

9 Reciprocitat

9.1 Monge. Reciprocitat polar

9.2 Reciprocitat. Figures simples

9.3 Reciprocitat. Rankine

9.4 Reciprocitat. Rankine

9.5 Reciprocitat. Cremona

9.6 Reciprocitat. Cremona

9.7 Reciprocitat. Cremona. Teòric

S'ha triat una part de l'estudi anomenat 'Una estàtica recíproca' editat a la revista de l'Associació de Consultors d'Estructures ACE el desembre del 2019 per parlar en aquestes aplicacions sobre geometria estructural.

Es diu que una figura és recíproca d'una altra quan entre les dues es pot establir una relació biunívoca de relacions o propietats.

9.1 Reciprocitat. Monge. Reciprocitat polar

Gaspard Monge (1746-1818) en la *Géométrie Descriptive* de 1798 parla d'un concepte molt interessant, la 'Reciprocitat polar' (fig. 9.1). Si es té una circumferència de centre C i des d'una recta qualsevol es llancen des dels punts P, Q... tangents a la circumferència, i unim els punts de tangència amb rectes, aquestes es troben en un sol punt R i es dona que la prolongació de la recta C-R és perpendicular a la recta original. Si els punts P, Q... estan a la polar de R, recíprocament, R està a la polar dels punts P, Q...

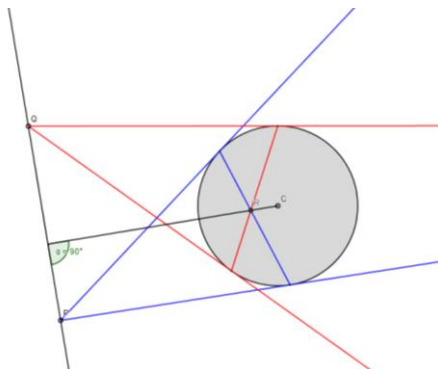


Fig. 9.1

9.2 Reciprocitat. Figures simples

El conjunt de dues figures recíproques més elemental és el triangle o una figura composta per triangles (fig. 9.2). Cada triangle té un recíproc format per un punt on es troben tres rectes. I al contrari.

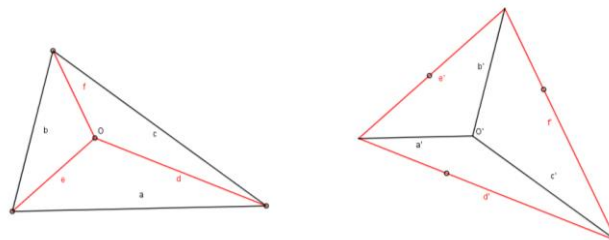


Fig. 9.2

9.3 Reciprocitat. Rankine

Rankine -William John Macquorn Rankine (1820-1872) fa una proposta reciprocista conceptualment semblant a la que fa Cremona però de forma abstracta, amb poca aplicació pràctica, i almenys ens els papers que ens han arribat, presentant els problemes al contrari d'allò a què estem acostumats.

Suposem tres forces formant un triangle en equilibri F_1 , F_2 i F_3 (fig. 9.3). Es tracta de forces abstractes desvinculades de qualsevol estructura. Des d'un punt qualsevol O tracem les línies a , b i c als vèrtex del triangle de forces. Si per reciprocitat tracem paral·leles a aquestes línies tindrem el triangle a' , b' i c' . Si transformem aquest triangle en una estructura composta per barres indeformables, situada en el pla i de nusos articulats, aplicant-li les forces F''_1 , F''_2 i F''_3 de tal forma que F'_1 , a i b formin per reciprocitat F''_1 , a' i b' , i el mateix amb les forces F_2 i F_3 , tindrem que l'estructura a' , b' , i c' estarà en equilibri, atès que F_1 , F_2 i F_3 també ho estan. Hem aplicat la reciprocitat tant a la geometria com a les forces. Els esforços que aquestes forces produeixen a les barres de l'estructura F_a , F_b i F_c són les distàncies, a escala de forces, de les línies a , b , i c . Quant al signe de les sol·licitacions a l'estructura mirem, per exemple, el triangle F'_1 , a , b que es transforma per reciprocitat en el punt F''_1 , a' , b' . El sentit de F'_1 ens donarà el de F_b i el de F_a . En aquest cas, la barra a' es troba comprimida i la b' traccionada¹. Igual podem operar amb les altres barres.

