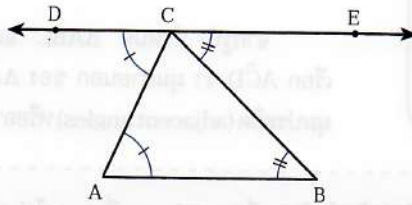


3.4 เส้นขนานและรูปสามเหลี่ยม

นักเรียนเคยทราบมาแล้วว่า “ขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเท่ากับ 180 องศา” ข้อความนี้เป็นทฤษฎีบทที่สำคัญทฤษฎีบทหนึ่งทางเรขาคณิต ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้ ดังนี้

ทฤษฎีบท ขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเท่ากับ 180 องศา



กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ

ต้องการพิสูจน์ว่า $\widehat{CAB} + \widehat{ABC} + \widehat{BCA} = 180^\circ$

พิสูจน์ สร้าง \overline{DE} ผ่านจุด C ให้ $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$

เนื่องจาก \overline{AC} และ \overline{BC} เป็นเส้นตัด \overline{DE} และ \overline{AB}

จะได้ $\widehat{DCA} = \widehat{CAB}$ (ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัดแล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน)

และ $\widehat{ECB} = \widehat{ABC}$ (ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัดแล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน)

$\widehat{DCA} + \widehat{BCA} + \widehat{ECB} = 180^\circ$ (ขนาดของมุมตรง)

$\widehat{CAB} + \widehat{BCA} + \widehat{ABC} = 180^\circ$ (แทน \widehat{DCA} ด้วย \widehat{CAB} และแทน \widehat{ECB} ด้วย \widehat{ABC})

ดังนั้น $\widehat{CAB} + \widehat{ABC} + \widehat{BCA} = 180^\circ$ (สมบัติของการเท่ากัน)



ชวนคิด 3.4

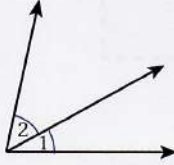
ผลบวกของขนาดของมุมภายในของรูป n เหลี่ยมเท่ากับเท่าไร

นักเรียนสามารถดาวน์โหลดไฟล์ GSP เพื่อสืบเสาะผลบวกของขนาดของมุมภายในของรูป n เหลี่ยมได้ที่ <http://ipst.me/9369>



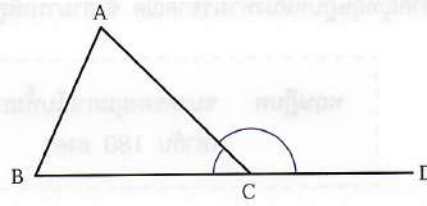
1.2.3 มุมคณิต

มุมประชิด คือ มุม 2 มุม ที่มีแขนของมุมร่วมกันแขนหนึ่งและมีจุดยอดร่วมกัน โดยมุมทั้งสองอยู่คนละข้างของแขนที่ร่วมกัน และกล่าวได้ว่า มุมแต่ละมุมเป็นมุมประชิดของอีกมุมหนึ่ง



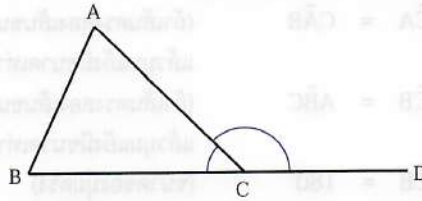
จากรูป จะกล่าวว่า $\hat{1}$ เป็นมุมประชิดของ $\hat{2}$ หรือ $\hat{2}$ เป็นมุมประชิดของ $\hat{1}$

ทฤษฎีบทข้างต้น สามารถนำมาใช้พิสูจน์ทฤษฎีบทเกี่ยวกับขนาดของมุมภายนอกและขนาดของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมได้ ดังต่อไปนี้



จากรูป กำหนด $\triangle ABC$ และต่อ \overline{BC} ออกไปทางจุด C ถึงจุด D เรียก \widehat{ACD} ว่า มุมภายนอก ของ $\triangle ABC$ เรียก \widehat{ACB} และ \widehat{ACD} ว่า เป็นมุมประชิด (adjacent angles) หรืออาจกล่าวว่า \widehat{ACB} เป็นมุมประชิดของ \widehat{ACD}

