

# คู่มือการใช้สื่อประกอบการสอน เรื่อง แคลคูลัสเบื้องต้น

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

จัดทำโดย

นายทัศนพล ถกพัฒน์กุล 60102010371

นายจักรกริช บุตรชา 60102010631

นายปพน บำรุงเมือง 60102010643

นางสาวปิ่นปิ่นทร์ บัวคุ้มภัย 60102010644

กลุ่มผู้เรียน SC4ED1 ปีการศึกษา 2563

## ลิมิตและความต่อเนื่อง

วิธีใช้ : ครูกำหนดฟังก์ชัน  $f(x)$  และลิมิตของ  $f(x)$  เมื่อ  $x$  เข้าใกล้จำนวนจริงใด ๆ จากนั้นพิจารณาลิมิตทางซ้าย ลิมิตทางขวา ค่าลิมิต และค่าจริง เพื่อตรวจสอบว่ามีความต่อเนื่องหรือไม่

The image shows a software interface for analyzing the limit and continuity of a function. The function  $f(x) = -x$  is defined. The limit is set to 5. The interface includes controls for left and right limits, limit value, and function value. A graph shows the function line with a point at  $x=5$  and corresponding  $y$  values. Red boxes with Thai text provide instructions and observations.

**Annotations:**

- ครูสามารถกำหนดฟังก์ชันที่ต้องการ (You can determine the function you want)
- ครูสามารถเลื่อนเพื่อเพิ่มฟังก์ชันได้ โดยสามารถสร้างฟังก์ชันได้พร้อมกันไม่เกิน 3 ฟังก์ชัน (You can move to add functions. You can create functions simultaneously, up to 3 functions)
- ครูกำหนดลิมิตของ  $f(x)$  เมื่อ  $x$  เข้าใกล้จำนวนจริงใด ๆ (You determine the limit of  $f(x)$  as  $x$  approaches any real number)
- ตัวอย่างการแสดงผล (Example of the result)
- ครูสามารถเลื่อนเพื่อแสดงค่า  $x$  ต่าง ๆ ที่มีค่าเข้าใกล้ตามลิมิตที่กำหนด (You can move to show different  $x$  values that approach the specified limit)
- ครูสามารถกดปุ่มเพื่อแสดงค่าลิมิตทางซ้าย ลิมิตทางขวา ค่าลิมิต และค่าจริง (You can click buttons to show left limit, right limit, limit value, and actual value)

# อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

วิธีใช้ : ครูลื่อนจุด  $h$  ให้มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ จะทำให้เส้นตรง  $AB$  เป็นเส้นสัมผัสเส้นโค้ง  $y = f(x)$  ที่จุด  $A$  เพื่อประกอบการอธิบายบทนิยามของอนุพันธ์ (โดยที่  $h = x_B - x_A$ )

ครูสามารถกำหนดฟังก์ชันที่ต้องการ

ครูสามารถกำหนดค่า  $x$  ที่ต้องการ

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

$f(x) = x^2 - 2x + 1$

พิจารณา ความชัน ณ จุด  $A$  ที่  $x = 1$

$h = 0.73$

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2.7177 - 0}{1.73 - 1}$$
$$= \frac{2.7177}{0.73}$$
$$= 3.7229$$

ดังนั้น ความชันของเส้นตรง  $AB$  เท่ากับ 3.7229

เมื่อค่า  $h$  มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ จะทำให้เส้นตรง  $AB$  เป็นเส้นสัมผัสเส้นโค้ง  $y = f(x)$  ที่จุด  $A$  นั่นคือ ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด  $A$  คืออนุพันธ์ของ  $f(x)$  ที่จุด  $A$

หน้าแรก   ลิมิตและความต่อเนื่อง   **อนุพันธ์**   การประยุกต์ของอนุพันธ์   ปริพันธ์จำกัดเขต

