<u>Lösungen für Aufgabenblatt:</u>

1) **<u>Beispiel:</u>** **<u>Zaun an Mauer</u>**

Entlang einer Mauer soll eine rechteckige Fläche von 50 m² eingezäunt werden. Wie lang müssen die Seiten des Rechtecks sein, damit man möglichst wenig Zaun braucht?

Lösung:

<u>Mit den Sätzen der Dualität:</u>

1) Wir wissen also, dass der Flächeninhalt des eingezäunten Areals 50 m² beträgt.
Also gilt $x \cdot y = 50$.
Unsere Zielfunktion ist der Umfang des Flächenstücks, für den wir eine Minimumstelle suchen. Also gilt $U(x, y) = x + 2y$. Die Zielfunktion kann nicht mehr weiter vereinfacht werden.

2) Wir setzen die Nebenbedingung $x = \frac{50}{y}$ in die Zielfunktion ein und erhalten
$U(y) = \frac{50}{y} + 2y$.

3) Für das Produkt der beiden Summanden $\frac{50}{y}$ und $2y$ gilt: $\frac{50}{y} \cdot 2y = 100$.
Das Produkt ist also konstant und somit der zweite Satz der Dualität anwendbar.

4) Da die Summanden bereits die Voraussetzungen erfüllen, muss die Zielfunktion nicht mehr transformiert werden.

5) Daher gilt, dass das Minimum für den Umfang genau dann erreicht wird, wenn gilt
$\frac{50}{y} = 2y$, also $y^2 = 25$ bzw. $y = 5$.

6) Für die Seite x erhalten wir dann mit der Nebenbedingung $x = \frac{50}{5} = 10$.
Also müssen die Seitenlängen des Flächenstücks $x = 10\ m$ und $y = 5\ m$ sein.

<u>Mit Differentialrechnung:</u>

Die Hauptbedingung ist der Umfang des Flächenstücks $U(x, y) = x + 2y$ und die Nebenbedingung der Flächeninhalt des Areals $x \cdot y = 50$.
Für x und y kommen nur positive reelle Zahlen in Frage (Definitionsintervall (0,∞)), wobei das Minimum für den Umfang nur im inneren des Definitionsbereichs (0, ∞) liegen kann.

Die Nebenbedingung kann umgewandelt werden auf $x = \frac{50}{y}$ und in die Hauptbedingung eingesetzt werden: $U(y) = \frac{50}{y} + 2y$.

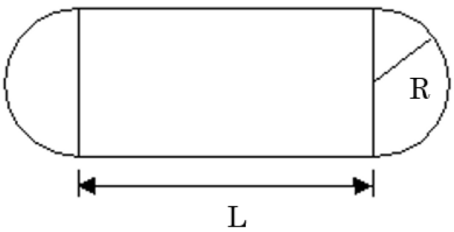
Nullsetzen der ersten Ableitung liefert uns die Gleichung $U'(y) = -\frac{50}{y^2} + 2 = 0$.

Da $y > 0$, gilt also die Gleichung: $2y^2 = 50 \Leftrightarrow \ y^2 = 25 \Leftrightarrow y = 5\ m$.

Eingesetzt in die Nebenbedingung ergibt sich dann $x = 10\ m$
Da die Randwerte potentielle unendliche Umfänge ergeben würden, muss dies die Minimumstelle sein.

2) <u>Beispiel: Fußballstadion:</u>

Die Laufbahn in einem Stadion soll eine Länge von 400 m haben. Die Laufbahninnenfläche hat die Form eines Rechtecks (Länge L und Breite 2R: wird oft als Rasenfläche für andere Disziplinen genutzt) und zwei aufgesetzten Halbkreisen (Radius R). Wie sollen L und R gewählt werden, sodass der rechteckige Teil der Innenfläche möglichst groß wird?



<u>Lösung:</u>

<u>Mit den Sätzen der Dualität:</u>

1) Wir wissen, dass die Laufbahn 400 m lang sein soll. Also gilt für den Umfang des Stadions, der aus zwei Strecken und einem Kreis besteht: $2\pi R + 2L = 400$ bzw. $\pi R + L = 200$.
Unsere Zielfunktion ist der Flächeninhalt des Rechtecks mit den Seitenlängen L und 2R. Also $A(L, R) = L \cdot 2R$. Die Zielfunktion kann vereinfacht werden durch $\tilde{A}(L, R) = L \cdot R$

2) Wir setzen die Nebenbedingung $L = 200 - \pi R$ in die Zielfunktion ein und erhalten $\tilde{A}(R) = (200 - \pi R) \cdot R$.