ทฤษฎีบท ถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมออกไป แล้วมุมภายนอกที่เกิดขึ้นจะมีขนาดเท่ากับผลบวกของขนาดของมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิดของมุมภายนอกนั้น



กำหนดให้ $\triangle ABC$ มี \widehat{ACD} เป็นมุมภายนอกที่ได้จากการต่อ \overline{BC} ออกไปทางจุด C

ต้องการพิสูจน์ว่า $\widehat{ACD} = \widehat{CAB} + \widehat{ABC}$

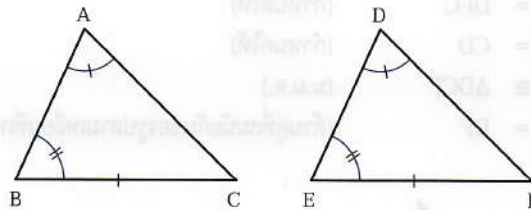
พิสูจน์ เนื่องจาก $\widehat{ACD} + \widehat{BCA} = 180^\circ$ (ขนาดของมุมตรง)
 และ $\widehat{CAB} + \widehat{ABC} + \widehat{BCA} = 180^\circ$ (ขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเท่ากับ 180°)

จะได้ $\widehat{ACD} + \widehat{BCA} = \widehat{CAB} + \widehat{ABC} + \widehat{BCA}$ (สมบัติของการเท่ากัน)

ดังนั้น $\widehat{ACD} = \widehat{CAB} + \widehat{ABC}$ (สมบัติของการเท่ากัน)

นอกจากทฤษฎีบทดังกล่าวแล้ว ยังมีการนำทฤษฎีบทเกี่ยวกับผลบวกของขนาดของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมไปพิสูจน์สมบัติที่เกี่ยวกับความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม ที่มีความสัมพันธ์กันแบบ มุม-มุม-ด้าน ดังการพิสูจน์ต่อไปนี้

ทฤษฎีบท ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีความสัมพันธ์กันแบบ มุม-มุม-ด้าน (ม.ม.ด.) กล่าวคือ มีมุมที่มีขนาดเท่ากันสองคู่ และด้านคู่ที่อยู่ตรงข้ามกับมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากัน ยาวเท่ากันหนึ่งคู่ แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ



กำหนดให้ $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ มี $\hat{C}AB = \hat{F}DE$, $\hat{A}BC = \hat{D}EF$ และ $BC = EF$

ต้องการพิสูจน์ว่า $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

พิสูจน์ $\hat{C}AB + \hat{A}BC + \hat{B}CA = 180^\circ$

$$\hat{F}DE + \hat{D}EF + \hat{E}FD = 180^\circ$$

จะได้ $\hat{C}AB + \hat{A}BC + \hat{B}CA = \hat{F}DE + \hat{D}EF + \hat{E}FD$

เนื่องจาก $\hat{C}AB = \hat{F}DE$

และ $\hat{A}BC = \hat{D}EF$

ดังนั้น $\hat{B}CA = \hat{E}FD$

และเนื่องจาก $BC = EF$

ดังนั้น $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

(ขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเท่ากับ 180°)

(ขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเท่ากับ 180°)

(สมบัติของการเท่ากัน)

(กำหนดให้)

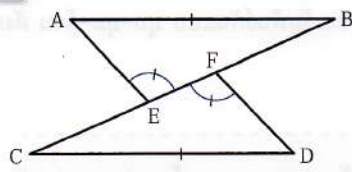
(กำหนดให้)

(สมบัติของการเท่ากัน)

(กำหนดให้)

(ม.ด.ม.)

ตัวอย่างที่ 1



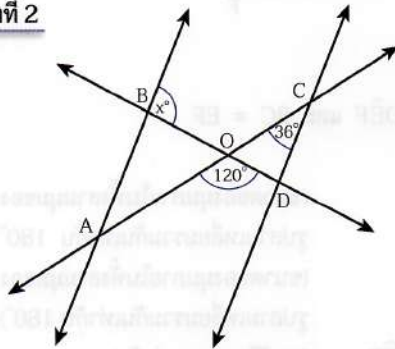
จากรูป กำหนดให้ $\triangle ABE$ และ $\triangle DCF$ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มี $\widehat{AEB} = \widehat{DFC}$, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ และ $AB = CD$ จงพิสูจน์ว่า $AE = DF$