เส้นตรง  $AB$

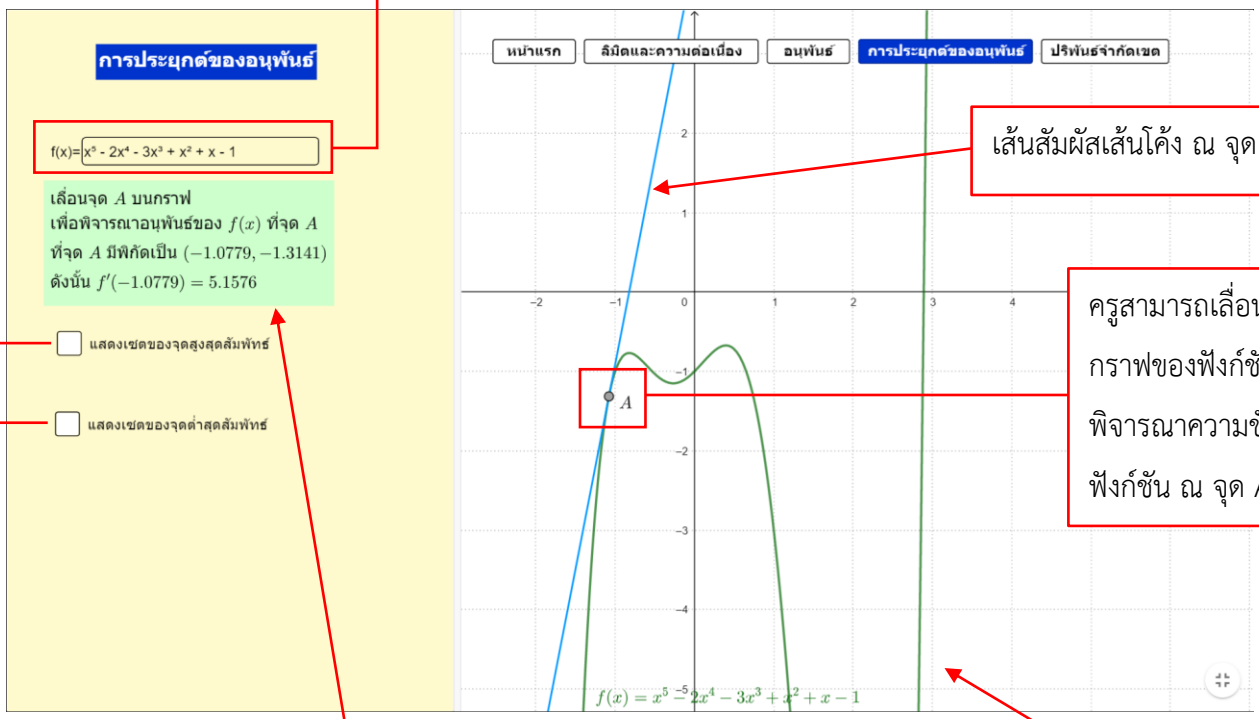
ครูเลื่อนจุด  $h$  ให้มีค่าเข้าใกล้ศูนย์

แสดงความชันของเส้นตรง  $AB$

## การประยุกต์อนุพันธ์

วิธีใช้ : ครูเลื่อนจุด A บนกราฟ และพิจารณาจุด A ที่อนุพันธ์เป็นศูนย์ จากนั้นพิจารณาอนุพันธ์รอบ ๆ จุด A  
 ถ้าอนุพันธ์เปลี่ยนจากจำนวนจริงบวกเป็นจำนวนจริงลบ จะได้ว่าจุด A บอกค่าสูงสุดสัมพัทธ์  
 ถ้าอนุพันธ์เปลี่ยนจากจำนวนจริงลบเป็นจำนวนจริงบวก จะได้ว่าจุด A บอกค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

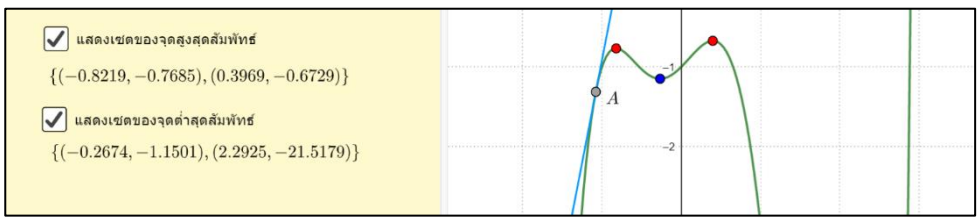
ครูสามารถกำหนดฟังก์ชันที่ต้องการ



แสดงพิกัดของจุด A และอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ณ จุด A (เมื่อครูเลื่อนจุด A พิกัดและอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ณ จุด A จะเปลี่ยน)

กดปุ่มเพื่อแสดงเขตของจุดสูงสุดสัมพัทธ์

กดปุ่มเพื่อแสดงเขตของจุดต่ำสุดสัมพัทธ์



## ผลบวกรีมันน์และปริพันธ์จำกัดเขต

วิธีใช้ : ครูกำหนดฟังก์ชันและขอบเขตของพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งที่ต้องการ โดยการกำหนดประเภทของรูปสี่เหลี่ยมที่ใช้ในการหาผลบวกรีมันน์ และจำนวนช่วงของรูปสี่เหลี่ยมที่ต้องการ

ประเภทของรูปสี่เหลี่ยมที่ใช้ในการหาผลบวกรีมันน์ ได้แก่

1. รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก สามารถเลือก Left endpoints, Midpoints หรือ Right endpoints นอกจากนี้สามารถเลือก Upper sum หรือ Lower sum
2. รูปสี่เหลี่ยมคางหมู

The image shows a software interface for calculating Riemann sums. On the left is a control panel with the following elements:

