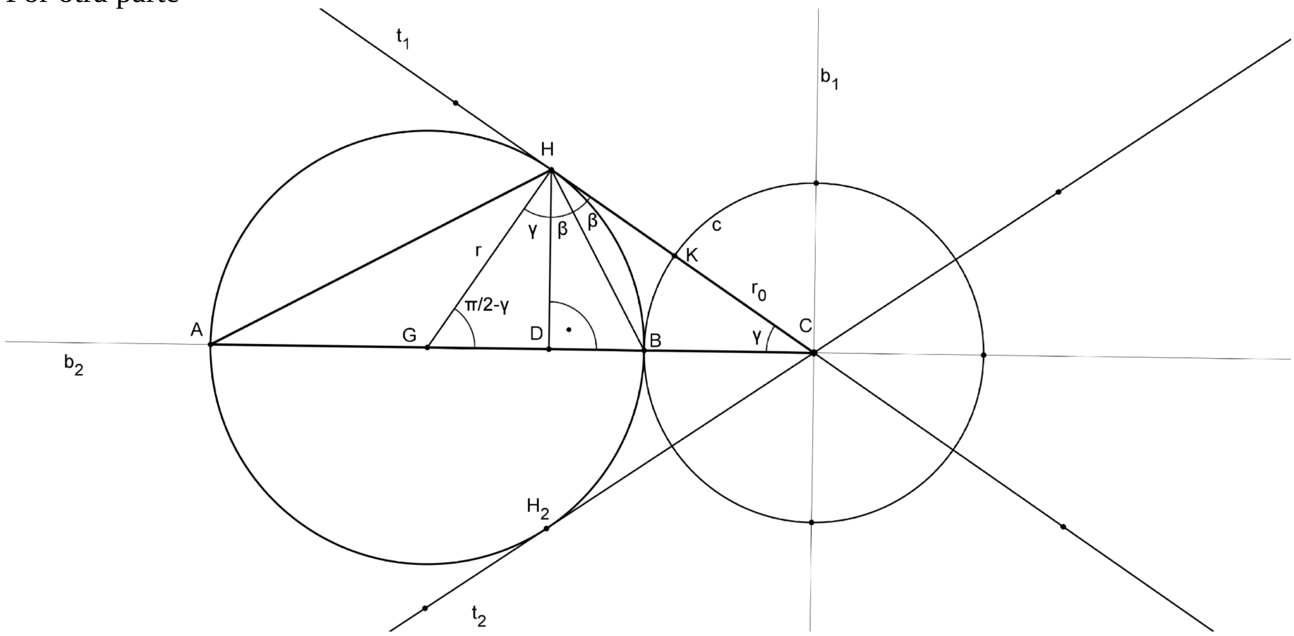


En este caso es inaplicable el método anterior.

Siguiendo la figura

$$\triangle CJK \sim \triangle GHC \Rightarrow \frac{r_0}{r+r_0}=\frac{r_0\, sen\,\gamma}{r} \Rightarrow r=r\, sen\,\gamma+r_0\, sen\,\gamma \Rightarrow r=r_0\frac{sen\,\gamma}{1-sen\,\gamma}$$

Por otra parte



A, B, D, C forman cuaterna armónica, $[ABDC]=-1 \Leftrightarrow \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}}=-\frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}$

De donde se obtiene:

$$\frac{r(1+sen\,\gamma)}{2r+r_0}=\frac{r(1-sen\,\gamma)}{r_0} \Rightarrow 2r+r_0=r_0\frac{1+sen\,\gamma}{1-sen\,\gamma} \Rightarrow 2r=2r_0\frac{sen\,\gamma}{1-sen\,\gamma} \Rightarrow r=r_0\frac{sen\,\gamma}{1-sen\,\gamma}$$

Si por otra parte se aplica la Propiedad del punto medio de un par de conjugados armónicos, se obtiene:

