Problemas – Tema 5

Problemas resueltos - 22 - regla de Barrow

1. Resuelve $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2(x)}dx$

Aplicamos partes.

$x=u \rightarrow dx=du$

$\frac{1}{\cos^2(x)}=dv \rightarrow tg(x)dx=dv$

Es decir:

$I=[x\cdot tg(x)]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg(x)dx=[x\cdot tg(x)]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{sen(x)}{\cos(x)}dx$

$I=[x\cdot tg(x)]_0^{\frac{\pi}{4}}+[\ln(\cos(x))]_0^{\frac{\pi}{4}}$ → aplicamos Barrow

Recuerda que $\cos(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$ y que $\cos(0)=1$

$I=\left(\frac{\pi}{4}\cdot tg(\frac{\pi}{4})-0\right)+\left(\ln\frac{\sqrt{2}}{2}-\ln(1)\right)$

$I=\frac{\pi}{4}+\ln(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{\pi}{4}+\ln(\sqrt{2})-\ln(2)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln(2)-\ln(2)$

$I=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln(2)$

2. Calcula $\int_1^{16} \frac{d\,x}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$ **(sugerencia:** $t=\sqrt[4]{x}$ **)**

Diferenciamos el cambio de variable → $t=x^{1/4} \rightarrow dt=\frac{1}{4}\cdot x^{-3/4}dx \rightarrow 4\cdot x^{3/4}\,dt=dx$

Si $t=x^{1/4} \rightarrow t^3=x^{3/4}$ → Por lo tanto $4\cdot t^3\,dt=dx$

Si $t=x^{1/4} \rightarrow t^2=x^{1/2}$

Llevamos todos estos resultados a la integral definida.

$$\int_1^{16} \frac{4t^3}{t^2+t}dt=4\int_1^{16} \frac{t^3}{t^2+t}dt=4\int_1^{16} \frac{t^2}{t+1}dt$$

Tenemos un cociente de polinomios, con grado del numerador mayor que el grado del numerador, por lo que debemos realizar la división de polinomios.

$$\frac{t^2}{t+1}=t-1+\frac{1}{t+1}$$

$$4\int_1^{16}[t-1+\frac{1}{t+1}]dt=4[\int_1^{16} t\,dt-\int_1^{16} dt+\int_1^{16} \frac{1}{t+1}dt]=4[[\frac{t^2}{2}]_1^{16}-[t]_1^{16}+[\ln|1+t|]_1^{16}]$$

Que resolvemos aplicando la regla de Barrow → $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$, siendo $F(x)$ una primitiva de la función $f(x)$. Pero antes de evaluar por Barrow, deshacemos el cambio de variable $t=\sqrt[4]{x}$.

$$4[[\frac{\sqrt{x}}{2}]_1^{16}-[\sqrt[4]{x}]_1^{16}+[\ln|1+\sqrt[4]{x}|]_1^{16}]=4[(\frac{4}{2}-\frac{1}{2})-(2-1)+(\ln|3|-\ln|2|)]=4[\frac{1}{2}+\ln(\frac{3}{2})]=2+4\ln(\frac{3}{2})$$

3. Calcula $\int_2^3 \frac{x^2+1}{x^2(x-1)}dx$

Resolvemos, en primer lugar, la integral indefinida.

Tenemos un cociente de polinomios, con grado el numerador menor que el grado del denominador. En el denominador tenemos una raíz doble $x=0$ y una raíz simple $x-1=0$, por lo que descomponemos de la siguiente forma:

$$\frac{x^2+1}{x^2(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1} \quad \rightarrow \quad x^2+1=A\,x(x-1)+B(x-1)+C\,x^2$$

Fíjate como la raíz doble $x=0$ aparece en dos denominadores, $\frac{A}{x}$ y $\frac{B}{x^2}$. Damos valores.