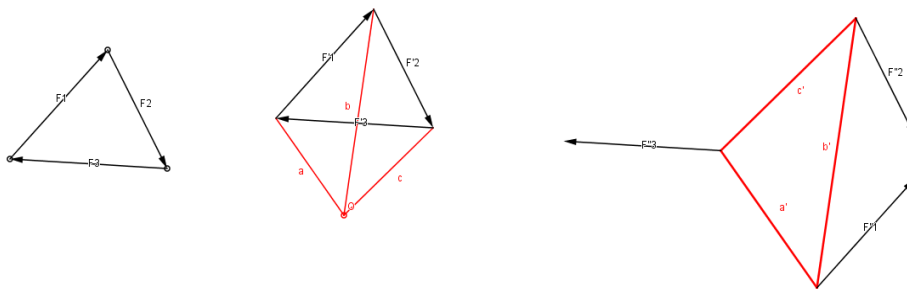


Fig. 9.3

9.4 Reciprocitat. Rankine

Si volem generalitzar les teories de Rankine, considerem una estructura composta per barres $l_1...l_6$ en el pla i amb nusos articulats (fig. 9.4). Si des d'un punt qualsevol O tracem paral·leles als costats de l'estructura, tindrem la primera reciprocitat, atès que en el punt O es troben les línies $l'_1...l'_6$. Entre dues línies amb vèrtex comú de l'estructura, per exemple, l'_1 i l'_2 i que en el polígon recíproc s'identifiquen com l'_1 i l'_2 , tanquem el triangle amb una força qualsevol com F_1 . Efectivament, F_1 , l'_1 i l'_2 formen una figura recíproca de la de F'_1 , l''_1 i l''_2 amb la força F'_1 aplicada en el nus que formen a l'estructura les barres l_1 i l_2 . Continuem traçant forces (de qualsevol magnitud i direcció) a partir de la F_1 seguint l'ordre imposat per les paral·leles a l'estructura original $l'_1...l'_6$ i de forma que el final de l'última força F_6 coincideix amb l'origen de F_1 . D'aquesta manera, tindrem un polígon tancat de forces (qualsevols) en equilibri.

La intensitat i el signe de les forces que actuen en les barres de l'estructura queden definits per les distàncies entre el punt O i la magnitud de les línies $l'_1...l'_6$, a escala de forces, i per

¹ El sentit de les forces a les barres d'una estructura és marginal en la reciprocitat però, en tot cas, per observar el sentit de les forces que transcorren per les barres, es tindrà en compte que aquest sentit el dona l'equilibri dels nusos. Des d'aquest punt de vista, el sentit de les forces en una figura tancada sempre ha de ser el mateix (amb altres paraules, les fletxes o final de les forces sempre van en el mateix sentit) i aquest és el que s'ha de traslladar a l'estructura. En aquesta, quan dos punts extrems d'una mateixa barra tendeixen a ajuntar-se direm que la barra està traccionada, i al contrari, quan aquest dos punts tendeixen a separar-se direm que està subjecta a una compressió.

l'inevitable equilibri que es dona entre els nusos. Observi's que l'equilibri es dona per a qualsevol combinació de les forces $F_1...F_6$ amb l'única condició que formin un polígon tancat i respectin l'ordre imposat pel polígon recíproc a l'estructura.

