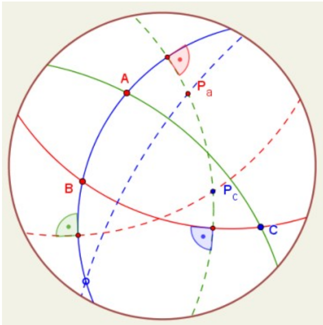
AZ E-háromszög nevezetes vonalai és pontjai

Legyen adott egy háromszög …

… amelyen igyekszünk rendre bemutatni, hogy a középiskolai elemi geometriának a fenti címhez tartozó fogalmai, összefüggései miként tükröződnek ebben a szokásostól sok mindenben eltérő rendszerben. Továbbra is a <u>három csúcs</u>ból és a <u>három oldalegyenes</u>ből álló geometria alakzatot tekintsük háromszögnek. Korábban megismerkedhettünk az E-pont polárisának és az E-egyenes pólusának a fogalmával. Az alábbi szerkesztésekben gyakran lesz szükségünk az E-háromszög *poláris háromszögé*re. Az ABCΔ csúcsainak a polárisait képezve kapjuk az ABCΔ poláris háromszögének - $P_{ABC}\Delta$ -nek - az oldal-egyeneseit, oldal-egyeneseinek a pólusaiként kapjuk a $P_{ABC}\Delta$ csúcsait. A háromszög és polárisa közötti kapcsolat szimmetrikus: egy háromszög polárisának a polárisa az eredeti háromszög. Egy k*vadrát háromszög* - amelynek az oldalai és szögei is derékszögek - egybeesik a poláris háromszögével. Ez így is megfogalmazható:



- **Egy E-háromszög akkor és csak akkor *kvadrátháromszög,* ha *egybeesik a poláris háromszögével.***

Az alábbi applet minden lépésében egy *kvadrát háromszög*ből indulunk ki. Az ehhez vezető "fogásról" itt olvashatnak a technikai részletek iránt érdeklődő olvasóink. Az applet felhasználóinak természetesen meg van a lehetőségük arra, hogy az **A**, **B**, **C** pontok mozgatásával többféle általános helyzetet vizsgáljanak meg, és a megjelenő jelölőnégyzetek (**√**) ki-be kapcsolásával figyeljék meg alaposan az egyes geometriai objektumok közötti kapcsolatot. Előrebocsájtjuk, hogy az applet alapos vizsgálatához olykor hosszabb szöveges elemzés tartozik. A szöveg és az applet együttes tanulmányozása érdekében a szöveg az anyag végén pdf fájl formájában is hozzáférhető.

1. Magasságvonalak, magasságpont.

Kezdjük a vizsgálódást a kvadrát háromszöggel. Ennek bármely csúcsára illeszkedő E-egyenes merőleges a háromszög szemközti oldalára, ezért nincs egyértelműen meghatározható magasság-egyenese és magasságpontja sem. Ugyanezt mondhatjuk azokról az egyenlő szárú E-háromszögekről is, amelyeknek az alapon fekvő szögeik derékszögek. Bár … ez definíció kérdése. Fogadjuk el a magasságpont definíciójaként az alábbi meghatározást:

- Az ABCΔ *magasságpont*jának nevezzük azt az *M* pontot, amelyből a háromszög mindhárom oldal-egyenesére merőlegest állítva a kapott egyenesek illeszkednek az oldal-egyenesekre nem illeszkedő csúcsokra.

Ez a meghatározás megfelelő az euklideszi sík bármely háromszögére, így a derékszögűre is:

- *Az euklideszi sík <u>minden</u> háromszögének pontosan egy magasságpontja van;*
- A hiperbolikus síkon <u>vannak olyan</u> háromszögek amelyeknek <u>nincs</u> magasságpontjuk;

- *Az elliptikus sík minden háromszögének pontosan egy magasságpontja van,* ***kivéve azt a háromszöget, amelynek legalább két derékszöge van. A kvadrát háromszögnek a sík minden pontja magasságpontja.***

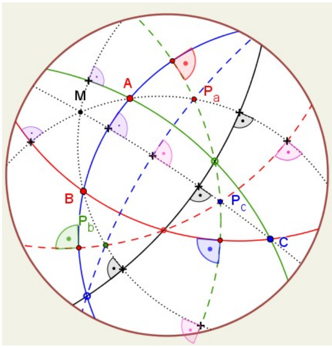
Mi a magasságpontok mértani helye, ha a háromszögnek pontosan két derékszöge van? A választ olvasóinkra bízzuk.

