Ciclo 2 · Atividade 5 · em 26 de junho de 2020

Fábio Vinícius Silva dos Santos

Exercício proposto 2.

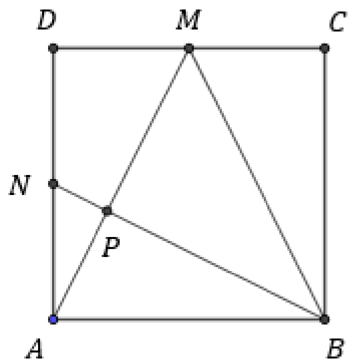
- Faça uma construção no geogebra.
- Explore a figura e formule conjecturas.
- Elabore uma solução detalhada formal para o que é solicitado.

Nesse exercício vamos mostrar que dentro de qualquer quadrado existe um triângulo retângulo $3-4-5$. Então considere um quadrado $ABCD$. Seja M ponto médio de CD e seja N ponto médio de AD. Seja P o ponto de interseção dos segmentos AM e BN.

(a) Determine o ângulo $B\widehat{P}M$.

(b) Divida o segmento MP em 3 partes iguais, divida o segmento PB em 4 partes iguais e divida o segmento BM em 5 partes iguais. Mostre que todas essas partes possuem o mesmo comprimento e assim o triângulo MPB é semelhante ao triângulo retângulo $3-4-5$.

(c) Mostre que o comprimento do segmento CP é o lado do quadrado $ABCD$.



Solução: Para a solução dos itens deste exercício, vamos considerar que A seja o ponto de origem do sistema de coordenadas cartesianas OXY onde $AB \in OX$, $AD \in OY$ e que $AB = 10l$ com $l \in R_+^*$. Sendo assim, temos que, $B = (10l; 0)$, $C = (10l; 10l)$, $D = (0; 10l)$, $M = (5l; 10l)$ e $N = (0; 5l)$. Seja $AM \in r$ com $r: y = 2x$ e $BN \in s$ com $s: y = -\frac{1}{2}x + 5l$ temos que $r \cap s = \{P\}$ onde $P = (2l; 4l)$ pois $2x = -\frac{1}{2}x + 5l \rightarrow 4x = -x + 10l$ $\rightarrow 5x = 10l \rightarrow x = 2l\ e\ y = 4l$. Usando o conceito de vetores da geometria analítica, podemos dizer que $\vec{v} = \overrightarrow{PB} = (8l; -4l)$ com $|\vec{v}| = \sqrt{64l^2 + 16l^2} = 4l\sqrt{5}$ e $\vec{u} = \overrightarrow{PM} = (3l; 6l)$ com $|\vec{u}| = \sqrt{9l^2 + 36l^2} = 3l\sqrt{5}$.

(a) Seja α a medida do ângulo $B\hat{P}M$ com $cos\alpha = \frac{<v,u>}{|v|\cdot|u|} = \frac{24l^2 - 24l^2}{4l\sqrt{5}\cdot 3l\sqrt{5}} = \frac{0}{60l^2} = 0$ então, $\alpha = 90°$. ■

(b) Como $BB_1 = \frac{|\overrightarrow{BM}|}{5} = \frac{|(-5l;10l)|}{5} = \frac{\sqrt{25l^2+100l^2}}{5} = \frac{5l\sqrt{5}}{5} = l\sqrt{5}$, $MM_1 = \frac{|\overrightarrow{MP}|}{3} = \frac{3l\sqrt{5}}{3} = l\sqrt{5}$ e $PP_1 = \frac{|PB|}{4} = \frac{4l\sqrt{5}}{4} = l\sqrt{5}$ temos que $\left(3l\sqrt{5}, 4l\sqrt{5}, 5l\sqrt{5}\right) = l\sqrt{5}\cdot(3,4,5)$. ■

(c) Fazendo $\overrightarrow{PC} = (8l; 6l)$ onde $\left|\overrightarrow{PC}\right| = \sqrt{64l^2 + 36l^2} = 10l$ temos que $PC = AB = 10l$. ■

Veja a seguir a construção (Figura 2) e o protocolo de construção (Tabela 2) do exercício proposto 2 da atividade 5 do ciclo 2.