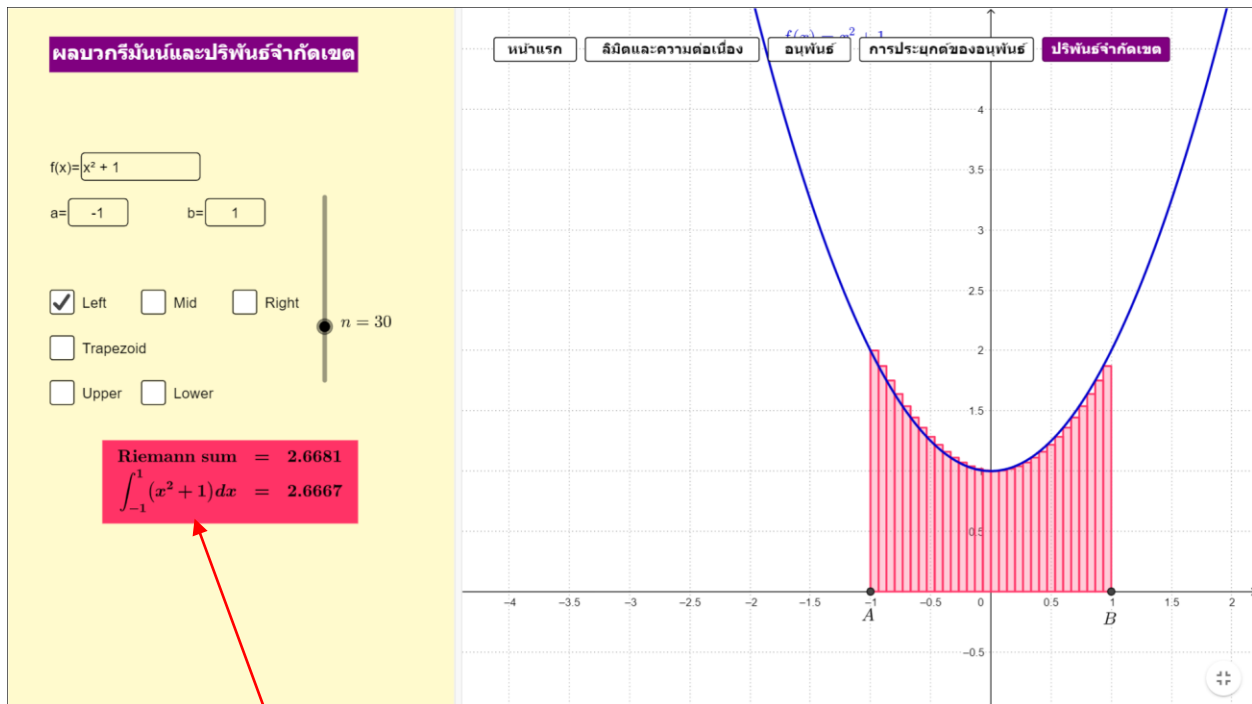
- Function input:  $f(x) = x^2 + 1$
- Interval inputs:  $a = -1$ ,  $b = 1$
- Endpoint selection:  Left,  Mid,  Right
- Method selection:  Trapezoid,  Upper,  Lower
- Number of subintervals:  $n = 1$  (with a slider)

On the right is a graph of the function  $f(x) = x^2 + 1$  on the interval  $[-1, 1]$ . The x-axis is labeled with  $A$  at  $-1$  and  $B$  at  $1$ . The y-axis ranges from  $-0.6$  to  $2.6$ . The graph is annotated with several text boxes:

- Top left: "ครูสามารถกำหนดขอบเขตของพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งที่ต้องการ" (Teacher can determine the boundary of the area enclosed by the curve that is required).
- Top right: "ครูสามารถกำหนดฟังก์ชันที่ต้องการ" (Teacher can determine the function that is required).
- Middle right: "ฟังก์ชัน  $f(x)$ " (Function  $f(x)$ ).
- Bottom right: "เลื่อน slider เพื่อกำหนดจำนวนช่วงของรูปสี่เหลี่ยมที่ต้องการ" (Move slider to determine the number of subintervals of the required rectangles).
- Bottom left: "กดปุ่มเพื่อเลือก Upper sum หรือ Lower sum สำหรับสี่เหลี่ยมมุมฉาก" (Click button to select Upper sum or Lower sum for rectangles).
- Bottom center: "กดปุ่มเพื่อเลือก Left endpoints, Midpoints หรือ Right endpoints สำหรับสี่เหลี่ยมมุมฉาก" (Click button to select Left endpoints, Midpoints or Right endpoints for rectangles).
- Bottom left: "กดปุ่มเพื่อเลือกรูปสี่เหลี่ยมคางหมู" (Click button to select trapezoid).

Navigation tabs at the top of the graph area include: หน้าแรก, ลิมิตและความต่อเนื่อง, อนันต์, การประยุกต์ของอนันต์, and ปริพันธ์จำกัดเขต.

ตัวอย่าง การใช้ผลบวกรีมันน์และปริพันธ์จำกัดเขตในการหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง  $f(x) = x^2 + 1$  บนช่วง  $[-1, 1]$  แบบ Left endpoints โดยกำหนดจำนวนช่วงของรูปสี่เหลี่ยมจำนวน 30 ช่วง



แสดงผลบวกรีมันน์ และปริพันธ์จำกัดเขต ของฟังก์ชัน  $f(x)$  บนช่วง  $[a, b]$