

3 Mètodes de càlcul. Exemples

33.9 Àrea de moments

El sistema de càlcul que s'exposa a continuació consisteix en resoldre bigues isostàtiques o hiperestàtiques en base al tractament i manipulació del diagrama de moments flectors de les pròpies bigues. Per tant, aquests diagrames hauran de ser relativament simples. Per això, el mètode exposat s'aplica freqüentment a bigues d'un sol tram amb voladissos o no, encastades o no, i amb càrregues concentrades que són les que provoquen moments poligonals fàcils de manipular. No obstant això, l'exemple que tracta la present aplicació és una biga continua (fig. 33.42), però amb restriccions evidents. Únicament dos trams, amb les mateixes llums $L_1 = L_2$, amb càrrega uniformement repartida q al llarg de tota la biga i amb les mateixes dimensions i material. La resolució d'aquesta biga és simple, a qualsevol promptuari trobaríem els valors dels punts singulars, però es creu convenient exposar-ho utilitzant el programa GeoGebra, en què es pot veure la gènesi del sistema. L'exemple es pot trobar igualment al llibre 'Análisis de Estructuras' de Jairo Uribe Escamilla editat per ECOE Ediciones el 2002.

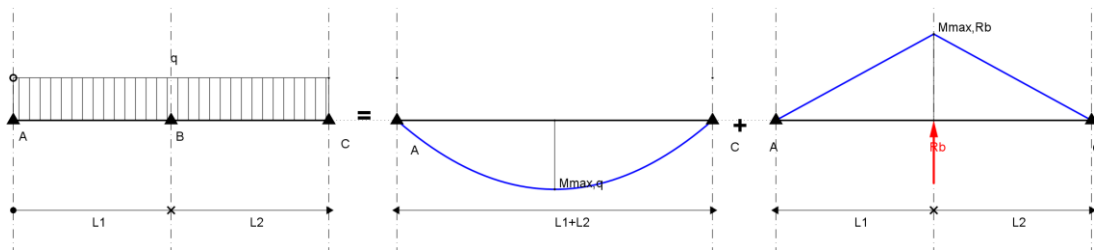


Fig. 33.42

De la biga A-B-C únicament coneixem els valors dels moments flectors en els extrems, és a dir, $M_a = M_c = 0$. Aquesta es descompon en dues bigues en les quals desapareix el suport B. La primera és la biga A-C de llum $L_1 + L_2$, simplement recolzada i amb la càrrega q a tot el seu llarg. La segona és la biga també anomenada A-C i sobre la que actua una força R_b antigravitatòria (reacció) a la meitat de la biga, és a dir, on hi havia el recolzament B. D'aquesta descomposició s'ha de dir:

- Les dues bigues tenen la mateixa llum $L_1 + L_2$, i a les dues els moments en els extrems A i C són $M_a = M_c = 0$.
- Es coneix el diagrama de moments flectors parabòlic provocat per la càrrega q en el tram A-C.
- Es coneix igualment el moment màxim que es produeix en el centre de la biga de valor $M_{\max, q} = q \cdot (L_1 + L_2)^2 / 8$.
- A la segona biga, R_b produeix un diagrama de moments flectors triangular, però es desconeix el seu valor, atès que tampoc es coneix el valor de R_b .
- En el punt B la deformació és nul·la.
- Tant a la meitat de la biga A-C amb la càrrega q , com amb la càrrega R_b , les tangents en el punt B són horitzontals.
- La deformació a qualsevol punt de la biga és la suma (amb el seu signe) de les deformacions de les bigues descompostes en el mateix punt.

El mètode de càlcul de l'àrea de moments es basa en dos teoremes que van ser enunciats per la Universitat de Michigan el 1873. D'aquests dos teoremes enunciem el segon, que és el que s'utilitza en aquesta aplicació. Diu així:

La distància mesurada verticalment d'un punt P1 sobre l'elàstica d'una biga a la tangent traçada en un altre punt P2 de la mateixa, és igual al moment estàtic, amb respecte al punt P1, de l'àrea del diagrama de moments flectors dividida per E·I entre els punts indicats.

Com que en aquesta aplicació no es calculen deformacions i atès que les dimensions i materials del dos trams de la biga són iguals, el producte $E \cdot I$ (E : mòdul d'elasticitat x I : moment d'inèrcia) no es considerarà. En conseqüència tindrem:

· $f_1 + f_2 = 0$. Deformacions iguals i suma nul·la en el punt B de les bigues descompostes.

