AULA: Superfícies Quádricas

Definição 1: Uma equação geral do $2^{\underline{0}}$ grau em três variáveis é uma equação do tipo:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0 \qquad \text{(I)},$$

com pelo menos uma das constantes A, B, C, D, E ou F é diferente de zero.

Definição 2: Uma superfície cuja equação é do tipo (I) é chamada de ***superfície quádrica***.

Obs: A interseção de uma superfície quádrica com um dos planos coordenados ou por planos paralelos a eles é uma cônica. Em casos particulares, a interseção pode ser uma reta, duas retas, um ponto ou o conjunto vazio. Esses casos constituem as cônicas degeneradas.

Através de uma rotação e/ou translação de eixos a equação (I) pode assumir uma das seguintes formas:

(II) $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = D$ (quádricas cêntricas)

$$(III)\begin{cases} Ax^2 + By^2 = Cz \\ Ax^2 + Bz^2 = Cy \\ Ay^2 + Bz^2 = Cx \end{cases} \quad \text{(quádricas não cêntricas)}$$

<u>**Quádricas Cêntricas**</u>: $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = D$

Se as constantes A, B, C e D são não nulas, podemos escrever a equação (II) na forma canônica: $\pm\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1$ (IV), com a,b e c números reais positivos.

Se todos os sinais são negativos então o lugar geométrico da equação é vazio. Logo, existem três possibilidades: todos os sinais são positivos, dois sinais positivos e um negativo ou um positivo e dois negativos.

A) Todos os sinais positivos: <u>**Elipsóide**</u>: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Características:

1) A superfície é simétrica em relação a todos os eixos coordenados, a todos os planos coordenados e a origem.

2) Se duas das constantes a, b e c são iguais temos um elipsóide de revolução.

3) Interseções com os eixos coordenados:

- ✓ Eixo Ox : $A\left(\pm a,0,0\right)$
- ✓ Eixo Oy: $B\left(0,\pm b,0\right)$
- ✓ Eixo Oz: $C\left(0,0,\pm c\right)$

4) Traços sobre os planos coordenados: elipses

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ z=0 \end{cases} , \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ y=0 \end{cases} , \quad \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ x=0 \end{cases}$$

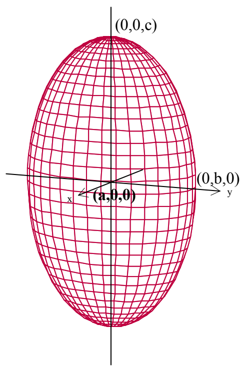
5) Seções por planos paralelos aos planos coordenados:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{k^2}{c^2} \\ z=k \end{cases}$$, elipses para -c < k < c.

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{k^2}{b^2} \\ y=k \end{cases}$$, elipses para -b < k < b

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{k^2}{a^2} \\ x=k \end{cases}$$, elipses para -a < k < a.

Esboço da superficie:



B) Dois sinais positivos e um negativo: **Hiperbolóide de uma folha**:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ (a = b, superfície de revolução),}$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ (a = c, superfície de revolução),}$$

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ (b = c, superfície de revolução).}$$

Características:

1) A superfície é simétrica em relação a todos os eixos coordenados, a todos os planos coordenados e a origem.

2) A superfície está ao longo do eixo coordenado correspondente à variável cujo coeficiente é negativo na forma canônica de sua equação.

Analisando a equação: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

3) Interseções com os eixos coordenados:

- ✓ Eixo Ox : A$(\pm a,0,0)$
- ✓ Eixo Oy: B$(0,\pm b,0)$
- ✓ Eixo Oz: não existe

4) Traços sobre os planos coordenados:

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases} \text{ (Elipse) },\quad \begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\\ y=0\end{cases} \text{ (Hipérbole)}$$

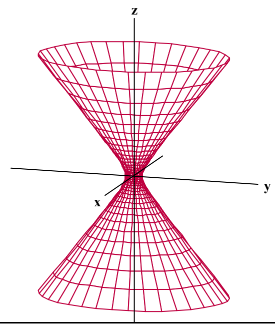
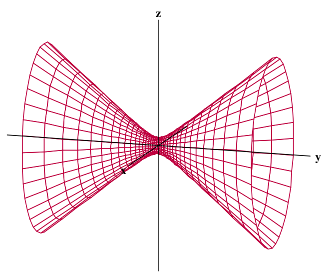
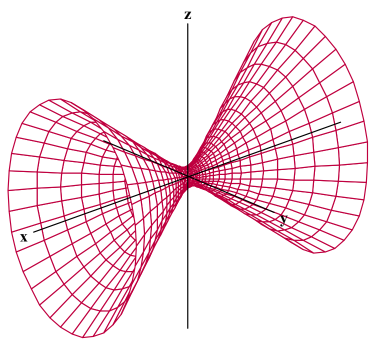
$$\begin{cases}\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\\ x=0\end{cases} \text{ (Hipérbole)}$$