กำหนดให้ $\triangle ABE$ และ $\triangle DCF$ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มี $\widehat{AEB} = \widehat{DFC}$, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ และ $AB = CD$

ต้องการพิสูจน์ว่า $AE = DF$

พิสูจน์	เนื่องจาก $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$	(กำหนดให้)
จะได้	$\widehat{ABE} = \widehat{DCF}$	(ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน)
	$\widehat{AEB} = \widehat{DFC}$	(กำหนดให้)
	$AB = CD$	(กำหนดให้)
ดังนั้น	$\triangle ABE \cong \triangle DCF$	(ม.ม.ด.)
นั่นคือ	$AE = DF$	(ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะยาวเท่ากัน)

ตัวอย่างที่ 2



จากรูป กำหนดให้ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ มี \overline{AC} ตัด \overline{BD} ที่จุด O
 $\widehat{AOD} = 120^\circ$ และ $\widehat{DCO} = 36^\circ$ จงหาค่าของ x

วิธีทำ	เนื่องจาก \widehat{AOD} เป็นมุมภายนอกของ $\triangle COD$	
ดังนั้น	$\widehat{AOD} = \widehat{DCO} + \widehat{CDO}$	(ขนาดของมุมภายนอกของรูปสามเหลี่ยมเท่ากับผลบวกของขนาดของมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิดของมุมภายนอกนั้น)
จะได้	$120 = 36 + \widehat{CDO}$	
	$\widehat{CDO} = 84^\circ$	
เนื่องจาก	$x + \widehat{CDO} = 180$	(ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดที่ตัดเส้นขนานรวมกันเท่ากับ 180°)
จะได้	$x + 84 = 180$	
	$x = 96$	

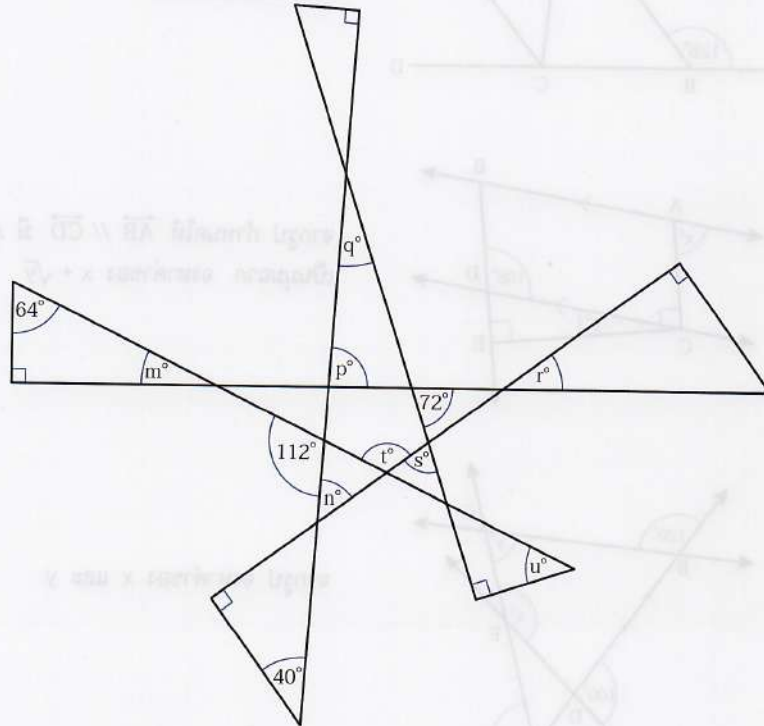
ตอบ 96

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี



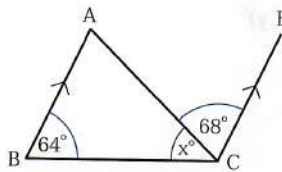
ชวนคิด 3.5

จงหาค่าของ m , n , p , q , r , s , t และ u จากรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้



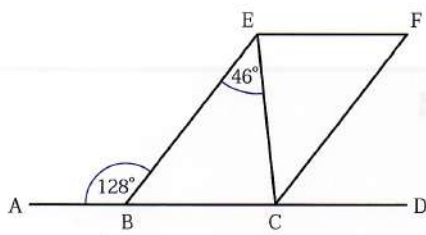
แบบฝึกหัด 3.4

1.