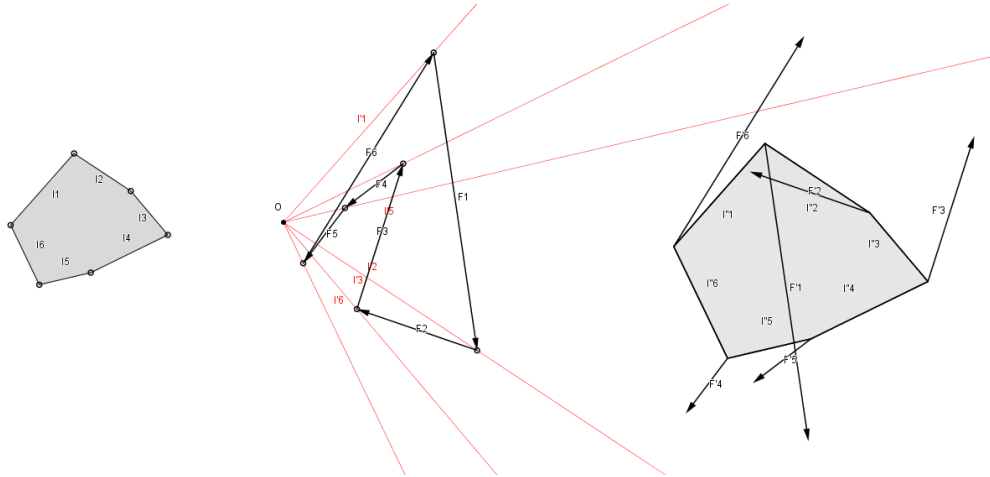


Fig. 9.4

9.5 Reciprocitat. Cremona

Disposem de l'estructura plana composta de barres $I_1...I_6$ i nusos articulats sol·licitada per un conjunt de forces $F_1...F_6$ amb unes línies d'acció que es troben en el punt O (fig. 9.5). Si l'estructura es troba en equilibri, les paral·leles a les forces col·locades correlativament han de formar un polígon tancat. Si no estan en equilibri apareix una força R o R' de desequilibri.

Si des d'un punt qualsevol interior (o exterior) al polígon de forces O' tracem línies a l'origen i final de totes les forces $a...g$ i aquestes línies les traslladem a l'estructura, tindrem el polígon tancat $a'...g'$ si està en equilibri o obert en cas contrari (tal com passa a la figura 9.5). D'aquestes construccions es pot dir: les dues figures formades són recíproques o bé, donant-li un aspecte espacial com indicava Cremona, les projeccions ortogràfiques dels dos poliedres de vèrtexs O i O' són recíproques. Per exemple, el triangle $F'1$, a , g té la seva correspondència recíproca a l'estructura amb la coincidència que formen les línies F_1 , I_1 , I_6 i al mateix passa amb les diferents línies de les dues construccions.

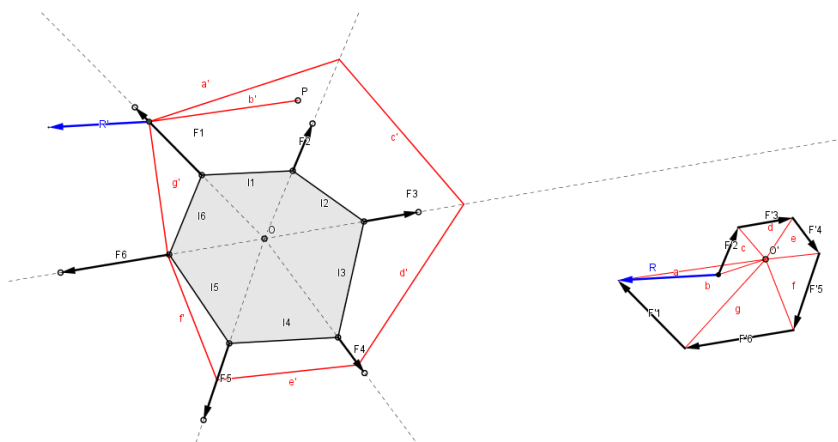


Fig. 9.5

9.6 Reciprocitat. Cremona

Generalitzarem la mateixa estructura donada a l'aplicació anterior amb forces $F_1...F_6$ que no es troben en un punt (fig. 9.6). L'estructura està sol·licitada per un conjunt de forces $F_1...F_6$ que segons com es veu en el polígon de forces poden estar en equilibri o no. Concretament a la figura aquest desequilibri es dona amb el valor de la resultant R . Manipulant els punts mòbils de les forces es pot aconseguir l'equilibri.

