

Teoría – Tema 4

CCSS Teoría - 9 - Aplicar inversa para resolver ecuaciones matriciales

Matriz considerada como incógnita

Si todos los coeficientes de una matriz X son incógnitas desconocidas, podemos considerar esa matriz como una incógnita en la ecuación matricial:

$$A \cdot X = B$$

Donde A y B son matrices de coeficientes conocidos, y siendo A una matriz multiplicable por X .

¿Podemos resolver estas ecuaciones matriciales aplicando matriz inversa? Sí es posible. Siempre y cuando la matriz sobre la que debemos calcular inversa sea una matriz invertible. No olvides lo que hemos estudiado en apartados anteriores: si no puedo aplicar inversa, siempre me queda la opción de operar con los coeficientes de las matrices hasta llegar a una igualdad de matrices donde podamos igualar coeficiente a coeficiente.

Sea $A \cdot X = B$. Despejamos la matriz X (recuerda que el cociente de matrices no está definido):

$$A \cdot X = B \rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \rightarrow I \cdot X = A^{-1} \cdot B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

Donde hemos aplicado que, si existe la inversa de una matriz, el producto $A^{-1} \cdot A = I$ es igual a la matriz identidad. Fíjate que hemos aplicado la matriz inversa A^{-1} por la izquierda de la matriz A , y esto implica que A^{-1} también se aplica por la izquierda de la matriz B (ya que el producto de matrices no es conmutativo).

Ejemplo 1 resuelto

Resolver $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$.

Donde la inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ resulta $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Por lo tanto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

■ ¿Y si no puedo aplicar matriz inversa para despejar X?

Recuerda lo que ya has estudiado: siempre queda la opción de operar con los coeficientes de las matrices y llegar a una igualdad de matrices, donde igualar coeficiente a coeficiente.

Sea, por ejemplo, la ecuación matricial $A \cdot X = C$.

Supongamos que A es una matriz 3×3 , mientras que X es una matriz columna 3×1 . Si la matriz A no admite inversa, podemos plantear el siguiente sistema:

$$A \cdot X = C \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = c_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = c_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = c_3 \end{cases}$$

Y resolver el sistema para obtener los valores x, y, z de la matriz de incógnitas.