Egy általános háromszög magasság-egyenese illeszkedik nem csak a háromszög egyik csúcsára, hanem a szemközti oldal pólusára is, mivel egy adott egyenesre merőleges egyenesek illeszkednek az egyenes pólusára. Ezért pl. az *(A,P_a)* egyenes egyben az *ABCΔ* -nek az A csúcsához, a $P_{ABC}\Delta$ -nek a *P_a* csúcsához tartozó magasság-egyenese. Ezt használtuk ki a megszerkesztéséhez. Ez azt is jelenti, hogy mind a négy E-háromszöglaphoz és polárisaikhoz is ugyanaz a három magasság-egyenes, és ugyanaz az **M** magasságpont tartozik.

(√ABCΔ) (√Magasságok)

Az általános háromszög három csúcsa és a magasságpont itt is - épp úgy mint itt (1.app)-un. *ortocentrikus pontnégyest* alkot: bármely három pontját egy háromszögnek tekintve a negyedik lesz a háromszög magasságpontja.

(√ABCΔ), (√Magasságok), (√$P_{ABC}\Delta$)



Az is figyelemreméltó, hogy az általános ABCΔ és a $P_{ABC}\Delta$ egymásnak megfelelő oldalainak a metszéspontjai egy E-egyenesre illeszkednek, amely az M pont polárisa. Így azt mondhatjuk, hogy a kapott alakzat egy speciális helyzetű Desarques alakzat (2.app.) , amelynek egyenesei az ABCΔ és a $P_{ABC}\Delta$ oldalegyenesei, és ezek - közös – magasság-egyenesei. - Azaz 3+3+4 E-egyenes- alkotja a Desaqrques alakzat tíz egyenesét, és ezek pólusai lesznek az alakzat pontjai.

2. Felezőpontok, középvonalak, súlyvonalak, súlypontok

A fenti címben mindenütt többes szám szerepel. Hamarosan kiderül, hogy miért. Korábban láttuk, hogy az E-sík bármely két pontjához két tükörpont (szakasz felező pont) tartozik, amelyekre vonatkozó centrális tükrözés a két pontot egymásba viszi át. Mivel három E-pont három E-egyenest, (hat E-szakaszt) így hat felezőpontot határoz meg.

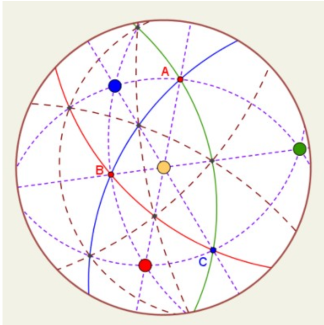
(√ABCΔ) , (√Felezőpontok), (√Középvonalak)

Ha középvonalaknak e felezőpontokra illeszkedő E-egyeneseket tekintjük, azonnal látszik, hogy a hat pont csak négy középvonalat határoz meg: mindegyikre három felezőpont illeszkedik.

(√ABCΔ), (√Súlyvonalak), (√Súlypontok)

Épp úgy mint az abszolút geometriában, itt is teljesül, hogy:

- **A háromszöglapok súlyvonalai egy pontra, a háromszöglap súlypontjára illeszkednek.**



Összetett (nyitott?) kérdésnek tűnik a fenti állítás igazolása, ugyanis euklideszi geometriában ez a hasonlóság felhasználásával könnyen belátható, de a hasonlóság fogalma sem az elliptikus, sem a hiperbolikus geometriában nem létező fogalom. Itt volt szó arról, hogy miként lehet az E-háromszöglapok megkülönböztetésére használni a háromszög két oldalának egy-egy kijelölt pontját. Ez a kijelölt pont lehet egy-egy felezőpont is, így a háromszöglap egyértelmű megadásához használhatók a háromszöglapok súlypontjai is. Az **A**,**B**,**C** pontokkal megadott négy háromszöglapot jelöljük meg a súlypontja színével: legyensárgaaz, amelynek nincs közös pontja a modell alapkörével, továbbá rendre **piros, zöld** és **kék** az, amelyet az háromszög ugyanilyen színű oldala választ el a sárgától. Figyeljük meg, hogy az **A, B, C** pontok mozgatása közben ez az azonosítás érvényben marad.

