A propos des équations du type $sin(x) = a$ et $cos(x) = a$

Problématique :

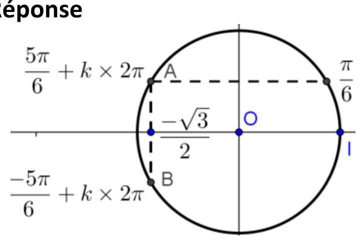
A chaque réel correspond un unique point image, mais la réciproque est fausse : un point du cercle est l'image d'une infinité de réels.

En plus, pour $-1 < a < 1$, il y a deux points du cercles qui ont pour abscisse a. De même, deux points du cercle ont comme ordonnée a.

Le problème surgit inévitablement en utilisant la calculatrice … si on cherche le réel x de $[-\pi\ ,; 0]$ tel que $\cos(x) = -0{,}5$ … la calculatrice ne le donne pas directement.

Savoir-faire Résoudre graphiquement l'équation $\cos(x) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

Réponse



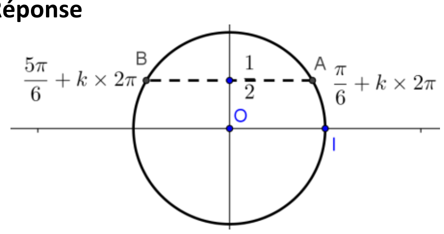
Il existe deux points du cercle ayant pour abscisse $\frac{-\sqrt{3}}{2}$

L'équation a une infinité de solutions réparties en deux familles :

- Les réels ayant pour images A $\qquad \frac{2\pi}{3} + k \times 2\,\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$
- Les réels ayant pour images B $\qquad \frac{-2\pi}{3} + k \times 2\,\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Savoir-faire Résoudre graphiquement l'équation $\sin(x) = \frac{1}{2}$

Réponse



Il existe deux points du cercle ayant pour ordonnée $\frac{1}{2}$

L'équation a une infinité de solutions réparties en deux familles :

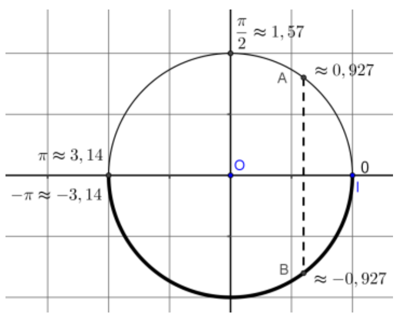
- Les réels ayant pour images A $\qquad \frac{\pi}{6} + k \times 2\,\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$
- Les réels ayant pour images B $\qquad \frac{5\pi}{6} + k \times 2\,\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Savoir utiliser la calculatrice *La calculatrice doit être en radian !*

1) Donner une valeur approchée du réel x de $[\ 0\ ; \pi]$ tel que : $\cos(x) = 0{,}6$

Réponse En tapant $\cos^{-1}(0{,}6)$ sur la calculatrice, on obtient environ $0{,}927$. $0{,}927$ est bien dans l'intervalle $[\ 0\ ; \pi\ ]$

2) Donner une valeur approchée du réel x de $[\ -\pi\ ;\ \ 0\ ]$ tel que : $cos(x) = 0{,}6$



Réponse En tapant $\cos^{-1}(0{,}6)$ sur la calculatrice, on obtient environ $0{,}927$.
Mais ce n'est pas le réel cherché ! Faisons un schéma.

$0{,}927$ a pour image A et nous cherchons un réel qui a pour image B

Comme B est le symétrique de A par rapport à l'axe des abscisses, un réel ayant pour image $-0{,}927$ qui est bien dans l'intervalle $[\ -\pi\ \ ; 0\ ]$

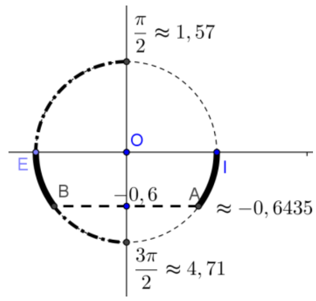
3) Donner une valeur approchée du réel x de $\left[-\frac{\pi}{2}\ ; \frac{\pi}{2}\right]$ tel que : $\sin(x) = -0{,}6$

Réponse En tapant $\sin^{-1}(-0{,}6)$ sur la calculatrice, on obtient environ $-0{,}6435$. $-0{,}6435$ est bien dans $\left[-\frac{\pi}{2}\ ; \frac{\pi}{2}\right]$

4) Donner une valeur approchée du réel x de $\left[\frac{\pi}{2}\ ; \frac{3\pi}{2}\right]$ tel que : $\sin(x) = -0{,}6$

Réponse En tapant $\sin^{-1}(-0{,}6)$ sur la calculatrice, on obtient environ $-0{,}6435$

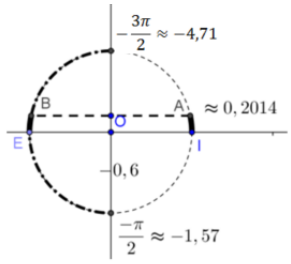
Mais ce n'est pas le réel cherché ! Faisons un schéma.
$-0{,}6435$ a pour image A et nous cherchons un réel qui a pour image B



Par symétrie, les petits arcs IA et EB ont la même longueur : environ $0{,}6435$
Donc B est l'image de $\pi + 0{,}6435 \approx 3{,}78$
$3{,}78$ est bien dans l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}\ ;\frac{3\pi}{2}\right]$ puisque $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$ et $\frac{3\pi}{2} \approx 4{,}71$

5) Donner une valeur approchée du réel x de $\left[\frac{-3\pi}{2}\ ;\ \frac{-\pi}{2}\right]$ tel que : $\sin(x) = 0{,}2$

Réponse En tapant $\sin^{-1}(-0{,}6)$ sur la calculatrice, on obtient environ $-0{,}6435$
Mais $-\frac{3\pi}{2} \approx -4{,}71$ et $-\frac{\pi}{2} \approx -1{,}6$ donc $-0{,}6435$ n'est pas le réel cherché !
Faisons un schéma.



$0{,}2014$ a pour image A et nous cherchons un réel qui a pour image B

Par symétrie, les petits arcs IA et EB ont la même longueur : environ $0{,}2014$
Donc B est l'image de $\pi - 0{,}2014 \approx 2{,}94$

Mais $2{,}94$ n'est pas dans l'intervalle $\left[\frac{-3\pi}{2}\ ;\frac{-\pi}{2}\right]$. B est l'image des réels $2{,}94 + k \times 2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$
Donc $2{,}94 - 2 \times \pi$ a aussi pour image B or $2{,}94 - 2 \times \pi \approx -3{,}34$ et $-3{,}34$ est bien dans $\left[\frac{-3\pi}{2}\ ;\frac{-\pi}{2}\right]$