Achsensymmetrie zur y-Achse

Die Vermutung liegt nahe, dass der Graph einer ganzrationalen Funktion genau dann achsensymmetrisch zur y-Achse ist, wenn der Funktionsterm nur x-Potenzen mit geraden Exponenten beinhaltet.

Sei $f : x \longmapsto a_n x^n + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_0$ eine Funktion, bei der nur x-Potenzen mit geraden Exponenten auftauchen (Erinnerung: 0 zählt als gerader Exponent). Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass die Koeffizienten den Wert 1 haben. Also erhalten wir:

$$f(x) = x^n + x^{n-2} + \cdots + x^2 + 1$$

Nun hatten wir für die rechnerische Überprüfung den folgenden Ansatz:

$$f(x) = f(-x)$$

Wir müssen $f(-x)$ betrachten:

$$\begin{aligned}
f(-x) &= (-x)^n + (-x)^{n-2} + \cdots + (-x)^2 + 1 && (1)\\
&= [(-1)\cdot x]^n + [(-1)\cdot x]^{n-2} + \cdots + [(-1)\cdot x]^2 + 1 && (2)\\
&= (-1)^n \cdot x^n + (-1)^{n-2}\cdot x^{n-2} + \cdots + (-1)^2 \cdot x^2 + 1 && (3)\\
&= x^n + x^{n-2} + \cdots + x^2 + 1 && (4)\\
&= f(x) && (5)
\end{aligned}$$

Erklärung der Schritte:

(1): Setze $(-x)$ ein.

(2): Schreibe $(-x)$ als Produkt.

(3): Benutze das Potenzgesetz:

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

(4): Dieser Schritt ist der Knackpunkt in der Argumentation! Nach unserer Annahme sind sämtliche Exponenten gerade, also hat die Potenz stets einen positiven Wert. (Bsp.: $(-1)^2 = 1$)

(5): Man erkennt, dass in Zeile 4 nun der Funktionsterm $f(x)$ steht und somit die Gleichung erfüllt ist.

Analog zur Begründung oben kann man die zweite Vermutung begründen:

Der Graph einer ganzrationalen Funktion ist genau dann punktsymmetrisch zum Ursprung, wenn der Funktionsterm nur x-Potenzen mit ungeraden Exponenten enthält.

Zu Übungszwecken, solltest du die wesentlichen Schritte der Argumentation aufschreiben und durchdenken.