3) Für die Summe der beiden Faktoren $(200 - \pi R)$ und R gilt $200 - \pi R + R = 200 - R(\pi - 1)$, also keine konstante Summe. Wir benötigen also eine Transformation der Zielfunktion.

4) Wir multiplizieren die geänderte Zielfunktion mit π und erhalten

$\pi\tilde{A}(R) = \pi(200 - \pi R) \cdot R = (200 - \pi R) \cdot \pi R.$

Nun ergibt sich für eine konstante Summe der beiden Faktoren $(200 - \pi R)$ und πR, denn

$(200 - \pi R) + \pi R = 200.$

Die Summe ist also konstant und der Satz der Dualität anwendbar.

5) Daher gilt, dass das Maximum für die Zielfunktion genau dann erreicht wird, wenn

$(200 - \pi R) = \pi R$, also $200 = 2\pi R$ und damit $R = \frac{100}{\pi} \approx 30{,}8.$

6) Die Länge des Stadions erhalten wir durch die Nebenbedingung $L = 200 - \pi\frac{100}{\pi} = 100.$

Der Flächeninhalt des Fußballfeldes ist also maximal, wenn $R \approx 31{,}8\, m$ und $L = 100\, m.$

<u>Mit Differentialrechnung:</u>

Die Hauptbedingung ist $A(L, R) = L \cdot 2R$ und soll maximal werden. Die Nebenbedingung lautet $2\pi R + 2L = 400$ bzw. $\pi R + L = 200.$

Der mögliche Definitionsbereich ist für R [0, $\frac{200}{\pi}$] bzw. für L [0, 200], wobei die Werte für das Maximum der Fläche des Fußballfeldes nur im inneren liegen können, da am Rand die Fläche 0 ergäben würde, was man noch besser erkennt, wenn die Zielfunktion auf eine Variable beschränkt wird.

Die Nebenbedingung $L = 200 - \pi R$ eingesetzt in die Zielfunktion ergibt die Zielfunktion

$A(R) = (200 - \pi R) \cdot 2R.$

Durch Nullsetzen der erste Ableitung erhalten wir die Gleichung:

$A(R) = -\pi \cdot 2R + (200 - \pi R) \cdot 2 = 0$, also $-2\pi R + 400 - 2\pi R = 0$ und damit $R = \frac{100}{\pi}.$

Für die Länge erhalten wir dann $L = 200 - \pi\frac{100}{\pi} = 100.$

Der Flächeninhalt des Fußballfeldes ist also maximal, wenn $R \approx 31{,}8\, m$ und $L = 100\, m.$

3) <u>Beispiel: Optimale Dose:</u>

Das Volumen einer drehzylindrischen Dose sei 500 ml (= 500 cm³). Wie sollen Radius und Höhe gewählt werden, sodass die Oberfläche möglichst klein ist?

<u>**Lösung:**</u>

<u>Mit den Sätzen der Dualität</u>

1) Die Nebenbedingung ist also das vorgegebene Volumen der zylindrischen Dose, also

$\pi r^2 h = 500$. Die Zielfunktion ist die Oberfläche des Zylinders, die minimal werden soll. Also ist die Zielfunktion $O(r,h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh$. Diese kann geändert werden (Weglassen des konstanten Faktors 2π) auf

$\tilde{O}(r,h) = r^2 + rh$

2) Die Nebenbedingung $h = \frac{500}{\pi r^2}$ eingesetzt in die Zielfunktion ergibt

$\tilde{O}(r) = r^2 + r\frac{500}{\pi r^2} = r^2 + \frac{500}{\pi r}$.

3) Das Produkt der beiden Summanden r^2 und $\frac{500}{\pi r}$ ergibt $r^2 \cdot \frac{500}{\pi r} = \frac{500r}{\pi}$ und ist

somit nicht konstant, wir müssen die Zielfunktion dementsprechend verändern.

