

Instrucciones:

a) Duración: 1 hora

b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**. Indica, en la primera hoja donde resuelves el examen, la opción elegida.

c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.

d) Contesta de forma razonada y escribe a bolígrafo (no a lápiz) ordenadamente y con letra clara. Las faltas de ortografía, la mala presentación y no explicar adecuadamente las operaciones pueden restar hasta un máximo de 1 punto de la nota final.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Opción A

Ejercicio 1.- [2,5 punto] Calcula $\lim_{x \rightarrow 1^+} (2-x)^{\frac{1}{1-x}}$.

Ejercicio 2.- a) [1,5 puntos] Utiliza el Teorema de Bolzano para encontrar, con precisión de una cifra decimal, el punto de corte de las funciones $f(x) = 3x^5 - 10x^4 + 10x^3 + 3$ y $g(x) = e^x$ en el intervalo $[-1, 0]$.

b) [1 punto] Demostrar que la función $g(x) = e^x$ es biyectiva.

Ejercicio 3.- a) [1,5 puntos] Calcula a y b para que función $f(x) = \frac{ax^2 + x + b}{x^2 - 4}$ tenga una asíntota horizontal en $y = -1$ y pase por el punto $(0, 1)$.

b) [1 punto] Sea $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ una función definida en el dominio $[1, \infty)$. Demuestra, mediante composición de funciones, que su inversa es $f^{-1}(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

Ejercicio 4.- [2,5 puntos] Estudia la continuidad de $f(x) = \begin{cases} a \cdot \frac{2^x - 1}{x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{\cos(x)}{x^2 + 1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ en todo $\mathbb{R}$ y obtener el valor de a para que la función sea continua en $x = 0$.

Opción B

Ejercicio 1.- a) [1 punto] Calcula la ecuación explícita de la recta tangente a la función $f(x) = (x^3 - 4x) \cdot \ln(x)$ en el punto $x = 1$.

b) [1,5 punto] Utiliza el teorema de Bolzano para encontrar, con precisión de una cifra decimal, el punto de corte de las gráficas $g(x) = e^x$ y $h(x) = -x$ en el intervalo $[-1, 0]$.

Ejercicio 2.- a) [1,5 puntos] Calcula $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 5x + 4} - x)$

b) [1 punto] Determinar, de manera razonada, el dominio de $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 4} - x$.

Ejercicio 3.- [2,5 puntos] Calcula a y b para que función $f(x) = \frac{ax^2 + bx}{x + 1}$ tenga una asíntota oblicua en la recta $y = 2x + 3$.

Ejercicio 4.- a) [1 punto] Calcula a y b para que función $f(x) = \frac{ax^2 + x + b}{x^2 - 4}$ tenga una asíntota horizontal en $y = -1$ y pase por el punto $(0, 1)$.

b) [1,5 puntos] Obtener las rectas tangentes a la circunferencia de centro $(0, 2)$ y radio 1 que pasan por el punto $P(4, 0)$ exterior a la circunferencia.