Si $x=1 \rightarrow 2=C$

Si $x=0 \rightarrow 1=-B \rightarrow B=-1$

Si $x=2 \rightarrow 5=2A+B+4C \rightarrow 5=2A-1+8 \rightarrow A=-1$

Por lo que la integral indefinida se descompone en tres fracciones.

$$\int \frac{x^2+1}{x^2(x-1)}dx=\int \frac{-1}{x}dx+\int \frac{-1}{x^2}dx+\int \frac{2}{x-1}dx=-\ln|x|+\frac{1}{x}+2\ln|x-1|+C$$

Para resolver la integral definida aplicamos la **regla de Barrow**.

$$\int_2^3 \frac{x^2+1}{x^2(x-1)}dx=\left[-\ln|x|+\frac{1}{x}+2\ln|x-1|\right]_2^3=-\ln(3)+\frac{1}{3}+2\ln(2)-\left(-\ln(2)+\frac{1}{2}+2\ln(1)\right)$$

$$\int_2^3 \frac{x^2+1}{x^2(x-1)}dx=-\ln(3)+\frac{1}{3}+3\ln(2)-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}+3\ln(2)-\ln(3)$$

4. Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $[2,3]$ y $F(x)$ una primitiva de $f(x)$ tal que $F(2)=1$ y $F(3)=2$. Calcular:

a) $\int_2^3 f(x)\,dx$

b) $\int_2^3 (5\cdot f(x)-7)\,dx$

c) $\int_2^3 F^2(x)\cdot f(x)\,dx$

a) Si $F(x)$ es primitiva de $f(x)$ $\rightarrow$ $F(x)=\int f(x)\,dx$

Al aplicar la regla de Barrow en $\int_2^3 f(x)\,dx=[F(x)]_2^3=F(3)-F(2)=2-1=1$

b) $I=\int_2^3 (5\cdot f(x)-7)\,dx=5\int_2^3 f(x)\,dx-7\int_2^3 dx=5[F(x)]_2^3-7[x]_2^3=5\cdot(F(3)-F(2))-7\cdot(3-2)$

$I=5\cdot(2-1)-7\cdot 1=5-7=-2$

c) Si $F(x)=\int f(x)\,dx$ $\rightarrow$ $F'(x)=f(x)$ → Por lo tanto:

$$I=\int_2^3 F^2(x)\cdot f(x)\,dx=\int_2^3 F^2(x)\cdot F'(x)\,dx=\left[\frac{1}{3}F^3(x)\right]_2^3$$

Donde nos damos cuenta que dentro de la integral definida tenemos la potencia de una función por la derivada de esa función.

$$I=\frac{1}{3}\cdot(F^3(3)-F^3(2))=\frac{1}{3}\cdot(2^3-1^3)=\frac{7}{3}$$

5. Calcula $\int_0^{\pi^2} sen(\sqrt{x})\,dx$ **. Ayuda: cambio de variable** $\sqrt{x}=t$

$$\sqrt{x}=t \;\rightarrow\; \frac{1}{2\sqrt{x}}dx=dt \;\rightarrow\; dx=2\sqrt{x}\,dt=2t\,dt$$

$$I=\int_0^{\pi^2} sen(\sqrt{x})\,dx=\int_0^{\pi^2} sen(t)\,2t\,dt=2\int_0^{\pi^2} t\cdot sen(t)\,dt$$

Resolvemos la integral indefinida aplicando partes.

$$u=t \;\rightarrow\; u'=1$$
$$v'=sen(t) \;\rightarrow\; v=-\cos(t)$$

$$\int t\cdot sen(t)\,dt=-t\cdot\cos(t)+\int\cos(t)\,dt=-t\cdot\cos(t)+sen(t)$$

Deshacemos el cambio de variable $\sqrt{x}=t \;\rightarrow\; -\sqrt{x}\cdot\cos(\sqrt{x})+sen(\sqrt{x})$

Por lo que nuestra integral definida resulta:

$$I=2\cdot[-\sqrt{x}\cdot\cos(\sqrt{x})+sen(\sqrt{x})]_0^{\pi^2}=2\cdot[-\pi\cdot\cos(\pi)+sen(\pi)+0-0]=2\pi$$

6. Calcula $\int_{-1}^{1} \ln(4-x)\,dx$

$I=\int_{-1}^{1} \ln(4-x)\,dx$ → Resolvemos por partes → $\int u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)\cdot u'(x)\,dx$

$u(x)=\ln(4-x) \quad \rightarrow \quad u'(x)=\dfrac{-1}{4-x}$

$v'(x)=1 \quad \rightarrow \quad v(x)=x$

Sustituimos y aplicamos la regla de Barrow: si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ → $F(x)=\int f(x)\,dx$ → se cumple $\int_a^b f(x)\,dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$.