4) Wir verwenden einen Trick für die Transformation, indem wir $\frac{500}{\pi r}$ schreiben als

$\frac{500}{\pi r} = \frac{250}{\pi r} + \frac{250}{\pi r}$ und somit die Zielfunktion aufschreiben als

$\tilde{O}(r,h) = r^2 + \frac{250}{\pi r} + \frac{250}{\pi r}$ mit drei Summanden.

Für das Produkt dieser drei Summanden ergibt sich $r^2 \cdot \frac{250}{\pi r} \cdot \frac{250}{\pi r} = \frac{62500}{\pi^2}$.

Damit ist das Produkt konstant und der Satz der Dualität kann angewandt werden.

5) Um das Minimum der Oberfläche zu erreichen müssen alle drei Summanden gleich sein,

also $r^2 = \frac{250}{\pi r} = \frac{250}{\pi r}$ und damit ergibt sich für den Radius der Zylinderdose $r^3 = \frac{250}{\pi}$.

Also $r = \sqrt[3]{\frac{250}{\pi}}$.

6) Für die Höhe der Zylinderdose ergibt sich schließlich mit Hilfe der Nebenbedingung:

$$h = \frac{500}{\pi\sqrt[3]{\frac{250^2}{\pi^2}}} = \sqrt[3]{\frac{500^3}{\pi \cdot 250^2}} = \sqrt[3]{\frac{2^3 \cdot 250^3}{\pi \cdot 250^2}} = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{250}{\pi}}.$$

Damit ist die Höhe der Dose doppelt so groß wie der Radius und die Maße des optimalen Zylinders sind $r \approx 4{,}3\ cm$ und $h \approx 8{,}6\ cm$.

Mit Differentialrechnung:

Die Nebenbedingung ist $\pi r^2 h = 500$. Die Zielfunktion ist die Oberfläche des Zylinders, die minimal werden soll. Also ist die Zielfunktion $O(r,h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh$.

Der Definitionsbereich für r und h liegt jeweils bei (0, ∞), wobei an den Rändern die Oberfläche maximal werden würde, also die Minimumstellen im Inneren liegen müssen.

Die Nebenbedingung $h = \frac{500}{\pi r^2}$ eingesetzt in die Zielfunktion ergibt

$O(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{500}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{1000}{r}$.

Nullsetzen der ersten Ableitung der Zielfunktion liefert uns die Gleichung:

$O'(r) = 4\pi r - \frac{1000}{r^2} = 0$ und damit $r^3 = \frac{500}{2\pi} = \frac{250}{\pi}$, also $r = \sqrt[3]{\frac{250}{\pi}}$.

Für die Höhe erhalten wir durch Einsetzen in die Nebenbedingung:

$$h = \frac{500}{\pi\sqrt[3]{\frac{250^2}{\pi^2}}} = \sqrt[3]{\frac{500^3}{\pi \cdot 250^2}} = \sqrt[3]{\frac{2^3 \cdot 250^3}{\pi \cdot 250^2}} = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{250}{\pi}}.$$

Damit ist die Höhe der Dose doppelt so groß wie der Radius und die Maße des optimalen Zylinders sind $r \approx 4{,}3\ cm$ und $h \approx 8{,}6\ cm$.

4) Beispiel: Pyramidenschachtel

Aus einem quadratischen Stück Karton von Seitenlängen 2a sollen vier kongruente gleichschenkelige Dreiecke (mit Höhe x und Basis 2a) weggeschnitten werden, so, dass das Netz einer quadratischen Pyramide mit Grundkantenlänge b und Höhe entsteht. Wie groß muss x sein, um eine Pyramide mit maximalem Volumen zu erhalten?

Lösung:

Mit den Sätzen der Dualität:

1) Die Zielfunktion ist das Volumen der Pyramide, das maximal werden soll. Die Grundfläche ist ein Quadrat mit Seitenlänge b. Also gilt für das Volumen $V(b, h) = \frac{1}{3} \cdot b^2 \cdot h$.

Als Nebenbedingungen drücken wir uns nun die Maße der Pyramide durch die bekannte Kartonseitenlänge 2a und dem zu berechnenden x aus und benutzen dazu die Skizze.

Es gilt also für die Grundflächenseite die Beziehung $b^2 = 2(a - x)^2$.