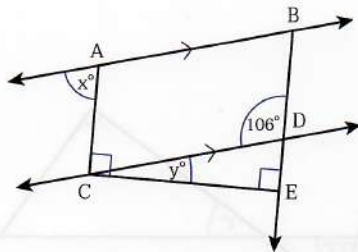
จากรูป กำหนดให้ $\overline{BA} \parallel \overline{CE}$
จงหาค่าของ x

2.



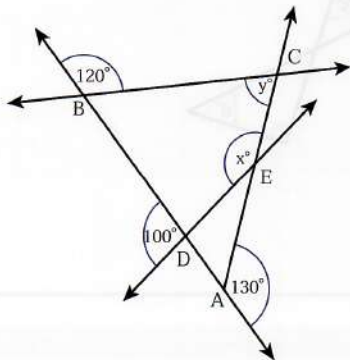
จากรูป กำหนดให้ $\widehat{BCF} = 128^\circ$ และ $\widehat{CEF} = 81^\circ$
จงหาขนาดของ \widehat{CFE}

3.



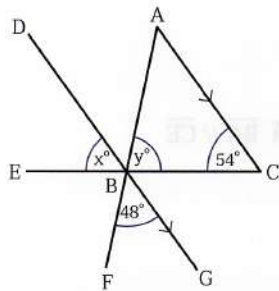
จากรูป กำหนดให้ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ มี \widehat{ACE} และ \widehat{CEB}
เป็นมุมฉาก จงหาค่าของ $x + \sqrt{y}$

4.



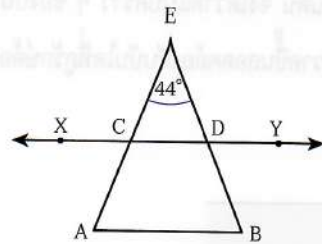
จากรูป จงหาค่าของ x และ y

5.



จากรูป กำหนดให้ $\overline{DG} \parallel \overline{AC}$
จงหาค่าของ $(x - y)^2$

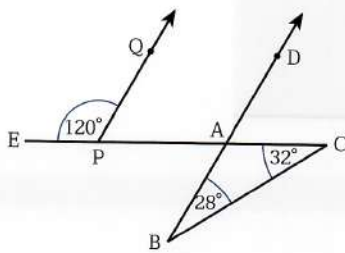
6. หนึ่ง มีรูปอย่างนี้



จากรูป $\triangle EAB$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มี $AE = BE$
 $\angle E = 44^\circ$ และ $\overline{XY} \parallel \overline{AB}$

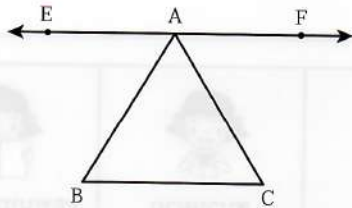
- 1) จงบอกชื่อมุมทุกมุมที่มีขนาดเท่ากับขนาดของ $\angle E$
- 2) $\angle A$ มีขนาดเท่าไร

7.



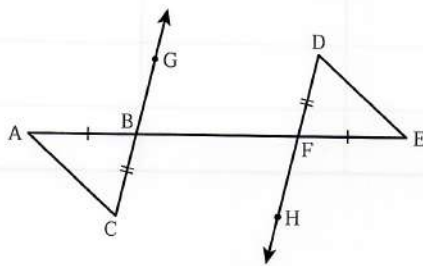
จากรูป จงหาว่า $\overline{PQ} \parallel \overline{BD}$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

8.



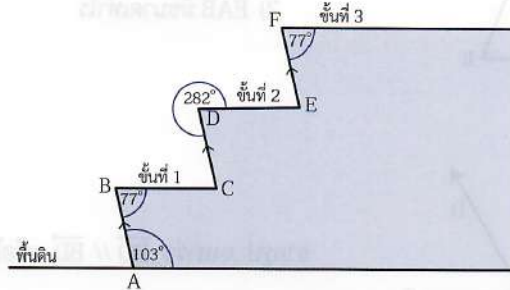
จากรูป $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มีด้าน BC เป็นฐาน
 ให้ $\overline{EF} \parallel \overline{BC}$ จงแสดงว่า $\angle BAE = \angle CAF$

9.