· $M_{\max, q} = q \cdot (L_1 + L_2)^2 / 8$. Moment flector màxim de la biga A-C afectada de la càrrega q .

· $A = (4/3) \cdot (L_1 + L_2) / 2 \cdot M_{\max, q} \cdot (1/2)$. És l'àrea de mig diagrama de moments provocat per la càrrega q a la primera biga descomposta. Operant resulta $A = q \cdot (L_1 + L_2)^3 / 24$.

· $M_{\text{est}, A} = A \cdot (5/8) \cdot (L_1 + L_2) / 2$. És el moment estàtic des del punt A de mitja paràbola. La distància d'A al centroide de la mitja paràbola és $5/8 (L_1 + L_2) / 2$. Operant resulta $M_{\text{est}, A} = 5 \cdot q \cdot (L_1 + L_2)^4 / 384$. Observi's que el valor obtingut és la deformació màxima d'una biga simplement recolzada amb carrega uniformement repartida, excepte el producte $E \cdot I$.

· $M_{\max, R_b} = R_b \cdot (L_1 + L_2) / 4$. Moment flector màxim de la biga A-C afectada de la càrrega R_b .

· $A = L_1 \cdot M_{\max, R_b} \cdot (1/2)$. És l'àrea de mig diagrama de moments provocat per la càrrega R_b a la segona biga descomposta. Operant resulta $A = R_b \cdot (L_1 + L_2)^2 / 16$.

· $M_{\text{est}, A} = A \cdot (2/3) \cdot (L_1 + L_2) / 2$. És el moment estàtic des del punt A de mig diagrama de moments. La distància d'A al centroide del mig diagrama és $2/3 \cdot (L_1 + L_2) / 2$. Operant resulta $M_{\text{est}, A} = R_b \cdot (L_1 + L_2)^3 / 48$.

Per a un cert valor de L_1 o L_2 i q , els valors obtinguts es tenen a la figura 33.43.

Igualant els dos moments estàtics, resulta $5 \cdot q \cdot (L_1 + L_2)^4 / 384 = R_b \cdot (L_1 + L_2)^3 / 48$ i, aclarint R_b , és té $R_b = (15/24) \cdot q \cdot (L_1 + L_2)$. Amb el valor de R_b , l'obtenció de les reaccions R_a i R_c és immediata. Per obtenir el valor del moment flector en el punt B, únicament s'ha de fer $M_b = R_a \cdot L_1$. A la figura 33.44 es poden observar els diagrames de moments flexors i esforços tallants.

La paràbola de la biga A-C està dibuixada tenint en compte la funció de moments flexors. Al contrari, el diagrama de moments flexors de la biga A-B-C s'ha dibuixat discretitzant en 21 punts les longituds de les bigues, per això els valors de M_{ab} , M_{bc} , x_1 i x_2 són aproximats.

Càlculs parcials
 Biga A-C...q
 $M_{\max, q} = 162.96 \text{ mK}$
 $\text{Àrea} = 473.92 \text{ m}^2\text{K}$
 $M_{\text{est}, A} = 1292.12 \text{ m}^3\text{K}$
 Biga A-C...R_b
 $M_{\max, R_b} = 203.7 \text{ mK}$
 $\text{Àrea} = 444.3 \text{ m}^2\text{K}$
 $M_{\text{est}, A} = 1292.12 \text{ m}^3\text{K}$
 Reacció $R_b = 93.39 \text{ kN}$

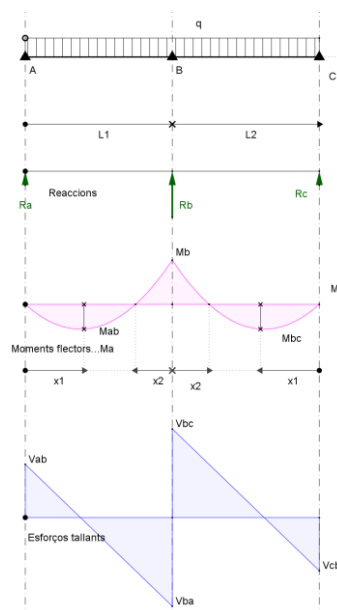


Fig. 33.43

Fig. 33.44