5) Seções por planos paralelos aos planos coordenados:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 + \dfrac{k^2}{c^2} \\ z = k \end{cases}$$, elipses para qualquer k em R,

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 - \dfrac{k^2}{b^2} \\ y = k \end{cases}$$, hipérboles ,
$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 - \dfrac{k^2}{a^2} \\ x = k \end{cases}$$, hipérboles

Esboço da superficie:

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$	
$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$	
$-\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$	

B) Dois sinais negativos e um positivo: **Hiperbolóide de duas folhas**:

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$ (a = b, superfície de revolução),

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$ (a = c, superfície de revolução),

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$ (b = c, superfície de revolução),

Características:

1) A superfície é simétrica em relação a todos os eixos coordenados, a todos os planos coordenados e a origem.

2) A superfície está ao longo do eixo coordenado correspondente à variável cujo coeficiente é positivo na forma canônica de sua equação.

Analisando a equação: $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

3) Interseções com os eixos coordenados:

- ✓ Eixo Ox : não existe
- ✓ Eixo Oy: não existe
- ✓ Eixo Oz: $C(0,0,\pm c)$

4) Traços sobre os planos coordenados:

$$\begin{cases}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases}$$ (vazio) , $$\begin{cases}-\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\\ y=0\end{cases}$$ (Hipérbole)

$$\begin{cases}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\\ x=0\end{cases}$$ (Hipérbole)

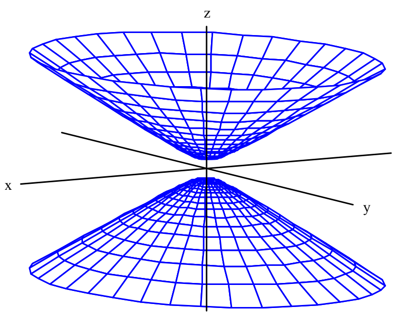
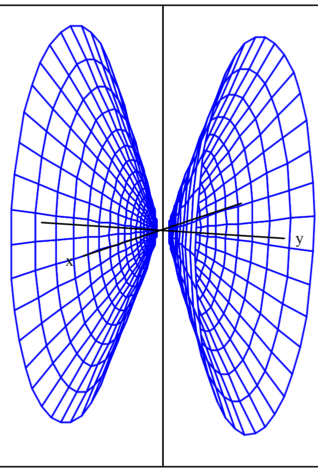
5) Seções por planos paralelos aos planos coordenados:

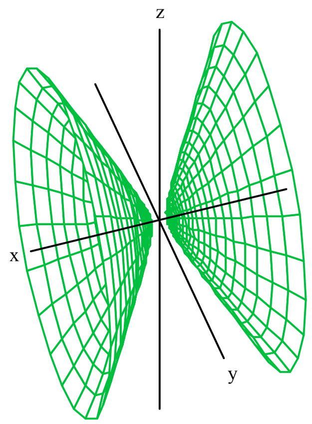
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{k^2}{c^2}-1 \\ z=k \end{cases}$$, elipses para k < -c ou k > c

$$\begin{cases} -\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1+\dfrac{k^2}{b^2} \\ y=k \end{cases}$$, hipérboles , $\forall k \in R$,

$$\begin{cases} -\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1+\dfrac{k^2}{a^2} \\ x=k \end{cases}$$, hipérboles $\forall k \in R$

Esboço da superficie:

$-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$	
$-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$	

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	

<u>Quádricas não Cêntricas</u>: $(III)\begin{cases} Ax^2 + By^2 = Cz \\ Ax^2 + Bz^2 = Cy \\ Ay^2 + Bz^2 = Cx \end{cases}$

Se as constantes A, B e C são não nulas, podemos escrever as equações (II) nas formas canônicas: $\begin{cases} \pm\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = cz \\ \pm\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{z^2}{b^2} = cy \\ \pm\frac{y^2}{a^2} \pm \frac{z^2}{b^2} = cx \end{cases}$ (IV), com a,b números reais positivos e c real não nulo.

Temos duas possibilidades: os coeficientes dos termos de $2^{\underline{0}}$ grau têm sinais iguais ou contrários.

A) os coeficientes dos termos de $2^{\underline{0}}$ grau têm sinais iguais: **Parabolóide elíptico**.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = cy$, $\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = cx$.

Características:

1) Se a = b temos um parabolóide de revolução.
2) A interseção da superfície com os eixos coordenados é O(0,0,0).
3) A superfície se encontra ao longo do eixo correspondente à variável do primeiro grau na forma canônica da equação.

Analisando a equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz$ (c > 0)

4) Observe que para c > 0 temos que z ≥ 0. Logo, a superfície se encontra inteiramente acima do plano xy.