จากรูป กำหนดให้ $\overline{CG} \parallel \overline{DH}$, $AB = EF$ และ $BC = FD$
 จงพิสูจน์ว่า $\overline{AC} \parallel \overline{DE}$

10. ภูริชต้องการสร้างบันไดหน้าบ้านให้ขึ้นบันไดแต่ละชั้นขนานกับพื้นดิน จึงได้วาดแบบคร่าว ๆ ของบันได โดยให้ $\overline{AB} \parallel \overline{CD} \parallel \overline{EF}$ ดังรูป อยากรทราบว่า แบบของบันไดที่ภูริชวาดขึ้นสอดคล้องกับบันไดที่ภูริชต้องการสร้างหรือไม่ ถ้าไม่สอดคล้อง ภูริชต้องแก้ไขแบบของบันไดอย่างไร



ตรวจสอบความเข้าใจ

รายการ	 สบายมาก	 ขอทบทวนอีกนิด
1. เส้นขนานและมุมภายใน		
2. เส้นขนานและมุมแย้ง		
3. เส้นขนานและมุมภายนอกกับมุมภายใน		
4. เส้นขนานและรูปสามเหลี่ยม		



สรุปท้ายบท

* สมบัติของเส้นขนาน

เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง เส้นตรงคู่นั้นขนานกัน ก็ต่อเมื่อ ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด รวมกันเท่ากับ 180 องศา

* ทฤษฎีบทที่ได้เรียนรู้ในบทนี้

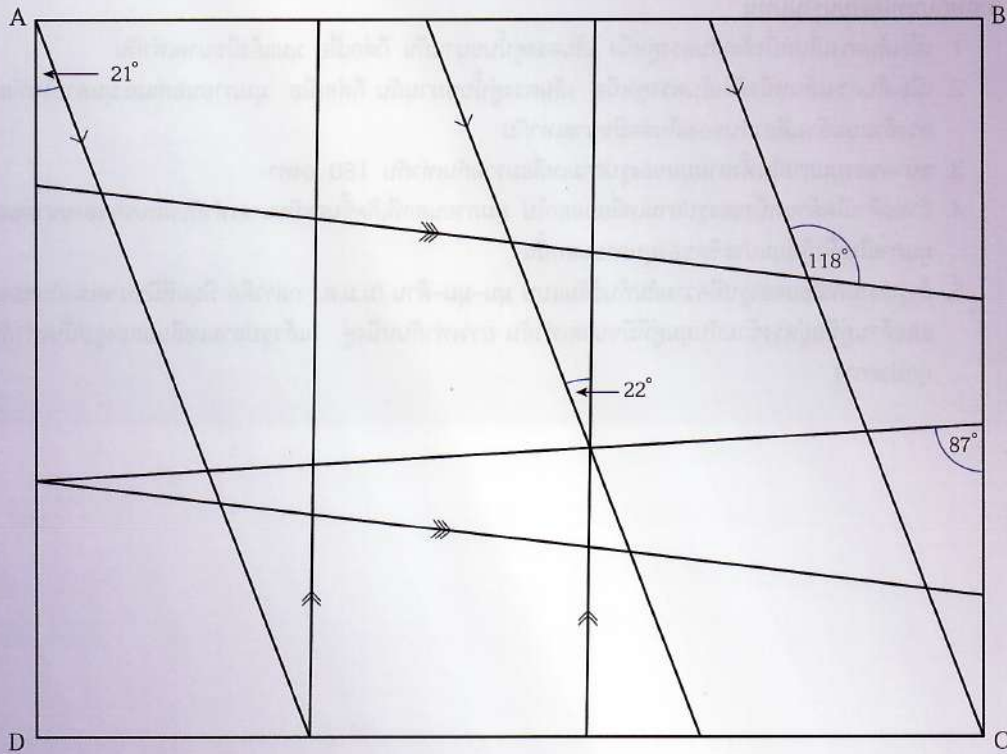
1. เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง เส้นตรงคู่นั้นขนานกัน ก็ต่อเมื่อ มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน
2. เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง เส้นตรงคู่นั้นขนานกัน ก็ต่อเมื่อ มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน
3. ขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเท่ากับ 180 องศา
4. ถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมออกไป มุมภายนอกที่เกิดขึ้นจะมีขนาดเท่ากับผลบวกของขนาดของมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิดของมุมภายนอกนั้น
5. ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีความสัมพันธ์กันแบบ มุม-มุม-ด้าน (ม.ม.ด.) กล่าวคือ มีมุมที่มีขนาดเท่ากันสองคู่ และด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากัน ยาวเท่ากันหนึ่งคู่ แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ