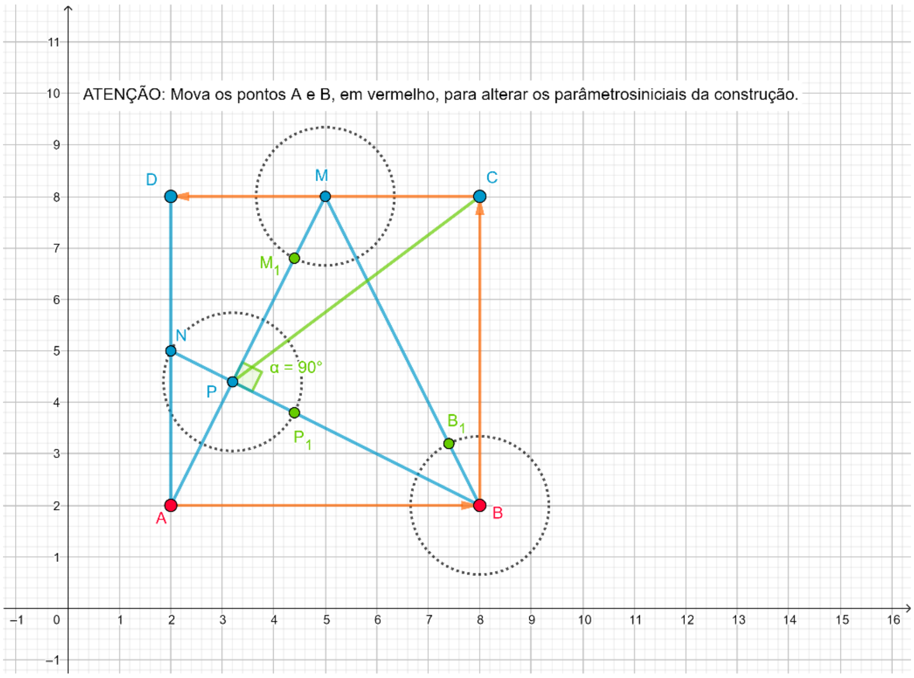


Figura 2: Construção do exercício proposto 2 no Geogebra.

Nome	Definição	Valor
Ponto A		$A = (2, 2)$
Ponto B		$B = (8, 2)$
Vetor AB	Vetor(A, B)	$AB = (6, 0)$
Vetor BC	VetorPerpendicular(Transladar(AB, B))	$BC = (0, 6)$
Ponto C	Ponto(BC)	$C = (8, 8)$
Vetor CD	VetorPerpendicular(Transladar(BC, C))	$CD = (-6, 0)$
Ponto D	Ponto(CD)	$D = (2, 8)$
Segmento DA	Segmento(D, A)	$DA = 6$
Ponto M	PontoMédio(C, D)	$M = (5, 8)$
Segmento BM	Segmento(B, M)	$BM = 6.71$
Segmento AM	Segmento(M, A)	$AM = 6.71$
Ponto N	PontoMédio(D, A)	$N = (2, 5)$
Segmento BN	Segmento(B, N)	$BN = 6.71$
Ponto P	Interseção(AM, BN)	$P = (3.2, 4.4)$
Orientação		"ATENÇÃO: Mova os pontos A e B, em vermelho, para alterar os parâmetros iniciais da construção."
Ângulo	Ângulo(B, P, M)	$\alpha = 90°$
Círculo c_B	Círculo(B, BM / 5)	$c_B: (x - 8)^2 + (y - 2)^2 = 1.8$
Círculo c_M	Círculo(M, Distância(M, P) / 3)	$c_M: (x - 5)^2 + (y - 8)^2 = 1.8$
Círculo c_P	Círculo(P, Distância(P, B) / 4)	$c_P: (x - 3.2)^2 + (y - 4.4)^2 = 1.8$
Ponto B_1(7.4, 3.2)	Interseção(c_B, BM, 1)	$B_1 = (7.4, 3.2)$
Ponto M_1(4.4, 6.8)	Interseção(c_M, AM, 1)	$M_1 = (4.4, 6.8)$
Ponto P_1(4.4, 3.8)	Interseção(c_P, BN, 1)	$P_1 = (4.4, 3.8)$
Segmento CP	Segmento(P, C)	$CP = 6$

Tabela 2: Protocolo de construção do exercício proposto 2 no Geogebra.