# DES NOMBRES

Benjamin-M.Bart@ac-orleans-tours.fr Thomas.Lenne@ac-orleans-tours.fr Benjamin-G.Maraton@ac-orleans-tours.fr

Problème : https://www.geogebra.org/m/hmsguyc5

# Classer ces nombres

## (Dissocier le nombre de ses représentations)

$\frac{1,2}{7}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{4}{2}$ $0,999999...$ $0,3$ $\frac{1}{16}$ $-1$

$\frac{161}{28}$ $\frac{5}{10}$ $1,66666667$ $1$ $-\frac{58}{1000}$

$\frac{120}{10}$ $\sqrt{4}$ $1,666666...$ $-7$ $3,14$ $\frac{1}{3}$ $0$

$-0,25$ $12\ 651$ $13$ $\frac{25}{4}$ $0,3333...$

$5,75$ $\frac{3}{7}$ $\frac{\pi}{2}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sqrt{0,25}$ $\frac{22}{7}$

$0,1231231...$ $-\sqrt{2}$

Benjamin-M.Bart@ac-orleans-tours.fr Thomas.Lenne@ac-orleans-tours.fr Benjamin-G.Maraton@ac-orleans-tours.fr

# Ensembles

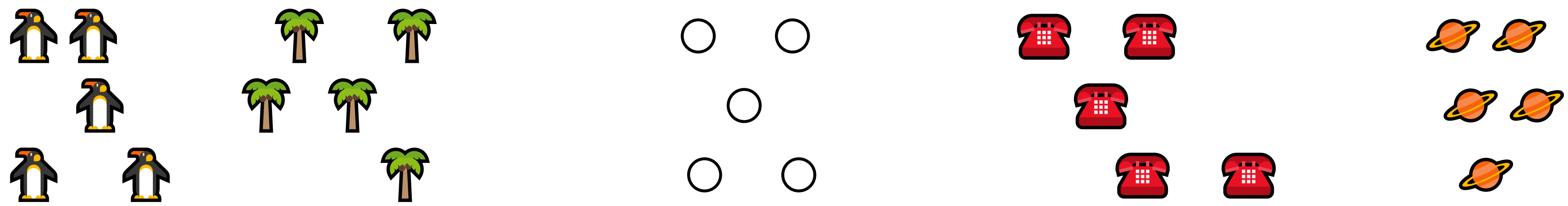
## ℕ : Les entiers naturels

Les entiers naturels sont les nombres : 0, 1, 2, 3, 4, . . .


### *Pourquoi faire ?*

• Compter les objets, les troupeaux, les individus. Les premières traces de comptage connues sont les os entaillés des chasseurs du paléolithique (environ 15 000 avant J.C.)

• Abstraction du point commun entre toutes les collections de $n$ objets éventuellement de nature différente.



Benjamin-M.Bart@ac-orleans-tours.fr Thomas.Lenne@ac-orleans-tours.fr Benjamin-G.Maraton@ac-orleans-tours.fr

# Ensembles

## ℕ : Les entiers naturels

Les entiers naturels sont les nombres : 0, 1, 2, 3, 4, . . .


### *Propriétés des entiers naturels.*

• Chaque nombre entier possède un successeur.

• Cet ensemble possède un plus petit élément « 0 ».

• Entre deux entiers naturels quelconques, il n’existe qu’un nombre fini d’entiers. On dit que l’ensemble ℕ est un ensemble *discret*.

• Plus un entier naturel comporte de chiffres, plus il est grand.

• Seules deux opérations sont *toujours* possibles dans cet ensemble : l’addition et la multiplication.

• Tout entier naturel peut se décomposer de façon unique en produit de facteurs premiers.