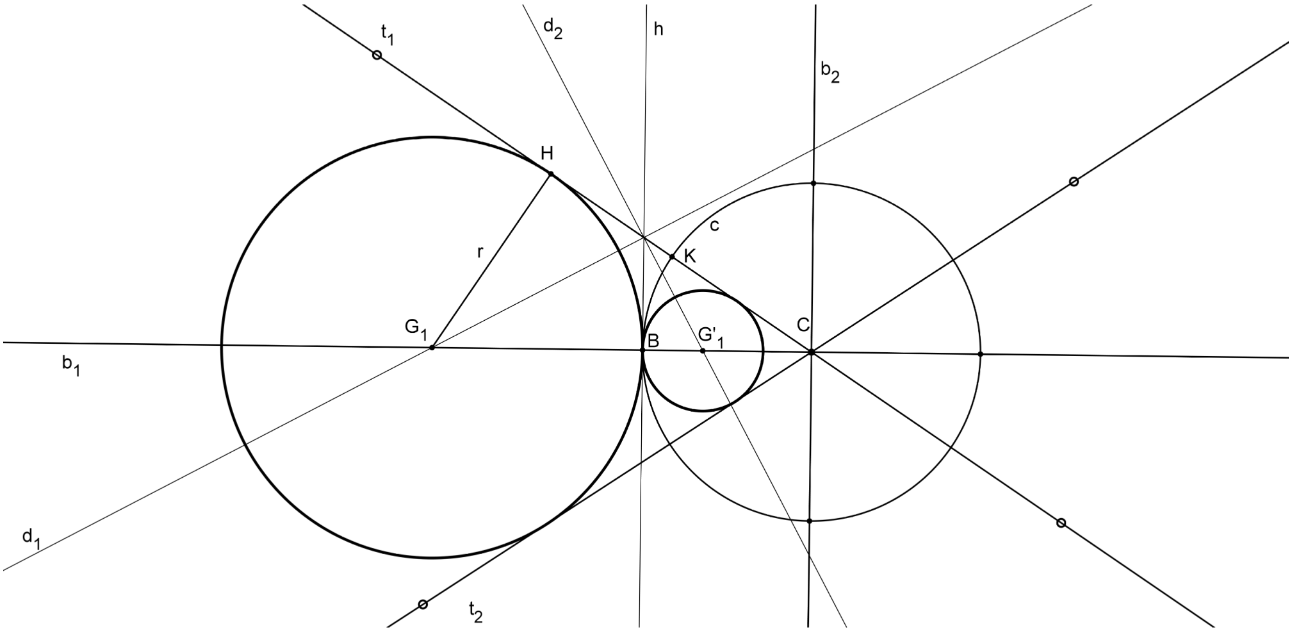
$$\overline{GH}^2=\overline{GD}\cdot\overline{GC} \Rightarrow$$

$$r^2=\overline{GD}(r+r_0) \Rightarrow r^2=r\, sen\,\gamma(r+r_0) \Rightarrow r(1-sen\,\gamma)=r_0\, sen\,\gamma \Rightarrow r=r_0\frac{sen\,\gamma}{1-sen\,\gamma}$$

Por último, el centro (G) de una de las circunferencias solución tiene que equidistar de la recta t_1 y del punto B, además de estar en la bisectriz b_1 (ó b_2):

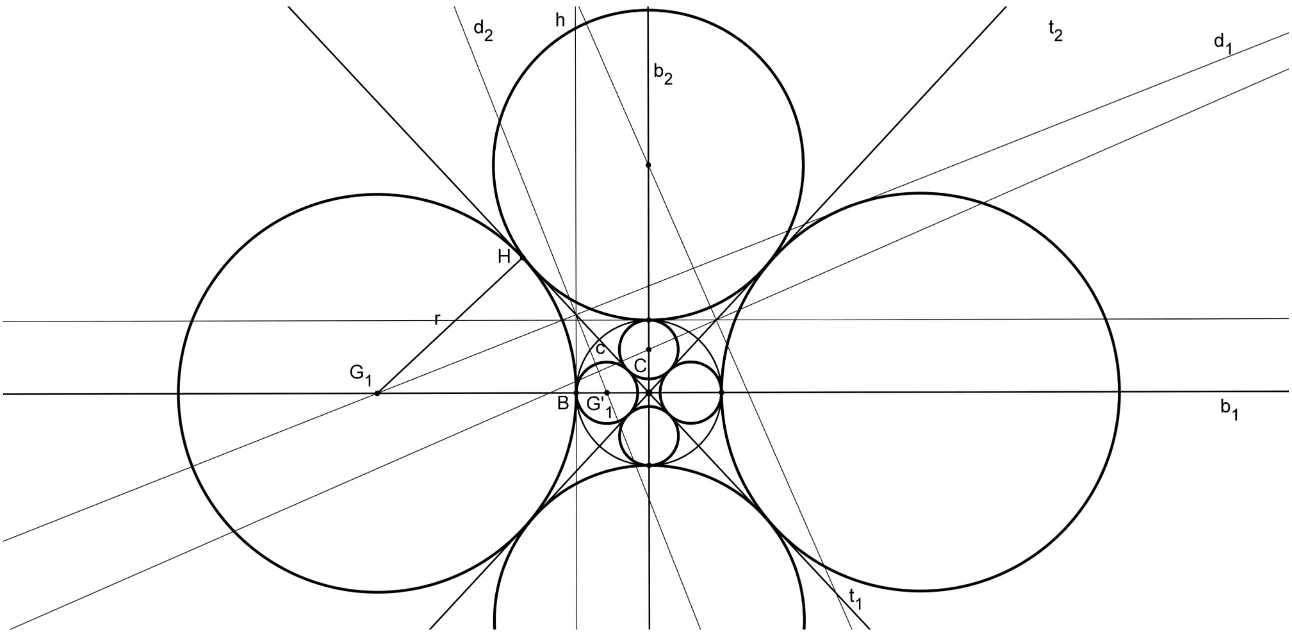
$$\begin{Bmatrix} dist(G,B)=dist(G,t_1) \\ G\in b_1 \end{Bmatrix}$$