กิจกรรมท้ายบท : เฝยมุมให้ชัด

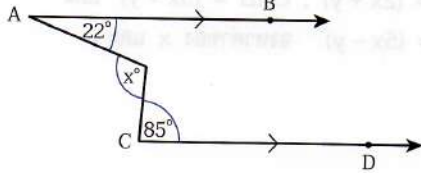
รูปสี่เหลี่ยม ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ที่มีส่วนของเส้นตรง 8 เส้น ตัดกันภายในรูปสี่เหลี่ยม ABCD และกำหนดขนาดของมุมมาให้เพียง 4 มุม ดังรูป จงหาขนาดของมุมที่เหลือทุกมุมในรูปสี่เหลี่ยม ABCD





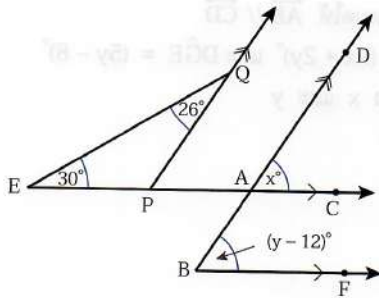
แบบฝึกหัดท้ายบท

1.



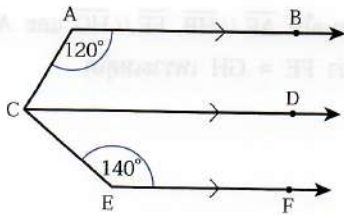
จากรูป กำหนดให้ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$
จงหาค่าของ x

2.



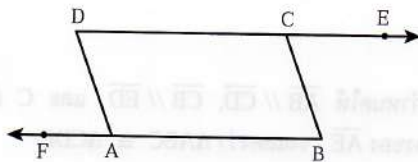
จากรูป กำหนดให้ $\overline{EC} \parallel \overline{BF}$ และ $\overline{PQ} \parallel \overline{BD}$
จงหาค่าของ $\sqrt{\frac{2y-x}{5}}$

3.



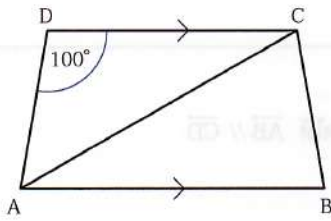
จากรูป กำหนดให้ $\widehat{ACD} = (2x + y)^\circ$ และ $\widehat{DCE} = (2x - y)^\circ$
จงหาค่าของ x และ y

4.



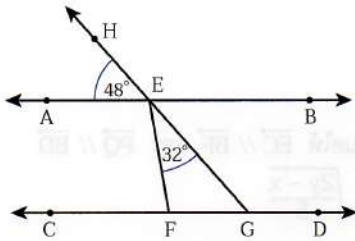
จากรูป กำหนดให้ $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน
 $\widehat{ABC} = (x + 55)^\circ$, $\widehat{BCE} = (3x + 25)^\circ$ และ
 $\widehat{BAD} = (2y - 5)^\circ$ จงหาค่าของ x และ y

5.



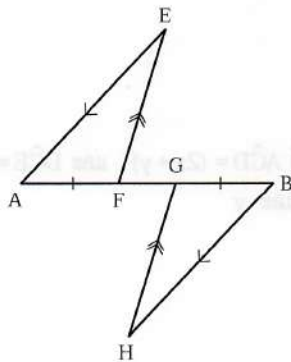
จากรูป กำหนดให้ $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มี $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$,
 $\widehat{ACD} = (2x + y)^\circ$, $\widehat{CAD} = (5x + y)^\circ$ และ
 $\widehat{BAC} = (5x - y)^\circ$ จงหาค่าของ x และ y

6.