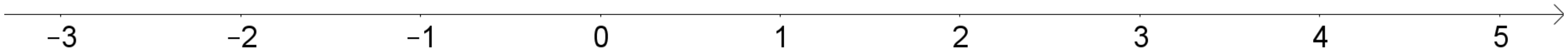
Benjamin-M.Bart@ac-orleans-tours.fr Thomas.Lenne@ac-orleans-tours.fr Benjamin-G.Maraton@ac-orleans-tours.fr

# Ensembles

## ℤ (de l’allemand « zählen »): Les nombres entiers dits relatifs

Cet ensemble contient les entiers naturels ainsi que leur opposé :

-…, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, …




***Pourquoi faire ?***

- Au VIIème siècle, Les nombres négatifs étaient utilisés en Inde pour le commerce par opérations sur trois sortes de nombres appelés "biens", "dettes" et "zéro".
- Ils sont restés longtemps ignorés, voire méprisés. Les mathématiciens ne commencent à travailler avec qu'au XVème siècle, et ils les appellent *numeri absurdi* (les nombres absurdes).
- Ce n'est qu'au XIXème siècle que l'utilisation des nombres relatifs devient courante.
- Le mathématicien allemand Friedrich GAUSS a été l'un des premiers occidentaux à essayer d'en formuler une définition : dans son idée, c'était 'des marches' entre les entiers (par exemple −5 est la marche pour aller de 7 à 2).

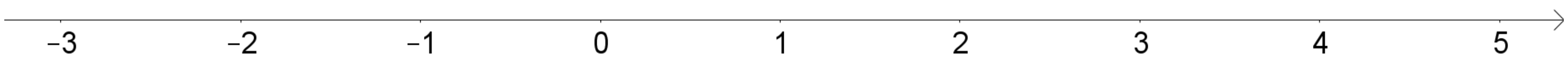
Benjamin-M.Bart@ac-orleans-tours.fr Thomas.Lenne@ac-orleans-tours.fr Benjamin-G.Maraton@ac-orleans-tours.fr

# Ensembles

## ℤ (de l'allemand « zählen »): Les nombres entiers dits relatifs

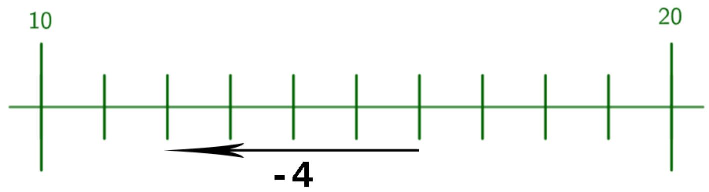
Cet ensemble contient les entiers naturels ainsi que leur opposé :

-…, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, …




### ***Propriétés des entiers relatifs.***

- Dans cet ensemble, la soustraction est toujours possible.
- On la considère par ailleurs comme une addition. Soustraire revient à ajouter l'opposé : $16 - 4 = 16 + (-4)$



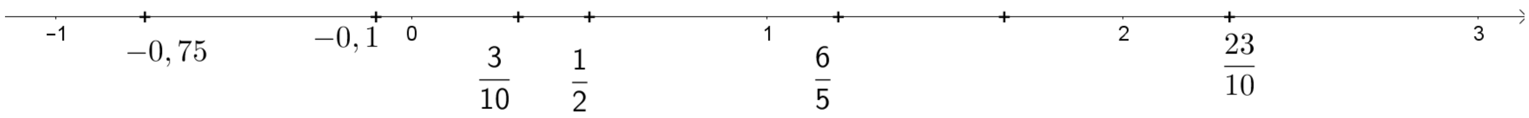

- Les entiers naturels sont relatifs. $4 = -(-4)$

Benjamin-M.Bart@ac-orleans-tours.fr Thomas.Lenne@ac-orleans-tours.fr Benjamin-G.Maraton@ac-orleans-tours.fr

# Ensembles

## $\mathbb{D}$ : Les nombres décimaux

- Un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction décimale.