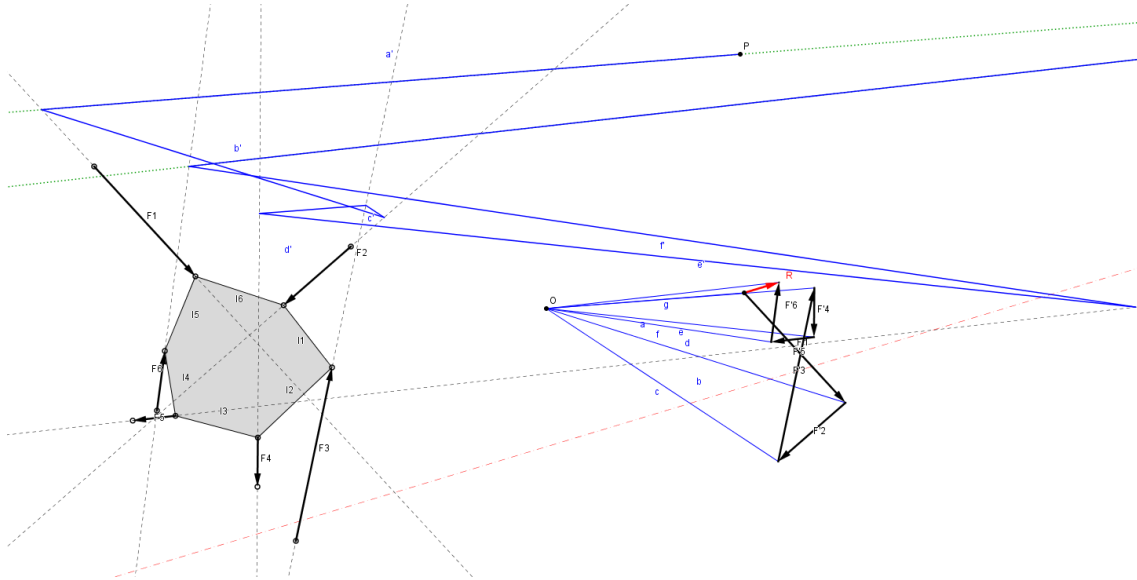


Fig. 9.6

9.7 Reciprocitat. Cremona. Teòric

Tenim una sèrie de forces en el pla $F_1...F_{10}$ que poden variar en sentit, direcció i intensitat. Aquestes forces les suposem aplicades en els nusos d'una estructura qualsevol composta de barres també en el pla. Quina serà l'estructura més adequada? El producte de la suma de longitud de les barres per la suma de les forces que actuen en elles ens donarà un índex $(\sum l \cdot k_l) \cdot (\sum f \cdot k_f)$ que es troba a la pantalla gràfica i que ens servirà per poder comparar les diverses estructures que obtenim.

Les forces $F_1...F_{10}$ es troben en equilibri (fig. 9.7). Es donen les següents circumstàncies.

- .En el polígon de les forces el final del vector F_{10} coincideix amb l'origen de F_1 .
- .Aquestes forces aplicades als nusos d'una estructura qualsevol composta per barres també es troben en equilibri, i aplicant una construcció convencional de Cremona es poden trobar els esforços a les barres tal com es veu al polígon anomenat O_4 . El moviment d'aquest punt és innocu tant per a les forces com per a l'estructura.
- .Si es mou el punt O_1 del polígon de les forces, tindrem que per al mateix equilibri de forces podrem obtenir infinites estructures (i infinits polígons de Cremona de definició dels esforços a les barres). Igual passa movent el punt O_2 .
- .Movent el punt O_3 de l'estructura, i per al mateix equilibri, obtenim diferents formes d'estructura sense que es modifiquin els esforços a les barres.