5) A superfície é simétrica em relação ao eixo Oz, aos planos xz e yz.

6) Traços sobre os planos coordenados:

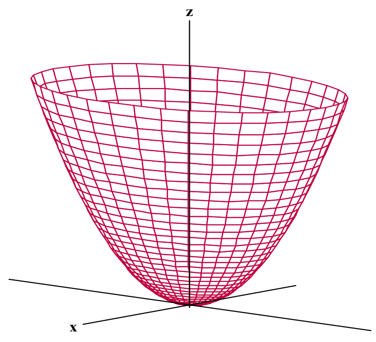
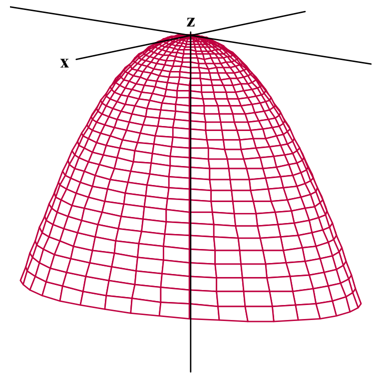
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \\ z = 0 \end{cases} = (0,0,0)\,, \qquad \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} = cz \\ y = 0 \end{cases} \text{ (parábola)}, \qquad \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} = cz \\ x = 0 \end{cases} \text{ (parábola)}$$

7) Seções por planos paralelos aos planos coordenados:

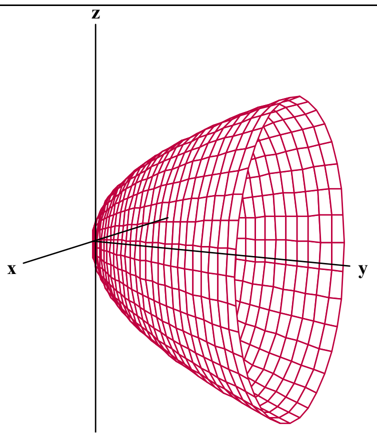
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = ck \\ z = k \end{cases} \text{, elipses para } k > 0.$$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} = cz - \frac{k^2}{b^2} \\ y = k \end{cases} \text{, parábolas} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} = cz - \frac{k^2}{a^2} \\ x = k \end{cases} \text{, parábolas.}$$

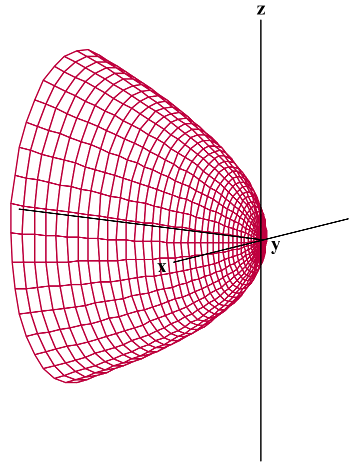
Esboço da superficie:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz$ (c > 0)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz$ (c < 0)
	

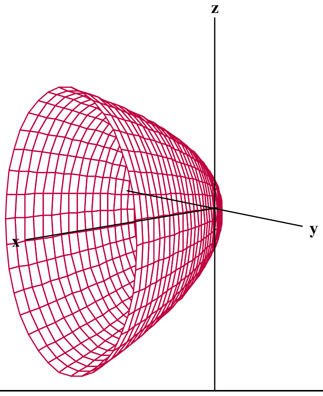
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=cy \quad (c>0)$$



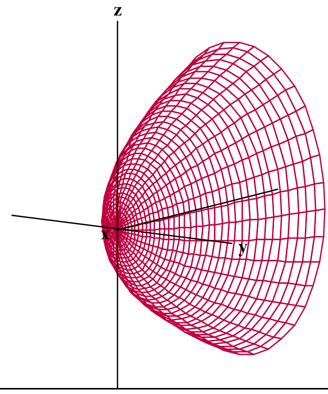
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=cy \quad (c<0)$$



$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=cx \quad (c>0)$$



$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=cx \quad (c<0)$$



B) os coeficientes dos termos de 2º grau têm sinais contrários:

Parabolóide hiperbólico (sela)

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz\,,\ -\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=cy\,,\ -\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=cx\,.$$

Características:

1) A interseção da superfície com os eixos coordenados é O(0,0,0).
2) A superfície se encontra ao longo do eixo correspondente à variável do primeiro grau na forma canônica da equação.

Analisando a equação $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz$ (c > 0).

3) A superfície é simétrica em relação ao eixo Oz, aos planos xz e yz.