Die Höhe erhalten wir durch die Beziehung $h^2 + (a - x)^2 = s^2$, also $h = \sqrt{s^2 - (a - x)^2}$.

In letzterer Formel müssen wir nun noch s mit Hilfe von a und x ausdrücken.

Es gilt $s^2 = a^2 + x^2$.

Also $h = \sqrt{a^2 + x^2 - (a - x)^2} = \sqrt{a^2 + x^2 - a^2 + 2ax - x^2} = \sqrt{2ax}$.

2) Diese Bedingungen eingesetzt in die Zielfunktion ergeben die Zielfunktion

$V(x) = \frac{1}{3} 2(a-x)^2\sqrt{2ax} = \frac{2}{3}(a-x)^2\sqrt{2ax}.$

Diese Zielfunktion können wir noch verändern, indem wir positive konstanten wegnehmen:

$\tilde{V}(x) = (a-x)^2\sqrt{x}$

3) Die Zielfunktion besteht aus Faktoren, deren Summe nicht konstant ist.
4) Wir multiplizieren quadrieren die vereinfachte Zielfunktion.

Wir erhalten schließlich die transformierte Zielfunktion $(\tilde{V}(x))^2 = (a-x)^4 \cdot x$.

Wir sehen, dass wir die Funktion nun auf mehrere Faktoren aufteilen können.

$(\tilde{V}(x))^2 = (a-x)^4 \cdot x = (a-x)(a-x)(a-x)(a-x)x.$

Wir haben nun insgesamt fünf Faktoren, deren Summe jedoch immer noch nicht konstant ist, da viermal in den Faktoren -x enthalten ist und nur einmal x.

Deshalb multiplizieren wir diese Zielfunktion mit 4 und erhalten.

$4(\tilde{V}(x))^2 = (a-x)(a-x)(a-x)(a-x)4x.$

Die Summe der fünf Faktoren ergibt nun $4(a-x) + 4x = 4a - 4x + 4x = 4a$, ist also konstant und der Satz der Dualität anwendbar.

5) Für das Maximum muss gelten: $(a-x) = 4x$, was uns für x als Lösung liefert: $x = \frac{a}{5} = \frac{2a}{10}$.

Wenn wir also den Karton in den Seitenmitten um 1/10 der Seitenlänge einschneiden und somit gleichschenkelige Dreiecke herausschneiden, erhalten wir die größtmögliche Pyramide.

<u>Mit Differentialrechnung:</u>

Wir erhalten durch dieselben Überlegungen die Hauptbedingung und Nebenbedingungen und somit die zu maximierende Zielfunktion:

$V(x) = \frac{1}{3} 2(a-x)^2\sqrt{2ax} = \frac{2}{3}(a-x)^2\sqrt{2ax}$, wobei x aus [0, a] ist.

Da das Volumen an den Rand dieses Definitionsbereichs minimal (=0) wird, muss das Maximum im inneren angenommen werden und wir können $x \neq 0$ bzw. $x \neq a$ im Weiteren annehmen.

Durch Nullsetzen der ersten Ableitung erhalten wir die folgende Gleichung:

$V'(x) = \frac{2}{3} 2(a-x)(-1)\sqrt{2ax} + \frac{2}{3}(a-x)^2 \frac{1}{2\sqrt{2ax}} 2a = 0.$

Umgeformt mit erlaubten Schritten erhalten wir:

$$\frac{2}{3}(a-x)^2 \frac{1}{2\sqrt{2ax}} 2a = \frac{2}{3} 2(a-x)\sqrt{2ax} \quad |: \frac{2}{3} \quad | \cdot \sqrt{2ax}, (x \neq 0)$$

$$(a-x)^2 a = 2(a-x)2ax \quad |: a \quad |: (a-x), (x \neq a)$$

$(a - x) = 4x \quad | + x$

$a = 5x \quad |: 5$

$\frac{a}{5} = x.$

Also wird das Maximum des Pyramidenvolumens angenommen, wenn $x = \frac{a}{5} = \frac{2a}{10}$.

Wenn wir also den Karton in den Seitenmitten um 1/10 der Seitenlänge einschneiden und somit gleichschenkelige Dreiecke herausschneiden, erhalten wir die größtmögliche Pyramide.