Juan David Ospina
A00362954
Ecuaciones diferenciales

Resuelva los problemas de valor inicial dados en las preguntas 21 a 26.

24. $2y^{(3)} - 3y'' - 2y' = 0;\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1,\ y''(0) = 3$

24) Acordemos que para poder resolver EDO Homogeneas lineales de orden superior con coeficientes constantes de la forma

$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} \dots + a_3 y^{(3)} + a_2 y^{(2)} = 0$.

1) Esta ecuacion tiene por solucion $y = e^{rx}$, $y' = re^{rx}$, $y'' = r^2 e^{rx}$

2) siempre debemos encontrar la ecuacion auxiliar que es de la forma

$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} \dots + a_3 r^3 + a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0$

3) Hay y teoremas que depende de como den las raices se usan

Juan David Ospina
A00362954
Ecuaciones diferenciales

El Primer teorema: las raíces son reales y distintas

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + C_3 e^{r_3 x}$$

El Segundo teorema: las raíces es real pero con multiplicidad K

$$y(x) = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx} + C_3 x^2 e^{rx} + C_k x^{k-1} e^{rx}$$

El tercer teorema: cuando una raíz es compleja $r = a \pm bi$

$$y(x) = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \operatorname{sen} bx)$$

El cuarto teorema: cuando ~~una~~ la raíz es compleja $r = a \pm bi$ con multiplicidad K

$$y(x) = e^{ax}(C_1 \cos bx + d_1 \operatorname{sen} bx) + e^{ax} x (C_2 \cos bx + d_2 \operatorname{sen} bx) + e^{ax} x^2 (C_3 \cos bx + d_3 \operatorname{sen} bx)$$

—— // —— // —— // ——

$2y^{(3)} - 3y'' - 2y' = 0 \longrightarrow$ Es una EDO lineal de orden superior 3 homogenea con coeficientes constantes

Procedemos a sacar la ecuación auxiliar

$$2r^3 - 3r^2 - 2r = 0$$

$$\left.\begin{aligned} r(2r^2 - 3r - 2) &= 0 \\ (r + 1/2)\, r\, (r - 2) &= 0 \end{aligned}\right\} \text{factorizamos para poder sacar las raíces}$$

PVI: $y(0) = 1$

$y'(0) = -1$

$y''(0) = 3$

$r_1 = -1/2 \quad r_2 = 0 \quad r_3 = 2$

Juan David Ospina
A00362954
Ecuaciones diferenciales

- Teniendo en cuenta el primer teoremas presentado anteriormente donde la r son reales y distintas ~~llegan~~ llegue a la siguiente solucion general

$$\boxed{\bullet\ y(x) = Ae^{-1/2x} + Be^{0 \cdot x} + Ce^{2 \cdot x}}$$

Procedemos a derivar la expresion de arriba para poder despues ingresarlo en el PVI

$$y(x) = Ae^{-1/2x} + B + Ce^{2x}$$
$$y'(x) = -\tfrac{1}{2}Ae^{-1/2x} + 2Ce^{2x}$$
$$y''(x) = \tfrac{1}{4}Ae^{-1/2x} + 4Ce^{2x}$$

Al ingresar los PVI en las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} y(0) = 1 \longrightarrow A + B + C = 1 \\ y'(0) = -1 \longrightarrow -\tfrac{1}{2}A + 2C = -1 \\ y''(0) = 3 \longrightarrow \tfrac{1}{4}A + 4C = 3 \end{array}\right\}$$

Al resolver lo de arriba hallamos que: $A = 4,\ B = -7/2,\ C = 1/2$

$$\boxed{y(x) = -\tfrac{7}{2} + 4e^{-\frac{1}{2}x} + \tfrac{1}{2}e^{2x}} \longrightarrow \text{solucion particular}$$

Juan David Ospina
A00362954
Ecuaciones diferenciales

$$2y^{(3)} - 3y'' - 2y' = 0$$

Podemos cambiar los PVI y ver como nos afecta a la solucion particular

$y(0) = 5 \longrightarrow A + B + C = 5$
$y'(0) = -10 \longrightarrow -\frac{1}{2}A + 2C = -10$
$y''(0) = 0 \longrightarrow \frac{1}{4}A + 4C = 0$

En este punto reemplace el PVI en las ecuaciones encontradas anteriormente

Este es un cambio pequeño en donde solo nos afecta en la y.

Para no hacer tan extenso la resolucion de esta ecuacion realice las operaciones con matrices y al final me dio como resultado $A=16$, $B=-10$, $C=-1$

$$y(x) = -10 + 16e^{-1/2x} - 1e^{2x}$$

Juan David Ospina
A00362954
Ecuaciones diferenciales

Este no es el caso Pero donde las raíces fueran repetidas la sol. general sería totalmente distinta

Suponiendo que $r_1 = r_2 = r_3 = 1$

Tomaríamos en cuenta el segundo teorema y la solución sería

$$\boxed{\bullet\; y(x) = Ae^{1\cdot x} + Bxe^{1\cdot x} + Cx^2e^{1\cdot x}}$$

En este problema podemos ver dependiendo de que situacion se debe usar cual teorema para poder dar la solucion general. Y si tenemos PVI para dar la solucion particular.

En este caso para poder representar de forma rápida el segundo teorema hice la suposición de que las tres raíces daban igual. Pero realmente por los datos dados por el problema no es posible las tres raíces iguales a menos que sea modificado totalmente el problema.