$$I=\int_{-1}^{1} \ln(4-x)\,dx=\left[u(x)\cdot v(x)-\int v(x)\cdot u'(x)\,dx\right]_{-1}^{1}$$

$$I=\int_{-1}^{1} \ln(4-x)\,dx=[x\ln(4-x)]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1} \frac{-x}{4-x}\,dx=[\ln(3)+\ln(5)]-\int_{-1}^{1} \frac{4-x-4}{4-x}\,dx$$

$$I=[\ln(3)+\ln(5)]-\int_{-1}^{1} dx-\int_{-1}^{1} \frac{-4}{4-x}\,dx=[\ln(3)+\ln(5)]-[x]_{-1}^{1}+4\int_{-1}^{1} \frac{1}{4-x}\,dx$$

$$I=[\ln(3)+\ln(5)]-[1+1]-4[\ln(4-x)]_{-1}^{1}=[\ln(3)+\ln(5)]-2-4[\ln(3)-\ln(5)]$$

$$I=-3\ln(3)+5\ln(5)-2=-\ln(27)+\ln(3125)-2=\ln\left(\frac{3125}{27}\right)-2=\ln(115{,}74)-2\simeq 2{,}75$$

7. Calcula $\int_0^1 x\ln(1+x)\,dx$

Resolvemos la integral indefinida aplicando partes.

$$\int u(x)\cdot v'(x)dx=u(x)\cdot v(x)-\int v(x)\cdot u'(x)dx$$

$$I=\int x\ln(1+x)dx$$

$$u(x)=\ln(1+x) \rightarrow u'(x)=\frac{1}{1+x}$$

$$v'(x)=x \rightarrow v(x)=\frac{x^2}{2}$$

$$I=u(x)\cdot v(x)-\int v(x)\cdot u'(x)dx=\frac{x^2}{2}\cdot\ln(1+x)-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x}dx$$

Realizamos la división del cociente de polinomios.

$$x^2=(1+x)\cdot(x-1)+1 \rightarrow \frac{x^2}{1+x}=x-1+\frac{1}{1+x}$$

$$I=\frac{x^2}{2}\cdot\ln(1+x)-\frac{1}{2}\int[x-1+\frac{1}{1+x}]dx=\frac{x^2}{2}\cdot\ln(1+x)-\frac{1}{2}[\int x\,dx-\int dx+\int\frac{1}{1+x}dx]$$

$$I=\frac{x^2}{2}\cdot\ln(1+x)-\frac{x^2}{4}+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln|1+x|+C$$

Para resolver la integral definida, aplicamos la regla e Barrow: si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ $\rightarrow$ $F(x)=\int f(x)dx \rightarrow \int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$

$$\int_0^1 x\ln(1+x)dx=[\frac{x^2}{2}\cdot\ln(1+x)-\frac{x^2}{4}+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln|1+x|]_0^1$$

$$\int_0^1 x\ln(1+x)dx=\frac{1}{2}\cdot\ln(2)-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\ln(2)-(0-0+0-0)$$

$$\int_0^1 x\ln(1+x)dx=\frac{1}{4}$$

8. Si $P(x)$ es un polinomio de tercer grado, con un punto de inflexión en el punto $(0,5)$ y un extremo relativo en el punto $(1,1)$, calcule $\int_0^1 P(x)\,dx$.

La expresión general de un polinomio de grado tres es:

$$P(x)=a x^3+b x^2+c x+d$$

Si el polinomio pasa por $(0,5) \rightarrow P(0)=5 \rightarrow d=5$

Si el polinomio pasa por $(1,1) \rightarrow P(1)=1 \rightarrow a+b+c+5=1 \rightarrow a+b+c=-4$

Si hay un punto de inflexión en $(0,5) \rightarrow P''(0)=0$

$P'(x)=3ax^2+2bx+c \rightarrow P''(x)=6ax+2b \rightarrow 2b=0 \rightarrow b=0$

Si hay extremo relativo en $(1,1) \rightarrow P'(1)=0$

$P'(x)=3ax^2+2bx+c \rightarrow 3a+0+c=0 \rightarrow 3a+c=0$

Llegamos a un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas → $\begin{Bmatrix} a+c=-4 \\ 3a+c=0 \end{Bmatrix} \rightarrow a=2 \ , \ c=-6$