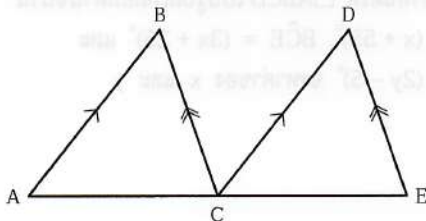
จากรูป กำหนดให้ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$
 มี $\widehat{CFE} = (2x + 2y)^\circ$ และ $\widehat{DGE} = (5y - 8)^\circ$
 จงหาค่าของ x และ y

7.



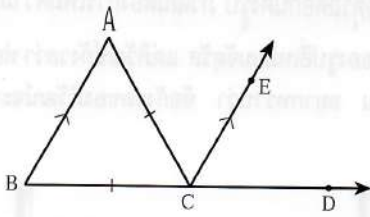
จากรูป กำหนดให้ $\overline{AE} \parallel \overline{HB}$, $\overline{FE} \parallel \overline{HG}$ และ $AF = BG$
 อยากทราบว่า $FE = GH$ เพราะเหตุใด

8.



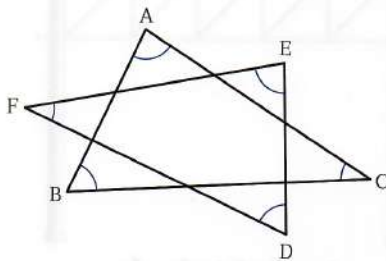
จากรูป กำหนดให้ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $\overline{CB} \parallel \overline{ED}$ และ C เป็น
 จุดกึ่งกลางของ \overline{AE} จงแสดงว่า $\triangle ABC \cong \triangle CDE$

9.



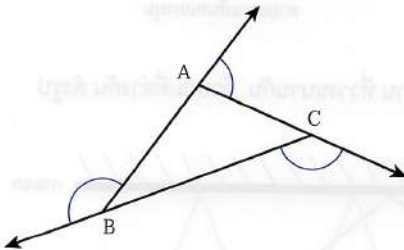
จากรูป กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มี $AC = BC$ และ $\overline{CE} \parallel \overline{BA}$
 \overline{CE} แบ่งครึ่ง \widehat{ACD} หรือไม่ เพราะเหตุใด

10.



จากรูป จงแสดงว่า ผลบวกของ \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} , \hat{D} , \hat{E} และ \hat{F} ของรูปดาวหกแฉกนี้ เท่ากับ 360°

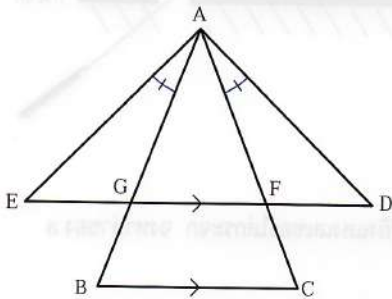
11.



จากรูป กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ จงพิสูจน์ว่า ขนาดของมุมภายนอกของ $\triangle ABC$ รวมกันเท่ากับ 360°

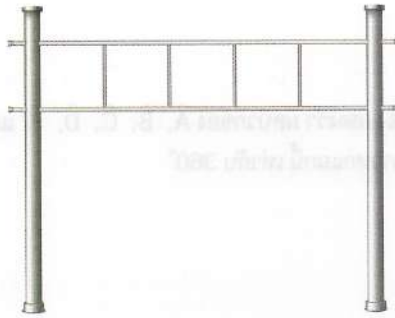
12. ผลรวมของขนาดของมุมภายนอกของรูป n เหลี่ยม เท่ากับกี่องศา

13.

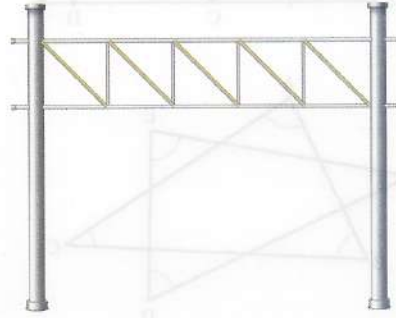


กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มี \overline{BC} เป็นฐาน $\overline{BC} \parallel \overline{ED}$ และ $\widehat{BAE} = \widehat{CAD}$ จงพิสูจน์ว่า $AE = AD$

