

Verloop van veeltermfuncties beschrijven

www.karelappeltans.be

August 6, 2021

1 algoritme

Doe de volgende stappen om een goede schets van een functie f te krijgen:

1. Bepaal het domein
2. Wat zijn de limieten als $x \rightarrow \pm\infty$
3. Kan je een soort symmetrie herkennen?
4. Bepaal de nulpunten van $f(x)$ en het snijpunt met de y -as
5. Bepaal de afgeleiden f' en f'' , zoek hiervan de nulpunten. Maak hiervan een teken tabel
6. Schets de grafiek op basis van je bevindingen.

2 domein en nulpunten en symmetrie

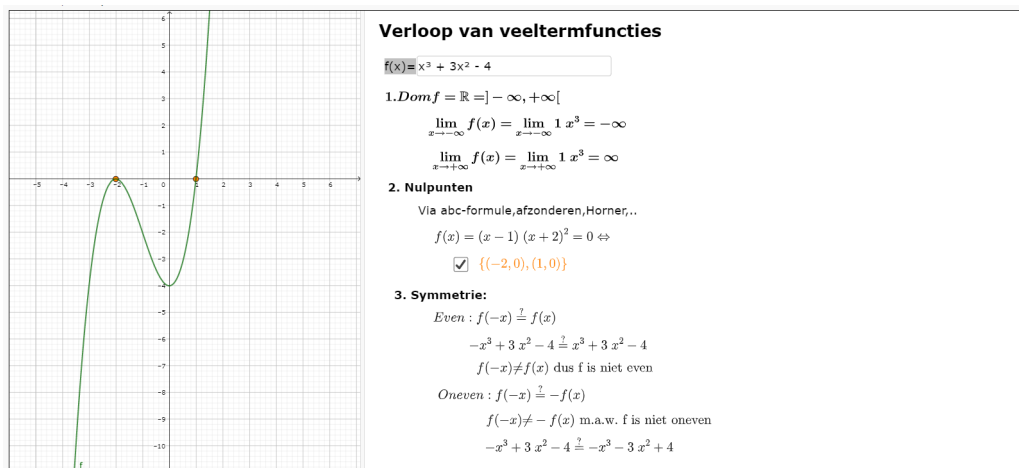


Figure 1: <https://www.geogebra.org/m/ugbwcz4m>

Alle technieken om veeltermvergelijkingen op te lossen kunnen hier herhaald worden:

<https://www.geogebra.org/m/Y7qJRUQf>

3 afgeleide

$f(x) = -2x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 7x - 8$
 $f'(x) = -2 \cdot 4x^3 + 5 \cdot 3x^2 - 3 \cdot 2x^1 + 7$
 $f'(x) = -8x^3 + 15x^2 - 6x + 7$

$f(x) = \sqrt{x} \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
 $f(x) = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Figure 2: <https://www.geogebra.org/m/zdynkwv5>

4 Verloop

Verloop van veeltermfunctie

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$

Bepaal nulpunten van $f'(x)$ en $f''(x)$:

$f'(x) = 3x^2 + 6x = 0 \quad f''(x) = 6x + 6 = 0$
 $\Leftrightarrow 3x(x+2) = 0 \quad \Leftrightarrow 6(x+1) = 0$
 $x = 0 \text{ of } x = -2 \quad x = -1$

Bepaal tekenverloop

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f''(x)$	-	-	0	+	+
$f(x)$	$-\infty$	rel max	bp	rel min	$+\infty$
		0	-2	-4	

Duid 'speciale punten' aan:

- snijpunt y-as: (0,-4)
- np: x=-2 en x=1
- extrema/bp (-2,0), (-1,-2) en (0,-4)

Schets de grafiek:

- schets de grafiek

Figure 3: <https://www.geogebra.org/m/ugbwcz4m>

willekeurige veeltermfunctie:

Verloop veeltermfuncties

$f(x) = x^3$

Tekenverloop:

Nulpunten 1e afgeleide:

$f'(x) = 3x^2 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 0$
 $x = 0$

Nulpunten 2e afgeleide:

$f''(x) = 6x = 0 \Leftrightarrow 6x = 0$
 $x = 0$

Samenvattende tabel:

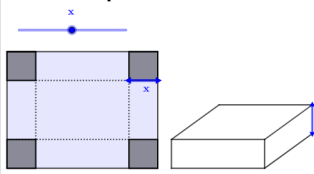
x	0
$f'(x)$	+ 0 +
$f''(x)$	- 0 +
$f(x)$	f bp \rightarrow

Toon punten uit tabel

Figure 4: <https://www.geogebra.org/m/ugbwcz4m>

5 extremumproblemen

Extremumprobleem:



Uit een rechthoekig stuk karton van 8 cm op 5 cm worden in de hoeken kleine gelijke vierkanten weggesneden. Daarna wordt de karton tot een bakje gebogen. Voor welke afmetingen is de inhoud van het bakje maximaal? Hoeveel bedraagt deze maximale inhoud?