El polinomio solución es → $P(x)=2x^3-6x+5$

Finalmente, calculamos la integral definida $\int_0^1 P(x)\,dx$. Primero resolvemos la integral indefinida, y luego aplicamos regla de Barrow: si $F(x)$ es una primitiva de $f(x) \rightarrow F(x)=\int f(x)\,dx \rightarrow$ $\int_a^b f(x)\,dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$

$$\int (2x^3-6x+5)\,dx=\frac{1}{2}x^4-3x^2+5x+C$$

$$\int_0^1 (2x^3-6x+5)\,dx=\left[\frac{1}{2}x^4-3x^2+5x\right]_0^1=\frac{1}{2}-3+5-(0-0+0)=\frac{5}{2}$$

9. Resolver las siguientes integrales:

a) $\int_{1/2}^{e/2} \frac{(\ln(2x))^2}{3x} dx$

b) $\int_1^4 \frac{3x^4+5x^2+\sqrt{x}}{x^2} dx$

a) La primera integral podemos resolverla de manera inmediata si recordamos la derivada de la potencia de una función, a partir de la regla de la cadena de la derivada.

$$\frac{d}{dx}[f^n(x)]=n\cdot f^{n-1}(x)\cdot f'(x) \rightarrow \frac{d}{dx}[\ln^3(2x)]=3\cdot\ln^2(2x)\cdot\frac{1}{2x}\cdot 2=3\cdot\frac{\ln^2(2x)}{x}$$

Si comparamos la integral $\int_{1/2}^{e/2} \frac{(\ln(2x))^2}{3x} dx$ con el resultado de la derivada:

$$\int_{1/2}^{e/2} \frac{(\ln(2x))^2}{3x} dx=\frac{1}{3}\cdot\int_{1/2}^{e/2} \frac{(\ln(2x))^2}{x} dx=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\int_{1/2}^{e/2} 3\cdot\frac{(\ln(2x))^2}{x} dx=\frac{1}{9}\cdot[\ln^3(2x)]_{1/2}^{e/2}$$

Y aplicamos la regla de Barrow: si $F(x)$ es una primitiva de $f(x) \rightarrow F(x)=\int f(x)dx \rightarrow$ $\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$

$$\frac{1}{9}\cdot[\ln^3(2x)]_{1/2}^{e/2}=\frac{1}{9}[\ln^3(e)-\ln^3(1)]=\frac{1}{9}$$

b) La integral de partida la rompemos en la suma de tres integrales.

$$\int_1^4 \frac{3x^4+5x^2+\sqrt{x}}{x^2} dx=\int_1^4 \frac{3x^4}{x^2} dx+\int_1^4 \frac{5x^2}{x^2} dx+\int_1^4 \frac{\sqrt{x}}{x^2} dx=\int_1^4 3x^2 dx+\int_1^4 5\, dx+\int_1^4 x^{-3/2} dx$$

$$3\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^4+5[x]_1^4+\left[\frac{x^{-1/2}}{-1/2}\right]_1^4=[x^3]_1^4+5[x]_1^4-2[x^{-1/2}]_1^4=[64-1]+5[4-1]-2\left[\frac{1}{2}-1\right]=79$$

Donde nuevamente, como en el apartado anterior, hemos aplicado la regla de Barrow.

10. Calcula $\int_3^5 \frac{x^2+x+6}{x-2}\,dx$

Tenemos la integral de un cociente de polinomios, con grado del numerador mayor que el grado del denominador. Realizamos la división de polinomios.

$$x^2+x+6=(x-2)(x+3)+12 \quad \rightarrow \quad \frac{x^2+x+6}{x-2}=x+3+\frac{12}{x-2}$$

$$\int_3^5 \frac{x^2+x+6}{x-2}\,dx=\int_3^5 \left(x+3+\frac{12}{x-2}\right)dx=\int_3^5 x\,dx+\int_3^5 3\,dx+\int_3^5 \frac{12}{x-2}\,dx$$

$$\frac{1}{2}[x^2]_3^5+3[x]_3^5+12[\ln|x-2|]_3^5=\frac{1}{2}\cdot(25-9)+3(5-3)+12(\ln(3)-\ln(1))=27{,}18$$