14. โครงเหล็กสำหรับแขวนป้ายโครงหนึ่งประกอบด้วยรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสต่อกันดังรูป ภาวิณต้องการเพิ่มความแข็งแรงของโครงเหล็กนี้ จึงนำท่อนเหล็กมาเชื่อมตามแนวเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส แต่ภาวิณกังวลว่า ท่อนเหล็กที่นำมาเชื่อมจะเรียงตัวไม่ขนานกัน ทำให้โครงเหล็กไม่สวยงาม อยากทราบว่า ข้อกังวลของภาวิณจะเป็นจริงหรือไม่ เพราะเหตุใด

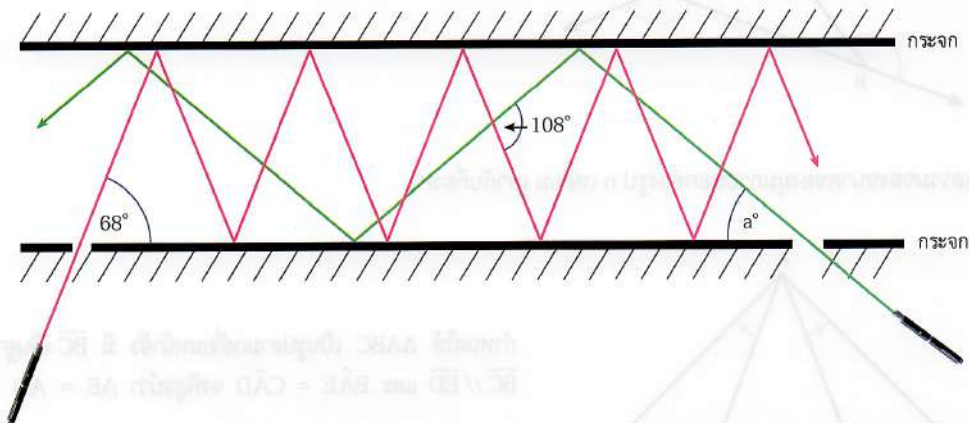


โครงเหล็กก่อนนำเหล็กมาเชื่อมตามแนวเส้นทแยงมุม



โครงเหล็กหลังนำเหล็กมาเชื่อมตามแนวเส้นทแยงมุม

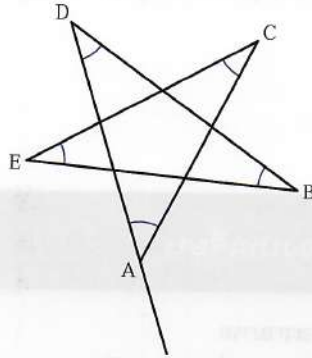
15. นารายิงเลเซอร์ 2 ลำแสง จากด้านล่างของกระจกเงาราบ 2 บาน ที่วางขนานกัน ด้วยมุมที่ต่างกัน ดังรูป



ถ้ากระจกสะท้อนแสงเลเซอร์ออกมาเป็นมุมที่มีขนาดเท่ากับมุมที่ยิงแสงเลเซอร์ใส่กระจก จงหาค่าของ a

16. เกลวห้าแฉกสามารถสร้างขึ้นด้วยการสานสอดและหักดกโดยใช้ดกเพียงเส้นเดียว คล้ายกับการเขียนรูปดาวห้าแฉกที่สามารถเขียนได้อย่างต่อเนื่องโดยไม่ยกปากกา

สำหรับรูปดาวห้าแฉก ดังรูป อยากรบว่า $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} + \hat{E}$ เท่ากับกี่องศา



เกร็ดน่ารู้

เผลว (ฉะ-หลว) เป็นเครื่องจักสานชนิดหนึ่ง ทำด้วยดกหักขัดกันเป็นมุม มีหลายรูปแบบ ตามความเชื่อแล้ว ชาวบ้านใช้เผลวเป็นเครื่องแสดงสิ่งหวงห้าม หรือเพื่อป้องกันภูตผี สิ่งชั่วร้าย เช่น ปักที่หม้อยาป้องกันคนขำ หรือป้องกันภูตผีขำหม้อยา ซึ่งจะทำใหยาเสื่อมคุณภาพ ใช้ปักไว้ที่ประตูบ้านหรือบันไดป้องกันสิ่งชั่วร้ายเข้าบ้าน ใช้ปักใน ثناเพื่อเป็นสิริมงคลในโอกาสทำขวัญแม่โพสพ หรือในวันแรกของการดำนาเพื่อให้ข้าวกล้าในนาอุดมสมบูรณ์