(√ABCΔ), (√Súlyvonalak)

Az ABCΔ kvadrátháromszög súlyvonalai, egyben szakaszfelező merőlegesek (és magasság-egyenesek) is, tehát a háromszög tükörtengelyi lesznek. Így a háromszög oldal-egyenesei és súlyvonalai együtt az E-síkot 4*6 =24 olyan egybevágó háromszögre bontják, amelynek a szögei 45°, 60°és 90°. Később lesz szó arról, hogy miként lehet még kiparkettázni az E-síkot egybevágó háromszögekkel. Ha az ABCΔ általános, akkor az oldal-egyenesei és súlyvonalai által kapott 24 derékszögű háromszöglap természetesen nem lesz egybevágó, de együtt ugyancsak lefedik a síkot.

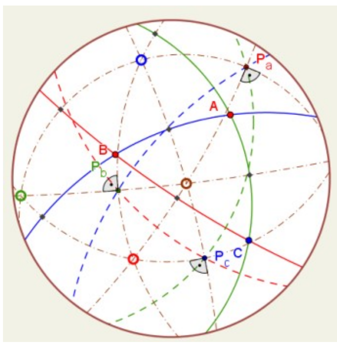
3. Szakaszfelező merőlegesek, a háromszög köré írt körei

Addig, amíg az abszolut geometriában három pontra legfeljebb egy kör illeszkedik, hamarosan látni fogjuk, hogy a fenti címben ugyancsak indokolt a többes szám. Mivel egy adott E-egyenesre merőleges egyenesek egy pontra - az egyenes pólusára - illeszkednek, a szakaszfelező merőlegesek megszerkesztéséhez a szakaszok felezőpontjai mellett szükségünk lesz az *ABCΔ* poláris háromszögének a *P_a, P_b, P_c* csúcsaira.

(√ABCΔ), (√Felező-merőlegesek), (√P_{ABC}Δ)

Az *ABCΔ* oldalfelező merőlegesei az oldalak felezőpontjaira és az oldal-egyenesek pólusira illeszkednek.

(√Felező-merőlegesek), (√Köréírt kör kp.)



Figyeljük meg, hogy négy olyan pont van, amelyre az így kapott hat egyenes közül három-három illeszkedik. Ez a négy pont ugyancsak ortocentrikus pontnégyest alkot: a hat szakaszfelező merőleges közül bármely kettőt kiválasztva vagy merőlegesen metszik egymást, vagy illeszkedik a metszéspontjukra egy harmadik egyenes is.

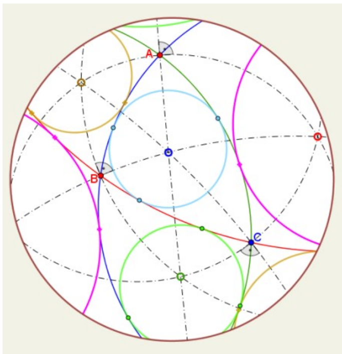
(√ABCΔ), (√Köréirt kör kp.) +csúszka 0,...4

Összegezve: az E-sík három adott pontjára négy olyan kör illeszkedik, amelyek középpontjai rendre megszerkesztve - egy csúszkával vezérelve - egyenként megjelenítettük a négy körülírt kört is.

4. Szögfelezők, beírt körök

Itt (2. app. 4. lépés) már találkoztunk azzal az egyenlő szárú háromszöggel, amelynek van két derékszöge. Ennek a tulajdonságait kihasználva szerkeszthetjük meg egy E-háromszög szögfelező egyeneseit. Pl. az **A** csúcshoz tartozó szögfelezők illeszkednek az **A** csúcs polárisán lévő **P_b** , **P_c** szakaszok felezőpontjaira.

(√ABCΔ), (√P_{ABC}Δ), majd: (√Szögfelezők)



Vegyük észre, hogy az ABCΔ poláris háromszögének - a *P_{ABC}Δ* -nek - a szakaszfelező merőleges egyenesei lesznek egyben az ABCΔ szögfelezői. Korábban láttuk, hogy a egy E-háromszög köré írt köreinek a középpontjai ortocentrikus pontnégyest alkotnak .Így a négy beírt kör középpontjai - amelyek mindegyikére három szögfelező illeszkedik - ugyancsak ortocentrikus pontnégyest alkotnak.

(√ABCΔ), (√Szögfelezők.)

Ugyanakkor - éppúgy, mint ahogy az euklideszi geometriában a háromszöglap külső- és belső szögfelezői - az ABCΔ egy-egy csúcsára illeszkedő szögfelezők is merőlegesek egymásra. Csak itt értelmét veszti a"belső", és "külső" megkülönböztetés. Sőt, ebben az anyagban nem is használtuk a háromszöglap fogalmát.