4) Traços sobre os planos coordenados:

$$\begin{cases} -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0 \\ z=0 \end{cases} = \begin{cases} \left(\frac{y}{b}-\frac{x}{a}\right)\left(\frac{y}{b}+\frac{x}{a}\right)=0 \\ z=0 \end{cases}$$, par de retas concorrentes

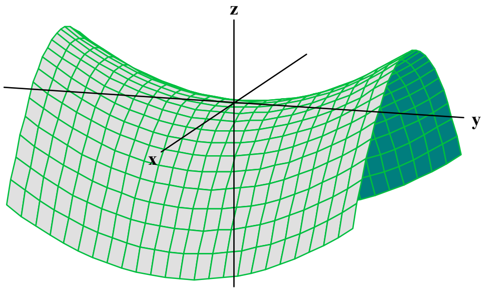
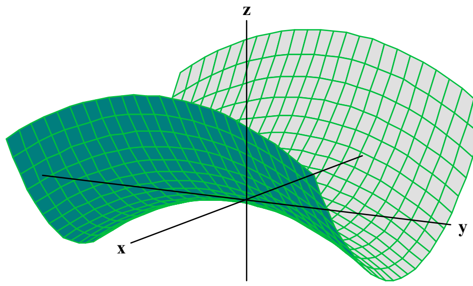
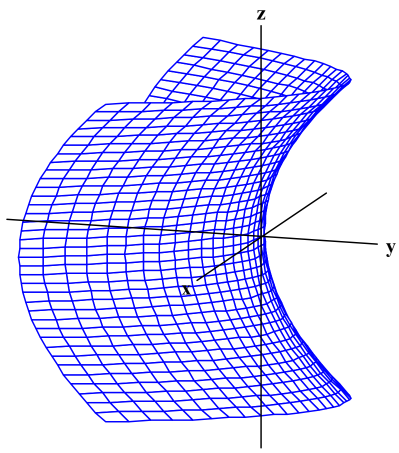
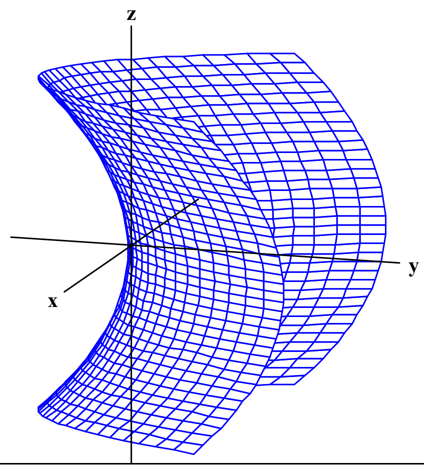
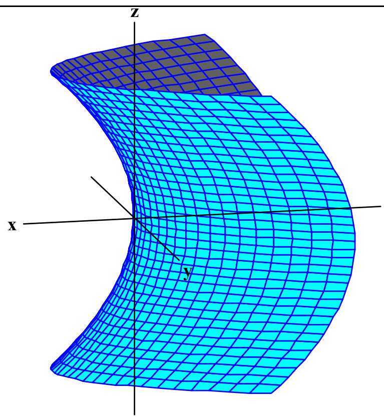
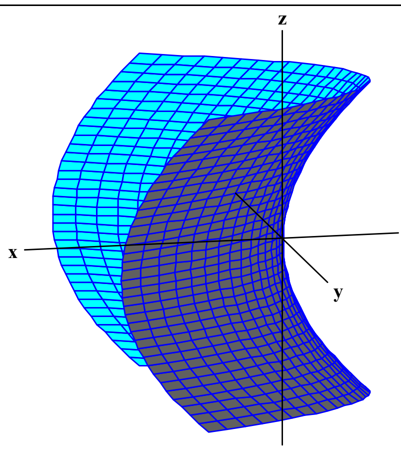
$$\begin{cases} -\frac{x^2}{a^2}=cz \\ y=0 \end{cases}$$ (parábola), $$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2}=cz \\ x=0 \end{cases}$$ (parábola)

5) Seções por planos paralelos aos planos coordenados:

$$\begin{cases} -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=ck \\ z=k \end{cases}$$, hipérboles para k $\neq$ 0. Para k > 0, hipérboles no plano z = k, com o eixo focal paralelo ao eixo Oy e para k < 0, hipérboles no plano z = k, com o eixo focal paralelo ao eixo Ox.

$$\begin{cases} -\frac{x^2}{a^2}=cz-\frac{k^2}{b^2} \\ y=k \end{cases}$$, parábolas e $$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2}=cz+\frac{k^2}{a^2} \\ x=k \end{cases}$$, parábolas.

Esboço da superficie:

$-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=cz\quad (c>0)$	$-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=cz\quad (c<0)$
	
$-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=cy\quad (c>0)$	$-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=cy\quad (c<0)$
	
$-\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=cx\quad (c>0)$	$-\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=cx\quad (c<0)$
	

Bibliografia:

Lehmann. Charles, Geometria Analítica, Editora Globo

Boulos, Paulo, Geometria Analítica um tratamento vetorial, MAKRON Books.