Por lo que, siendo d_1 la bisectriz de $<t_1,b_1>$ ha de ser $G=d_1\cap b_1$.



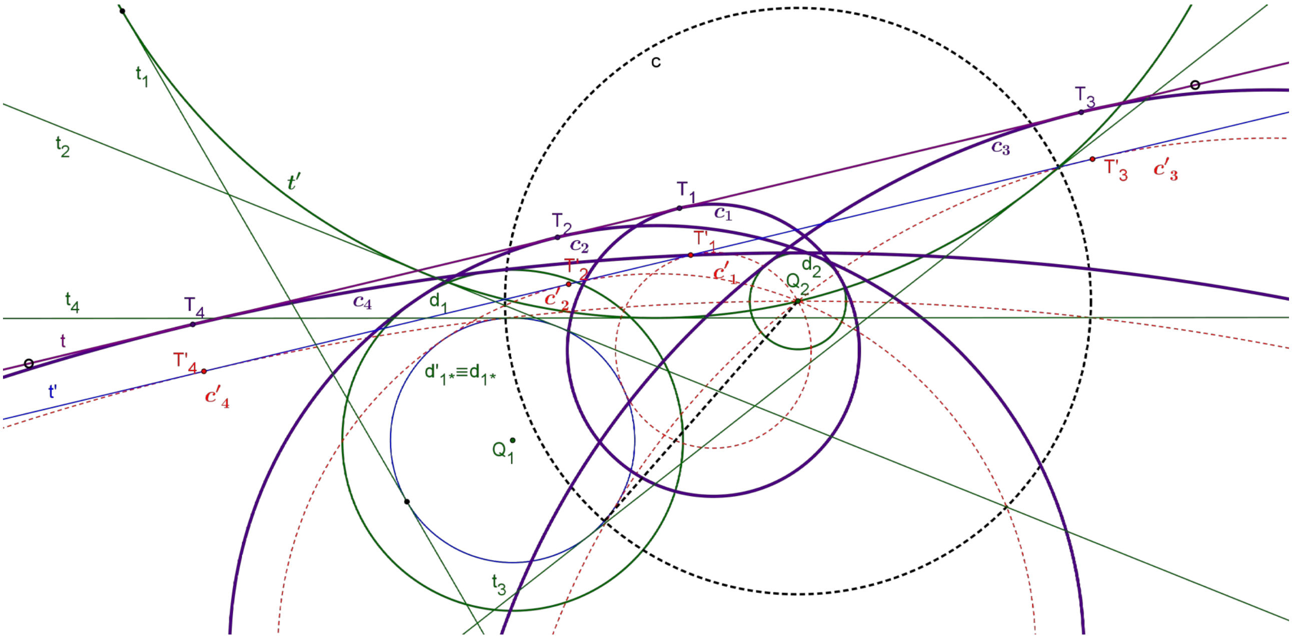
Como se observa se obtienen dos soluciones, una por cada bisectriz de $<t_1, b_1>$.

Análogamente se obtienen dos soluciones para cada par (t, b).



9. Caso 9º: tcc.

Se reduce al caso Ptc (caso 6º) restando del radio de ambas circunferencias el radio de la menor. La recta se traslada paralelamente a sí misma una distancia igual al radio de la menor.



Una vez resuelto el problema Ptc se suma al radio de cada una de las circunferencias obtenidas el radio que antes se restó.

10. Caso 10º: ccc.

Restando el radio de la circunferencia menor se reduce el problema al caso Pcc (ó PPc ó PPP). Una vez resuelto se suma el radio restado a la(s) circunferencia(s) obtenidas como solución (soluciones).