Jak animovat pohyb planety v GeoGebře

4. Odvození Keplerovy rovnice

Žán Pól Kastról

26. července 2022

https://www.geogebra.org/m/m3q5cd4r

1 Odvození Keplerovy rovnice

Chceme-li v GeoGebře animovat nerovnoměrný pohyb planety kolem Slunce, musíme znát v daném čase t polohu planety na elipse. Poloha planety je dána, jak víme z minulé kapitoly, pěti souřadnicemi x_P, y_P, r, φ, E. Víme také, že vhodné jsou poslední dvě, protože každou z nich je již poloha planety určena jednoznačně.

My se nyní pokusíme najít vztah mezi *excentrickou anomálií* E a časem t. Ideální by byl vzorec ve tvaru

$$\boxed{E = f(t)} \tag{1}$$

Díky takovému vzorci bychom pro libovolný čas t mohli vypočítat souřadnice x_P, y_P, které jsou dány parametrickými rovnicemi

PREL 2. $(E \to x; y)$

$$x = a\cos E \tag{2}$$

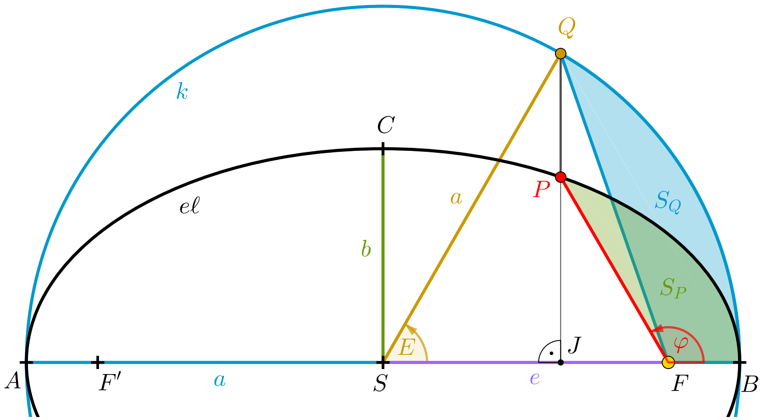
$$y = b\sin E \qquad E \in \langle 0; 2\pi) \tag{3}$$

a mohli bychom tak rovnou animovat pohyb planety. Podaří se nám to?

Základní myšlenka našeho postupu je založena na:

- Methodě **stlačení kružnice**, které jsme podrobně rozebrali při odvození výše uvedených parametrických rovnic.
- Využití 2. Keplerova zákona o **konstantní plošné rychlosti**.

Čummež na obrázek 1. Je zde naznačeno stlačení kružnice k, která se stane elipsou $e\ell$ (viz „**Aplet 1: Methoda stlačení kružnice**“ v odkazu u obrázku). Bod Q se stane bodem P a jeho kartézské souřadnice jsou dány rovnicemi (2) a (3). Poměr stlačení, jak víme, je $\frac{b}{a}$.



Obr. 1: Methoda stlačení kružnice v elipsu – ploška S_Q přejde v plošku S_P.

https://www.geogebra.org/m/wtt84y9e

Teď do toho vneseme konečně pohyb. Planeta P obíhá **nerovnoměrně** po elipse $e\ell$ kolem Slunce F proti směru hodinových ručiček.

Pomocný bod Q se celou dobu pohybuje spolu s P po kružnici k tak, že je stále na kolmici k hlavní ose „nad ním“ nebo „pod ním“. Jeho pohyb je taktéž **nerovnoměrný**.

Zvolme čas $t = 0$ ve chvíli, kdy jsou oba body v *perihéliu* B. Pak se oddělí a sejdou se opět v *aféliu* A, pak se opět oddělí a znovu se sejdou v B a tak dále.

V obrázku vidíme situaci v určitém nenulovém čase t. Průvodič PF planety P opsal plošku S_P. Průvodič QF bodu Q současně opsal plošku S_Q. Protože poměr stlačení je $\frac{b}{a}$, musí platit:

$$\frac{S_P}{S_Q} = \frac{b}{a}$$

a odtud

$$S_P = \frac{b}{a} \cdot S_Q \tag{4}$$

Určení plochy S_P pomocí 2. Keplerova zákona:

Plochu uraženou průvodičem PF za čas t můžeme vyjádřit pomocí **plošné rychlosti** w takto (plocha je plošná rychlost krát čas):

$$S_P = w \cdot t \tag{5}$$

Z 2. Keplerova zákona však víme, že pro planetu je plošná rychlost konstantní:

$$w = konst$$

Připomňme si, že tuto konstantu snadno získáme tak, že si uvědomíme, že za jednu periodu T opíše průvodič planety plochu celé elipsy, která je rovna πab[1]. Proto platí (plošná rychlost je plocha dělená časem):

$$w = \frac{\pi ab}{T} \tag{6}$$

Dosazením (6) do (5) dostáváme:

$$S_P = \frac{\pi ab}{T} \cdot t \tag{7}$$

Určení plochy S_Q z geometrie:

Z obr. 1 vidíme, že plochu S_Q dostaneme jako rozdíl plochy kruhové výseče BSQ a plochy trojúhelníka FSQ.

