Anwendung der Sätze der Dualität

Wir haben nun auch bereits gesehen, wie die Sätze der Dualität verwendet werden können, um Extremstellen von Funktionen zu berechnen. Bevor wir nun Beispiele mit dieser Methode berechnen werden, versuchen wir geeignete Vorgehensschritte zu klären.

Besonders wichtig ist dabei, dass bei Extremwertaufgaben, wie wir bereits durch die Methode der Differentialrechnung gelernt haben, des Öfteren nicht direkt nach dem Extremwert der Zielfunktion gefragt wird, sondern vielmehr nach den Extremstellen, die diesen Extremwert verursachen. Dabei kann eine Zielfunktion mit Hilfe von bestimmten Regeln verändert werden, ohne die Extremstelle der Zielfunktion zu ändern.

Zur Wiederholung, erlaubte Veränderungen für die Zielfunktion, ohne die Extremstellen zu verändern, sind:

- Multiplizieren/Dividieren der Zielfunktion mit einer positiven reellen Zahl
- Eine reelle Zahl zu/von der Zielfunktion addieren/subtrahieren
- Potenzieren und Wurzelziehen (sofern Zielfunktion nicht negativ) der Zielfunktion
- Exponieren und Logarithmieren (sofern Zielfunktion positiv) der Zielfunktion

Diese Transformationen werden uns bei manchen Beispielen behilflich sein, um die Sätze der Dualität anwenden zu können. Vor allem die erste Transformation ist dazu sehr hilfreich, wie wir gleich anhand von einem Beispiel sehen werden. Die Beispiele werden einfacher, wenn die Zielfunktion bereits zu Beginn mit dieser Methode verändert wird, also auf positive Faktoren bei der Zielfunktion zum Beispiel verzichtet wird.

Die ersten Schritte der Lösungsmethode sind dabei ähnlich zu der Methode der Differentialrechnung.

1) Aufstellen der Nebenbedingung und Zielfunktion, Zielfunktion vereinfachen
2) Einsetzen der Nebenbedingung in die Zielfunktion, Zielfunktion weiter vereinfachen
3) Einteilung der Zielfunktion in Summanden/Faktoren, damit Sätze der Dualität anwendbar

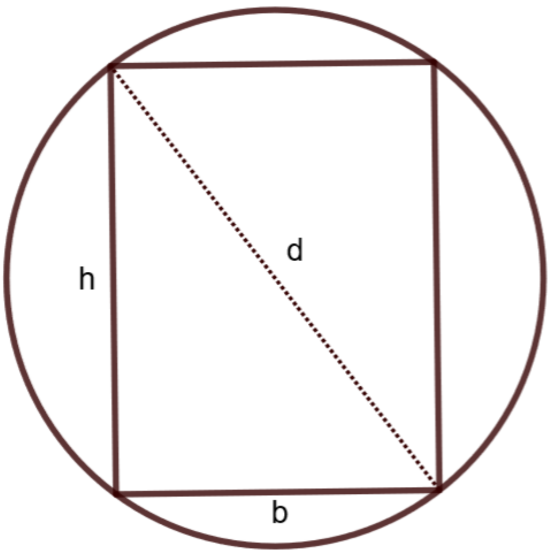
4) Zielfunktion transformieren, damit die Voraussetzungen der Sätze der Dualität erfüllt sind
5) Gleichsetzen der Summanden/Faktoren und Berechnen der ersten Variable
6) Einsetzen der ersten Variable in die Nebenbedingung zur Berechnung der zweiten Variable.

Diese Schritte haben wir schon bei den vorherigen Beispielen angewandt.
Es ist durch diese auch möglich, Aufgaben zu lösen, bei der die Zielfunktion in mehr als zwei Summanden oder Faktoren zerlegt werden muss.

Beispiel: Tragkraft eines Baumstammes

Aus einem runden Baumstamm mit Durchmesser d soll ein Balken mit rechteckigem Querschnitt (b; h) und maximaler Tragkraft T geschnitten werden. Die Tragkraft ist direkt proportional zur Breite b und zu h^2 und lässt sich durch $T = kbh^2$ berechnen, wobei k ein konstanter Faktor ist. Wie sind b und h dafür zu wählen, damit die Tragkraft maximal ist?

Skizze:



Lösung:

1) Die Zielfunktion ist die Tragkraft, deren Formel in der Angabe ablesbar ist:

$T(b,h) = kbh^2$. Da k ein positiver konstanter Faktor ist, spielt er für die Extremstelle keine Rolle und wir können die Zielfunktion ändern auf $\tilde{T}(b,h) = bh^2$.

Die Nebenbedingung erhalten wir aus der Skizze. Es gilt $d^2 = h^2 + b^2$, also $h^2 = d^2 - b^2$.

2) Eingesetzt in die Zielfunktion bedeutet dies wiederum für die Zielfunktion:

$\tilde{T}(b,h) = b(d^2 - b^2)$.

3) Wir versuchen nun die Summe der beiden Faktoren b und $(d^2 - b^2)$ zu berechnen und erkennen, dass wir hier noch keine konstante Summe erreichen, da wir einmal b und einmal b^2 in de Faktoren haben. Es sind also Transformationen notwendig.

4) Wir greifen zu einem Weiteren Transformationstrick. Wir quadrieren unsere Zielfunktion und erhalten: $(\widetilde{T}(b,h))^2 = b^2(d^2 - b^2)^2 = b^2(d^2 - b^2)(d^2 - b^2)$.

Das Problem mit b und b^2 hat sich somit erledigt. Jedoch haben wir nun zweimal $-b^2$ und einmal b^2 in den Faktoren, sodass die Summe noch nicht konstant ist. Wir multiplizieren also mit 2 und erhalten $2(\tilde{T}(b,h))^2 = 2b^2(d^2 - b^2)(d^2 - b^2)$. Für die Summe dieser drei Faktoren gilt nun $2b^2 + (d^2 - b^2) + (d^2 - b^2) = 2d^2$. Da d der bekannte Durchmesser des Baumstammes ist, ist die Summe nun konstant und der Satz der Dualität anwendbar.

5) Also muss gelten $2b^2 = (d^2 - b^2) = (d^2 - b^2)$. Letze Gleichheit gilt sowieso, aus der ersten können wir uns nun die Maximumstelle b berechnen: $3b^2 = d^2$, also $b = \frac{d}{\sqrt{3}}$.

6) Aus der Nebenbedingung erhalten wir: $h^2 = d^2 - \frac{d^2}{3} = \frac{2}{3}d^2$, also $h = \sqrt{\frac{2}{3}}d$.

Außerdem gilt $b:h = 1:\sqrt{2}$. Dieses Verhältnis gilt im Übrigen auch für die Seiten eines DinA-Blatt Papieres.