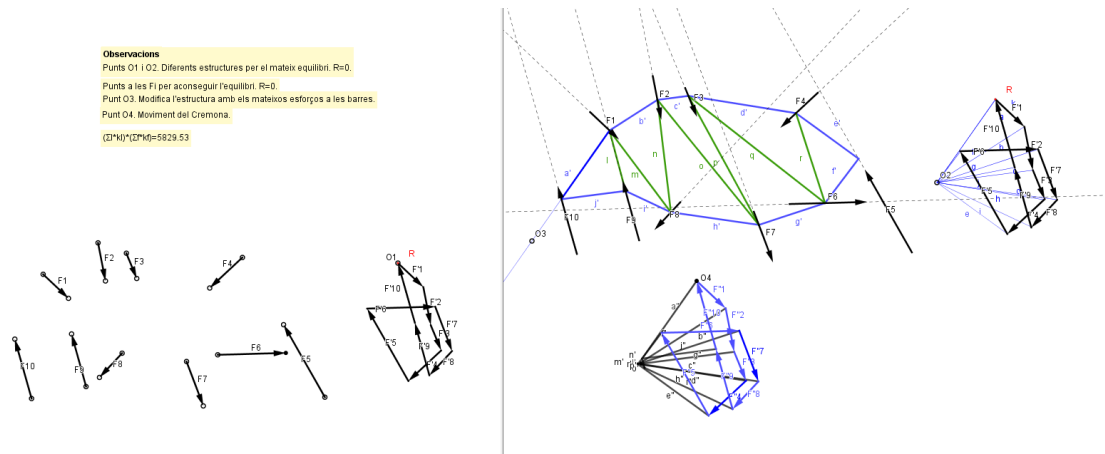


Fig. 9.7

Les forces $F_1 \dots F_{10}$ no estan en equilibri (fig. 9.8). Tindrem:

.En el polígon de les forces apareix un vector R en vermell que indica precisament el desequilibri que es dona al conjunt de forces $F_1 \dots F_{10}$ (R és la resultant del sistema).

.El polígon de Cremona no queda tancat i, per tant, es dona una circumstància anòmla que no té sentit estructural. Així com tampoc tenen sentit els moviments dels punts O1, O2 i O3 que s'han comentat, cas de donar-se equilibri.

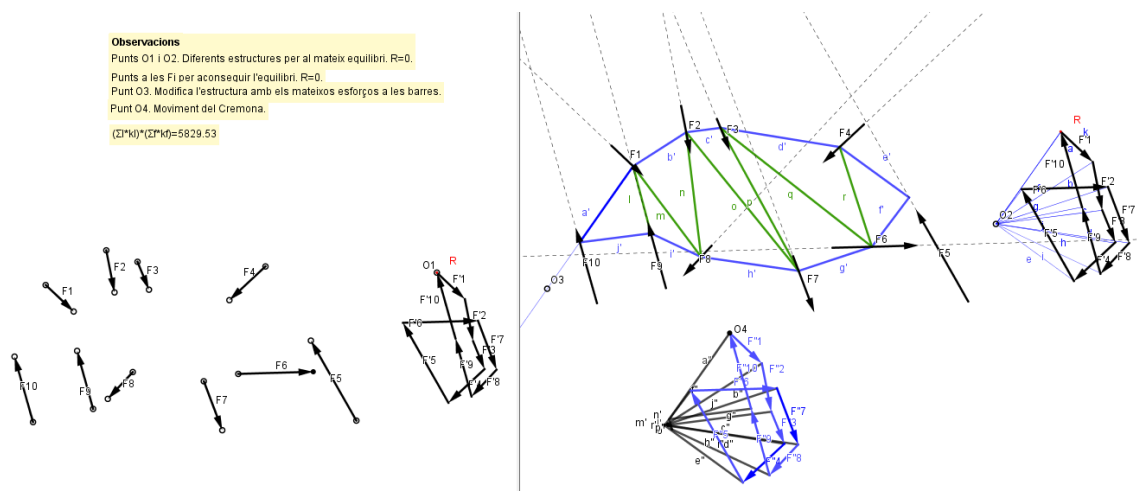


Fig. 9.8