Beispiel 1

a) Die Funktion K ordnet jedem Zeitpunkt x in Monaten das Kapital auf dem Konto zu.
Geben Sie die Funktionsgleichung der Funktion K an!
Faktor: 1,015
Dauer, auf die sich der Faktor bezieht: 12 Monate
Anfangswert: 750€
$$K(x) = 750 \cdot 1{,}015^{\frac{x}{12}}$$
b) Berechnen Sie das Kapital zum Zeitpunkt 3 Jahre!
$$K(3 \cdot 12) = 784{,}2588$$
c) Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem das Kapital auf 800€ angewachsen ist.
$$K(x) = 800 | CAS$$
$$x \approx 52{,}0171$$
Nach ca. 52 Monaten, das sind 4 Jahre und 4 Monate, ist das Kapital auf 800€ angewachsen.
Alternative:
$$K(x) = 800$$
$$750 \cdot 1{,}015^{\frac{x}{12}} = 800 | \div 750$$
$$1{,}015^{\frac{x}{12}} = \frac{800}{750} | \log_{1{,}015}$$
$$\frac{x}{12} = \log_{1{,}015} \frac{800}{750} | \cdot 12$$
$$x = 12 \cdot \log_{1{,}015} \frac{800}{750} \approx 52{,}0171$$
d) Das Kapital soll bereits nach 3,5 Jahren auf 800€ angewachsen sein.
Bestimmen Sie den Zinssatz!
$$750 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{3{,}5} = 800 | CAS$$
$$p \approx 1{,}8611$$

Der Zinssatz müsste ca. 1,86% betragen.
Alternative:

$$750 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{3,5} = 800 | \div 750$$

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{3,5} = \frac{800}{750} | \uparrow \frac{1}{3,5}$$

$$1 + \frac{p}{100} = \left(\frac{800}{750}\right)^{\frac{2}{7}} | - 1$$

$$\frac{p}{100} = \left(\frac{800}{750}\right)^{\frac{2}{7}} - 1 | \cdot 100$$

$$p = \left(\left(\frac{800}{750}\right)^{\frac{2}{7}} - 1\right) \cdot 100 \approx 1,8611$$

Beispiel 2

Auf einem See wird am Tag 0 festgestellt, dass auf der Wasseroberfläche ca. 1000 Wasserlinsen sind.

Am Tag 20 wird die Zahl der Wasserlinsen auf 2500 geschätzt.

Wasserlinsen vermehren sich über einen langen Zeitraum exponentiell.

a) Geben Sie eine Funktionsgleichung an, die jedem Zeitpunkt t in Tagen die Anzahl der Wasserlinsen auf dem See zuordnet.
Faktor: $\frac{2500}{1000} = 2,5$
Zeit, auf den sich der Faktor bezieht: 20 Tage
Startwert: 1000

$$W(t) = 1000 \cdot 2,5^{\frac{t}{20}}$$

b) Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem nur eine Wasserlinse auf dem See war.

$$W(t) = 1$$

$$1000 \cdot 2,5^{\frac{t}{20}} = 1 | \div 1000$$

$$2{,}5^{\frac{t}{20}} = \frac{1}{1000} \mid \log_{2,5}$$
$$\frac{t}{20} = \log_{2,5}\frac{1}{1000} \mid \cdot 20$$
$$t = 20 \cdot \log_{2,5}\frac{1}{1000} \approx -151$$

151 Tage bevor man die 1000 Wasserlinsen auf dem Teich entdeckt hat, war die erste Wasserlinse auf den Teich gekommen.

c) Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Anzahl der Wasserlinsen sich verdoppelt haben.

$$W(t) \cdot 2 = W(t + \Delta t)$$
$$2 \cdot 1000 \cdot 2{,}5^{\frac{x}{20}} = 1000 \cdot 2{,}5^{\frac{x+\Delta t}{20}} \mid \div 1000 \cdot 2{,}5^{\frac{x}{20}}$$
$$2 = \frac{1000 \cdot 2{,}5^{\frac{x+\Delta t}{20}}}{1000 \cdot 2{,}5^{\frac{x}{20}}} = 2{,}5^{\frac{x+\Delta t}{20}-\frac{x}{20}} = 2{,}5^{\frac{\Delta t}{20}}$$
$$\log_{2,5} 2 = \frac{\Delta t}{20}$$
$$20 \cdot \log_{2,5} 2 = \Delta t$$
$$\Delta t \approx 15{,}1294$$

Die Zahl der Wasserlinsen verdoppelt sich ca. alle 15,1294 Tage.