### ***Pourquoi faire ?***

- Pour pallier à l'insuffisance des entiers et pouvoir mesurer plus précisément.
- Pour approcher tout nombre d'aussi près que l'on veut.
- Leur écriture à virgule (apportée très tard, au XVIème siècle par Simon Stévin), facilite les calculs par technique opératoire, essentiellement pour le commerce.
- Ci-dessous : Notation décimale selon Stévin de $19 + \frac{1}{10} + \frac{7}{100} + \frac{8}{1000} = 19{,}178$

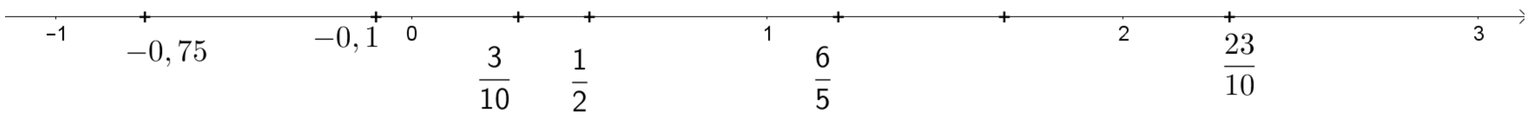
19⓪1①7②8③

Benjamin-M.Bart@ac-orleans-tours.fr Thomas.Lenne@ac-orleans-tours.fr Benjamin-G.Maraton@ac-orleans-tours.fr

# Ensembles

## $\mathbb{D}$ : Les nombres décimaux

- Un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction décimale.




### ***Propriétés des nombres décimaux***

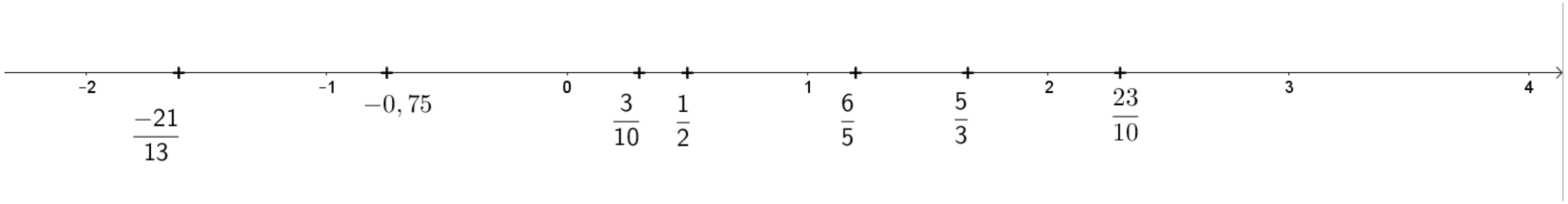
- Les entiers sont décimaux : $5 = \frac{50}{10}$, $-4 = -\frac{4}{1}$
- Toute fraction irréductible, dont la décomposition du dénominateur en facteurs premiers ne contient que des puissances de 2 ou de 5 est un nombre décimal.
- Exemple : $\frac{15}{8} = \frac{15}{2^3} = \frac{15 \times 5^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{1875}{1000} = 1{,}875$
- La notion de successeur n'a ici pas de sens : Entre $14{,}25$ et $14{,}26$, on peut intercaler une infinité de nombres décimaux.

Benjamin-M.Bart@ac-orleans-tours.fr Thomas.Lenne@ac-orleans-tours.fr Benjamin-G.Maraton@ac-orleans-tours.fr

# Ensembles

## $\mathbb{Q}$ : Les nombres rationnels

- Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction $\frac{a}{b}$ de deux entiers $a$ et $b$ premiers entre eux.