Vzpomeňme si, že plochu výseče můžeme počítat pomocí vzorce pro obsah trojúhelníka (polovina součinu základny a výšky), kdy za základnu vezmeme délku oblouku výseče BQ a výškou je poloměr výseče a. Přitom délka oblouku BQ je rovna (vzorec „es je fír") $E \cdot a$ (bacha, úhel E musí být v radiánech!), takže dostáváme

$$S_{BSQ} = \frac{1}{2} E a^2 \tag{8}$$

[1]Pro kružnici, která je elipsou s $a = b$ dostáváme známý vzorec $S = \pi a^2$.

Pro plochu ΔFSQ zřejmě platí (základna e, výška $a \sin E$)

$$S_{FSQ} = \frac{1}{2} \cdot e \cdot a \sin E = \frac{1}{2} \varepsilon a^2 \sin E \tag{9}$$

Odečtením (8) a (9) dostáváme:

$$S_Q = S_{BSQ} - S_{FSQ} = \frac{1}{2} E a^2 - \frac{1}{2} \varepsilon a^2 \sin E$$

Odtud po vytknutí:

$$S_Q = \frac{1}{2} a^2 (E - \sin E) \tag{10}$$

Nyní dosadíme (7) a (10) do (4):

$$\frac{\pi a b}{T} \cdot t = \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{2} a^2 (E - \sin E)$$

Vidíme, že a, b se vykrátí a dostáváme

Keplerova rovnice

$$\boxed{\frac{2\pi}{T} \cdot t = E - \sin E} \tag{11}$$

Tuto rovnici odvodil a řešil Kepler (1609 – *Astronomia Nova*[2] a také 1621 – *Epitome Astronomiae Copernicanae*[3]), takže se jí říká **Keplerova rovnice**[4].

Kontrola:

Pojďme si udělat pro jistotu kontrolu, zda naše rovnice sedí aspoň v *perihéliu* B a v *aféliu* A.

V bodě B víme, že $t = 0$ a $E = 0$. Dosazením do levé a pravé strany naší rovnice vidíme, že zkouška vychází.

[2] https://www.e-rara.ch/zut/content/pageview/162861
[3] https://www.e-rara.ch/zut/content/pageview/956468
[4] `https://en.wikipedia.org/wiki/Kepler%27s_equation`

V bodě A je $t = \frac{T}{2}$ a levá strana dává hodnotu π. Do pravé strany dosadíme $E = \pi$ a máme $\pi - 0 = \pi$, takže to vyšlo i zde. Naše dosavadní odvozování by tedy mohlo být OK.

Tak jdeme dále. Teď už zbývá jen z **rovnice** (11) vyjádřit **neznámou** E, čímž dostaneme závislost E na čase t, jak jsme si vytýčili na začátku (chceme vzorec typu $E = f(t)$).

Zklamání:

A sakra! Ono to nejde… Jedná se o *transcendentní rovnici*[5], která obecně není exaktně řešitelná, což je právě náš případ. Problém je tom, že E se vyskytuje nejen uvnitř funkce sinus, ale také vně[6]. Tato rovnice se dá řešit jen (přibližnými) numerickými methodami. Naštěstí si s tím (z hlediska modelování pohybu planety) nemusíme dělat hlavu, pač GeoGebra tyto methody ovládá a udělá to za nás.

2 Střední anomálie

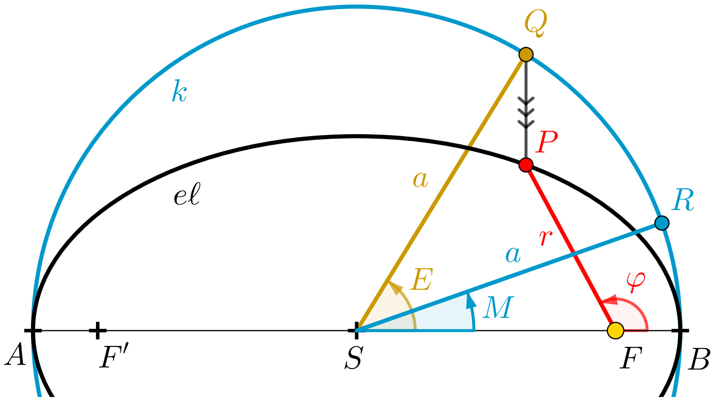
Pojďme se nyní zaměřit na levou stranu Keplerovy rovnice. Výraz na levé straně Keplerovy rovnice by nám měl něco připomínat. Vzpomeňme si na vztahy pro **rovnoměrný pohyb po kružnici** ($\mathcal{RPPK}$). Výraz $\frac{2\pi}{T}$ je přece **úhlová rychlost** ω rovnoměrného pohybu nějakého bodu R po kružnici s periodou T a úhlová rychlost krát čas musí být **fáze** pohybujícího se bodu, tedy **úhel**, který bod opíše za čas t. Označíme-li tento úhel M, můžeme tedy psát:

$$\boxed{M = \frac{2\pi}{T} \cdot t} \tag{12}$$

Představme si, že tento bod R se pohybuje po stejné kružnici (hlavní kružnice naší elipsy) jako pomocný bod Q (viz obr. 2). Potom v čase