Donde hemos aplicado la regla de Barrow: si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ $\rightarrow$ $F(x)=\int f(x)\,dx$ $\rightarrow$ $\int_a^b f(x)\,dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$

11. Calcula $\int_0^1 (x^2+x+1)e^{-x}\,dx$ **.**

En primer lugar resolvemos la siguiente integral indefinida → $\int (x^2+x+1)e^{-x}\,dx$

Integramos por partes.

$$u=x^2+x+1 \quad \rightarrow \quad du=(2x+1)\,dx$$
$$dv=e^{-x}\,dx \quad \rightarrow \quad v=-e^{-x}$$
$$I=-(x^2+x+1)e^{-x}+\int (2x+1)e^{-x}\,dx$$

Integramos nuevamente por partes.

$$u=2x+1 \quad \rightarrow \quad du=2\,dx$$
$$dv=e^{-x}\,dx \quad \rightarrow \quad v=-e^{-x}$$
$$I=-(x^2+x+1)e^{-x}-(2x+1)e^{-x}+\int 2e^{-x}\,dx \quad \rightarrow \quad I=-(x^2+x+1)e^{-x}-(2x+1)e^{-x}-2e^{-x}+C$$

Operamos para simplificar la solución final.

$$I=-(x^2+x+1+2x+1+2)e^{-x}+C \quad \rightarrow \quad I=-(x^2+3x+4)e^{-x}+C$$

Retomamos la integral definida de partida.

$$\int_0^1 (x^2+x+1)e^{-x}\,dx=[-(x^2+3x+4)e^{-x}]_0^1=\frac{-8}{e}+4=\frac{-8+4e}{e}$$

12. Calcula:

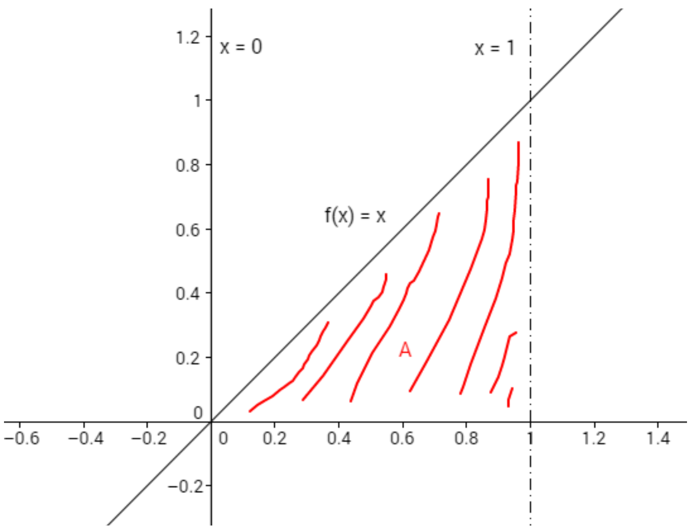
a) La integral definida $\int_0^1 x\,dx$ **.**

b) El área encerrada por la función $f(x)=x$ **, el eje** OX **y las rectas verticales** $x=0$ **,** $x=1$ **.**

a) $\int_0^1 x\,dx=[F(x)]_0^1=F(1)-F(0) \rightarrow \int_0^1 x\,dx=[\frac{x^2}{2}]_0^1=\frac{1^2}{2}-0=\frac{1}{2}$

b) La función $f(x)=x$ es positiva en el intervalo $[0,1]$. Por lo tanto, el área encerrada es igual a la integral definida en el apartado anterior.

$A=\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}\ u^2$



13. Calcula:

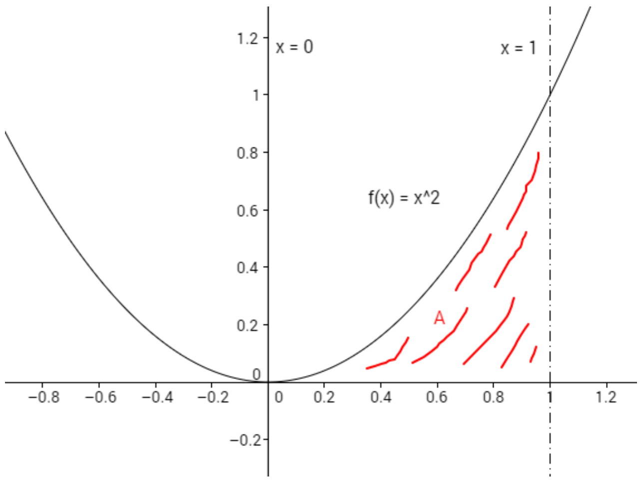
a) La integral definida $\int_0^1 x^2\,dx$ **.**