### ***Pourquoi faire ?***

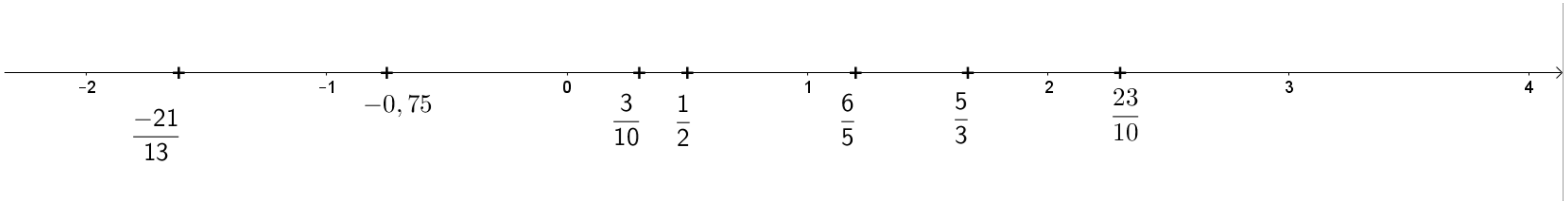
- Pour pallier à l'insuffisance des entiers et pouvoir mesurer plus précisément.
- Pour exprimer des proportions, des rapports de grandeurs.
- Pour les Grecs, et notamment pour les Pythagoriciens, il ne pouvait pas exister d'autres nombres que les nombres rationnels : tout nombre, toute longueur s'exprimait forcément comme le ratio de nombre entiers positifs.

Benjamin-M.Bart@ac-orleans-tours.fr Thomas.Lenne@ac-orleans-tours.fr Benjamin-G.Maraton@ac-orleans-tours.fr

# Ensembles

## $\mathbb{Q}$ : Les nombres rationnels

- Un nombre rationnel est un nombre qui peut s’écrire sous la forme d’une fraction $\frac{a}{b}$ de deux entiers $a$ et $b$ premiers entre eux.




### ***Propriétés des nombres rationnels***

- Les quatre opérations arithmétiques sont toujours possibles dans cet ensemble.
- Les entiers et les décimaux sont rationnels : $0{,}75 = \frac{3}{4}$
- Les rationnels admettent une représentation décimale illimitée (voir ci-dessous).

Benjamin-M.Bart@ac-orleans-tours.fr Thomas.Lenne@ac-orleans-tours.fr Benjamin-G.Maraton@ac-orleans-tours.fr

# Ensembles

## $\mathbb{Q}$ : Les nombres rationnels

### ***Rationnels et écritures décimales***

Un nombre rationnel admet une représentation décimale :

- Finie s'il est décimal : $\frac{1}{16} = 0{,}0625$
- Illimitée et alors nécessairement périodique :

$$0{,}333\ldots = \frac{1}{3}$$

$$0{,}999\ldots = 3 \times 0{,}333\ldots = 3 \times \frac{1}{3} = 1$$

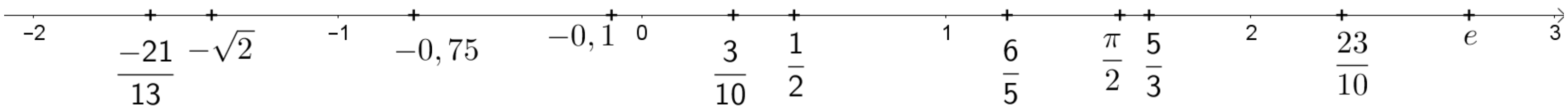
$$\frac{22}{7} = 3{,}14285714\ldots$$

Benjamin-M.Bart@ac-orleans-tours.fr Thomas.Lenne@ac-orleans-tours.fr Benjamin-G.Maraton@ac-orleans-tours.fr

# Ensembles

## • $\mathbb{R}$ : Les nombres réels

En mathématiques, un nombre réel est un nombre qui peut être représenté par une partie entière et une liste finie ou infinie de décimales.




***Pourquoi faire ?***

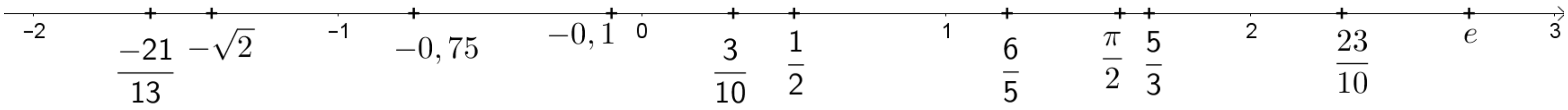
- Les nombres réels sont utilisés pour représenter n'importe quelle mesure physique.
- Pour pallier à l'insuffisance des rationnels.
- Exemple : Il n'existe pas de nombre rationnel permettant d'exprimer la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1. Cette longueur est égale à $\sqrt{2}$ qui est un nombre irrationnel.