[5] https://cs.wikipedia.org/wiki/Transcendentní_rovnice

[6] Kdyby E bylo jen uvnitř sinu, byla by to jednoduchá goniometrická rovnice, kterou bychom řešili pomocí *inverzní finkce* arkus sinus.



Obr. 2: Střední anomálie M.

https://www.geogebra.org/m/pwt5zpqy

$t = 0$ všechny tři body P, Q, R splývají v perihéliu B, pač úhly φ, E, M jsou zde nulové.

Všechny 3 body se opět sejdou po uběhnutí jedné periody T v *perihéliu* B. Rozdíl je v tom, že zatímco P (skutečná planeta) a Q (pomyslná planeta) se pohybují **nerovnoměrně**, pohyb bodu R (další pomyslná planeta) je **rovnoměrný**.

Úhlu M bodu R se proto říká výstižně **střední anomálie** planety (a označení M je zřejmě z anglického *mean*).

V apletu můžeme pohybovat bodem Q a ověřit si, že všechny 3 body P, Q, R se sejdou také v *aféliu* A. Dále z apletu vidíme, že v okolí B je planeta P rychlá, proto body P, Q předbíhají rovnoměrně se pohybující bod R. Ten je však začne opět dohánět, pač planeta vzdalující se od *perihélia* zpomaluje. Za *aféliem* A se to prohodí a vede naopak bod M, ale P, Q ho opět dohoní v *perihéliu*.

3 Graf Keplerovy rovnice

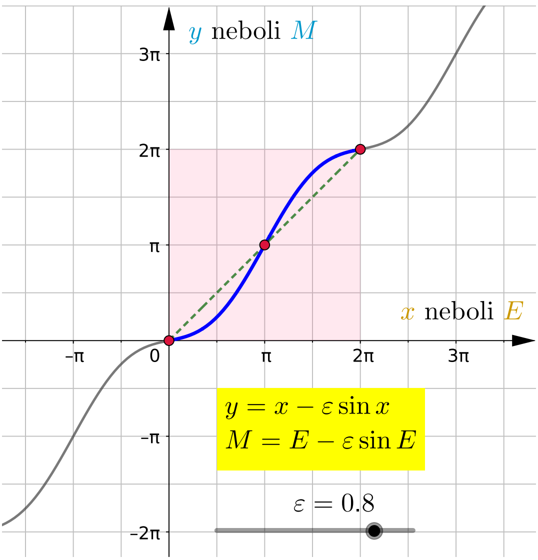
Keplerovu rovnici můžeme nyní, po zavedení *střední anomálie* M, psát v pěkném tvaru:

Keplerova rovnice

$$M = E - \varepsilon \sin E \tag{13}$$

Na tuto rovnici se můžeme dívat jako na funkci s předpisem:

$$y = x - \varepsilon \sin x \tag{14}$$



Obr. 3: Graf Keplerovy rovnice.

https://www.geogebra.org/m/pejffarm

Její graf máme v obr. 3. Je to takovej zvlněnej do-kopec. Nás zajímá x, tedy E, jen v intervalu $\langle 0; 2\pi)$. Vidíme, že potom y, tedy M, je rovněž jen z intervalu $\langle 0; 2\pi)$.

Všimněme si, že v Keplerově rovnici od E odečítáme číslo $\varepsilon \sin E$, které je v intervalu $(0; \pi)$ kladné, takže E se tím zmenší a v intervalu $(\pi; 2\pi)$ záporné, takže E se tím zvětší. Tomu odpovídá prohnutí modrého grafu dolů nebo nahoru pod čárkovanou čáru. Je to v souladu s tím, co už víme, že bod R se nejprve za bodem Q opožďuje, a pak ho předbíhá.

Červeně vyznačené body grafu odpovídají *periheliu* a *aféliu*, kde se všechny tři body P, Q, R vždy sejdou.

V apletu (viz odkaz v obrázku 3) vidíme krástně, jak se se změnou ε mění i prohnutí křivky grafu. Čím je relativní excentricita ε menší, tím je prohnutost grafu menší, elipsa je podobnější kružnici a její pohyb se přibližuje rovnoměrnému pohybu.

Δ

Da Sista Les

∞