b) El área encerrada por la función $f(x)=x^2$ **, el eje** OX **y las rectas verticales** $x=0$ **,** $x=1$

a) $\int_0^1 x^2\,dx=[F(x)]_0^1=F(1)-F(0) \rightarrow \int_0^1 x^2\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1^2}{3}-0=\frac{1}{3}$

b) La función $f(x)=x^2$ es positiva en el intervalo $[0,1]$. Por lo tanto, el área encerrada es igual a la integral definida en el apartado anterior.

$$A=\int_0^1 x^2\,dx=\frac{1}{3}\ u^2$$



14. Calcula:

a) La integral definida $\int_0^4 (5x-x^2)\,dx$ **.**

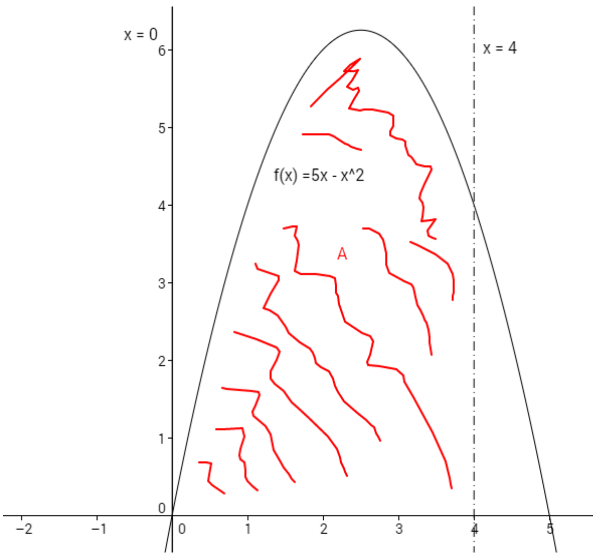
b) El área encerrada por la función $f(x)=5x-x^2$ **, el eje** OX **y las rectas verticales** $x=0$ **,** $x=4$ **.**

a) $\int_0^4 (5x-x^2)\,dx=[F(x)]_0^4=F(4)-F(0)$

$$\int_0^4 (5x-x^2)\,dx=\left[5\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^4=5\cdot\frac{16}{2}-\frac{64}{3}-(0)=\frac{80}{2}-\frac{64}{3}=\frac{56}{3}$$

b) La función $f(x)=5x-x^2$ es positiva en el intervalo $[0,4]$. Por lo tanto, el área encerrada es igual a la integral definida en el apartado anterior.

$$A=\int_0^4 (5x-x^2)\,dx=\frac{56}{3}\ u^2$$



15. Resuelve $I=\int_0^{\pi} \frac{6\,sen(x)}{5-3\cos(x)}\,dx$

$$I=\int_0^{\pi} \frac{6\,sen(x)}{5-3\cos(x)}\,dx=\frac{6}{3}\int_0^{\pi} \frac{3\,sen(x)}{5-3\cos(x)}\,dx=2[\ln|5-3\cos(x)|]_0^{\pi}$$

Aplicamos la regla de Barrow.

$$I=2(\ln|5-3\cos(\pi)|-\ln|5-3\cos(0)|)=2(\ln(8)-\ln(2))=2\ln(\frac{8}{2})=2\ln(4)=4\ln(2)$$

16. Calcula $\int_1^2 \frac{3-x^2+x^4}{x^3}dx$

$$I=\int_1^2 \frac{3-x^2+x^4}{x^3}dx=3\int_1^2 \frac{1}{x^3}dx-\int_1^2 \frac{1}{x}dx+\int_1^2 x\,dx=\frac{-3}{2}\left[\frac{1}{x^2}\right]_1^2-[\ln|x|]_1^2+\frac{1}{2}[x^2]_1^2$$

$$I=\frac{-3}{2}\left(\frac{1}{4}-1\right)-(\ln(2)-\ln(1))+\frac{1}{2}[4-1]=\frac{9}{8}-\ln(2)+\frac{3}{2}=\frac{21}{8}-\ln(2)$$