Benjamin-M.Bart@ac-orleans-tours.fr Thomas.Lenne@ac-orleans-tours.fr Benjamin-G.Maraton@ac-orleans-tours.fr

# Ensembles

## • $\mathbb{R}$ : Les nombres réels

En mathématiques, un nombre réel est un nombre qui peut être représenté par une partie entière et une liste finie ou infinie de décimales.



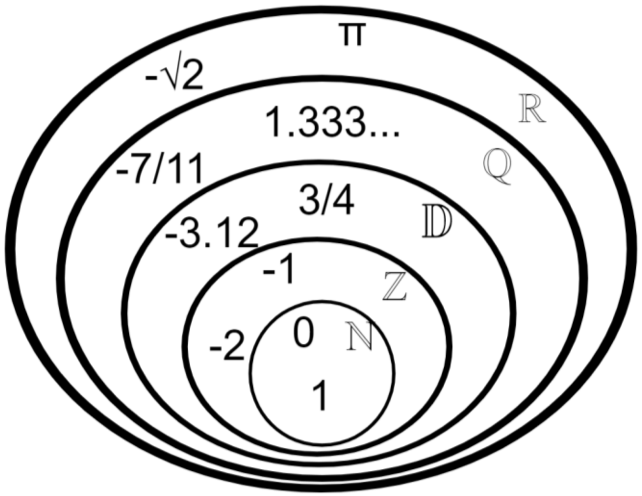

***Propriétés des nombres réels***

- Cet ensemble contient tous les ensembles précédents.
- La droite graduée est une représentation de $\mathbb{R}$. A chaque point de la droite correspond un unique réel.

Benjamin-M.Bart@ac-orleans-tours.fr Thomas.Lenne@ac-orleans-tours.fr Benjamin-G.Maraton@ac-orleans-tours.fr

# Ensembles

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$




- Un entier est décimal : $1 = \frac{10}{10}$
- Un entier relatif est rationnel : $-2 = \frac{-8}{4}$
- Un rationnel peut être entier : $\frac{5}{1} = 5$
- …
- Tous ces nombres sont des réels.

Benjamin-M.Bart@ac-orleans-tours.fr Thomas.Lenne@ac-orleans-tours.fr Benjamin-G.Maraton@ac-orleans-tours.fr

# Quelques repères de scolarité( non exhaustifs)

| | Ecole | Collège | Lycée |
|---|---|---|---|
| **Entiers naturels** | -Dénombrement<br>-Mesure | | |
| **Entiers relatifs** | -Sauts sur la droite graduée | -Opérations sur les relatifs, notion d'opposé. | -Equations Diophantiennes (On cherche des solutions entières d'équations). |
| **Décimaux** | -Fractions décimales.<br>-Ecriture à virgule,<br>-Mesure. | -Pourcentages.<br>-Valeur approchée.<br>-Ecriture scientifique. | |
| **Rationnels** | -Fractions.<br>-Proportions.<br>-Mesure. | -Quotient, coefficient de proportionnalité.<br>-Ordre des rationnels<br>-Opérations sur les fractions | |
| **Réels** | -La droite graduée montre que tous les nombres rencontrés font partie du même ensemble. | -Racines carrées, $\pi$ | -Intervalles<br>-Passage du discret au continu.<br>-Fonction exponentielle de base $e$<br>-Irrationnalité de $\sqrt{2}$ |

Certains élèves abordent au lycée les nombres dits complexes ou imaginaires. Cet ensemble, noté $\mathbb{C}$ contient l'ensemble des nombres réels.

Benjamin-M.Bart@ac-orleans-tours.fr Thomas.Lenne@ac-orleans-tours.fr Benjamin-G.Maraton@ac-orleans-tours.fr