Stap 1: schets + keuze onbekende(n)
Neem x lengte weggesneden vierkant

Stap 2: Druk alle onbekenden in functie van 1 onbekende uit. Gebruik hiervoor het gegeven (gegeven is een rechthoekig stuk karton van 8 op 5)
 $l = 8 - 2x$
 $b = 5 - 2x$
 $h = x$

Stap 3: Vertaal het gevraagde max of min naar een wiskundige functie van de gekozen onbekende
Inhoud = $l \times b \times h$
 $f(x) = (8 - 2x)(5 - 2x)x$
 $f(x) = (8 - 2x)(5x - 2x^2)$
 $f(x) = 4x^3 - 26x^2 + 40x$

Stap 4: Bereken de afgeleide en bepaal het extremum
 $f'(x) = 12x^2 - 52x + 40 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 13x + 10 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{10}{3}, 1$

x	1	$\frac{10}{3}$	
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	↗	↘	↗

Het rode gedeelte van de teken tabel ligt niet in het praktisch domein: $b = 5 - 2x > 0$ of $2x < 5$ of $x < 2.5$

Stap 5: Geef het antwoord op de gestelde vragen.
De inhoud is maximaal als $x = 1$
 $h = 1$
 $b = 3$
 $l = 6$
De maximale inhoud bedraagt dan 18 cm³

Figure 5: <https://www.geogebra.org/m/gceq8KGM>

6 functievoorschriften opstellen

Functievoorschriften opstellen:

Voorbeeld:
Bepaal een veeltermfunctie van de derde graad met de volgende kenmerken:
de punten $P(1,4)$ en $P(2,2)$ behoren tot de grafiek
in het $P(1, f(1))$ is er een horizontale raaklijn
Er is een bp voor $x=1$

Oplissing:
veeltermfunctie derde graad:
 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ met a, b, c en d te bepalen
 $f(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
 $f'(x) = 6ax + 2b$

De voorwaarden worden hiernaast in het CAS-venster ingevuld
Vervolgens het stelsels oplossen (eventueel met rref)

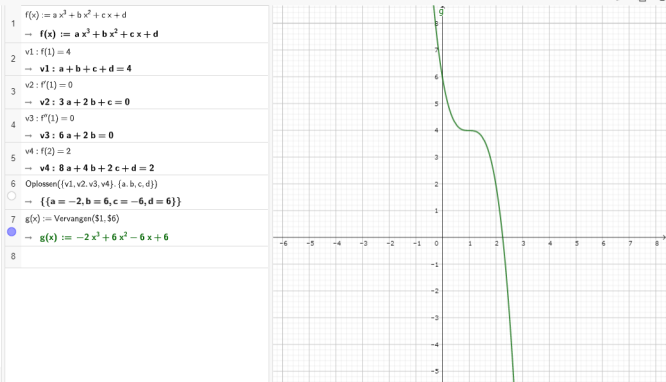


Figure 6: <https://www.geogebra.org/m/ugbwcz4m>

7 voorschriften met parameter

Bespreek het verloop van de veeltermfuncties in functie van de reële parameter m

1. $f : x \mapsto -x^2 + mx - 8$

8 oefeningen

1. Bepaal het verloop van

(a) $f(x) = 6x^4 - 16x^3 + 2x^2$

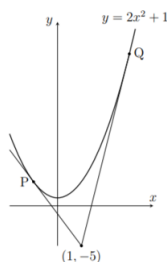
(b) $f(x) = x^3 + mx^2$

2. Een balk heeft een vierkant als grondvlak. Alle ribben samen hebben een lengte van 100 cm. Bepaal de afmetingen zodat de inhoud maximaal is.

3. Bepaal de maximale oppervlakte van een rechthoek waarvan de hoekpunten op de x -as en op de parabool $y = 3 - x^2$ liggen en symmetrisch t.o.v. y -as.

4. Bepaal het punt op de parabool $y^2 = 2x$ dat het dichtste bij het punt $P(1,4)$ ligt.

5. Zij P het punt op de grafiek van $f(x) = x^5 - x^2$ met $x = 1$. Bepaal het punt Q op de grafiek van $f(x)$ zodat de raaklijnen in P en Q loodrecht op elkaar staan.
6. Bij de grafiek van een derdegraadsfunctie met toppen A en B en buigpunt C geldt $x_C = \frac{x_A + x_B}{2}$. Toon dit aan.
7. De buigraaklijn van de grafiek van $f(x) = x^3 - 4x^2 + a$ gaat door de oorsprong. Bereken a.
8. $f(x) = x^3 + x^2 - (2m - 1)x$ met m een reële parameter
 - (a) Voor welke waarde van m geldt dat de raaklijn aan de grafiek van f in het punt P(1,f(1)) als rico 1 heeft
 - (b) Voor welke waarden van m heeft f geen extrema
 - (c) Voor welke waarden van m snijdt de grafiek van f de x-as in drie verschillende punten?
9. $f(x) = kx^3 - (k + 1)x^2 + (2 - k)x - k$ heeft een minimum voor $x = 1$ als
 - (a) $k > 0$
 - (b) $0 < k < 1$
 - (c) $k > \frac{1}{2}$
 - (d) $k < 3$
 - (e) voor alle waarden van k
10. Bepaal de vergelijkingen van de getekende raaklijnen



11. Bepaal a zodat de raaklijnen in $x = a$ en $x = a + 1$ aan $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$ evenwijdig zijn
12. de grafieken van de functies f e g met $f(x) = x^2 + ax + b$ en $g(x) = (2x^2 - 6)^3$ raken elkaar in het punt P met x-coördinaat 2. Bepaal de waarde van a en b
13. Bepaal een veeltermfunctie van de derde graad die voldoet aan
 - $x=0$ en $x=-3$ zijn nulpunten
 - P(3,-6) is een relatief maximum
14. Bepaal een veeltermfunctie van de derde graad die voldoet aan
 - P(0,4) is een relatief maximum
 - P(1,0) is een buigpunt
15. Bepaal een veeltermfunctie van even vierde graad die voldoet aan
 - $x=0$ en $x=3$ zijn nulpunten
 - rico van de raaklijn voor $x=3$ is -48

9 taken

1. verloop van veeltermfuncties
2. extremumproblemen