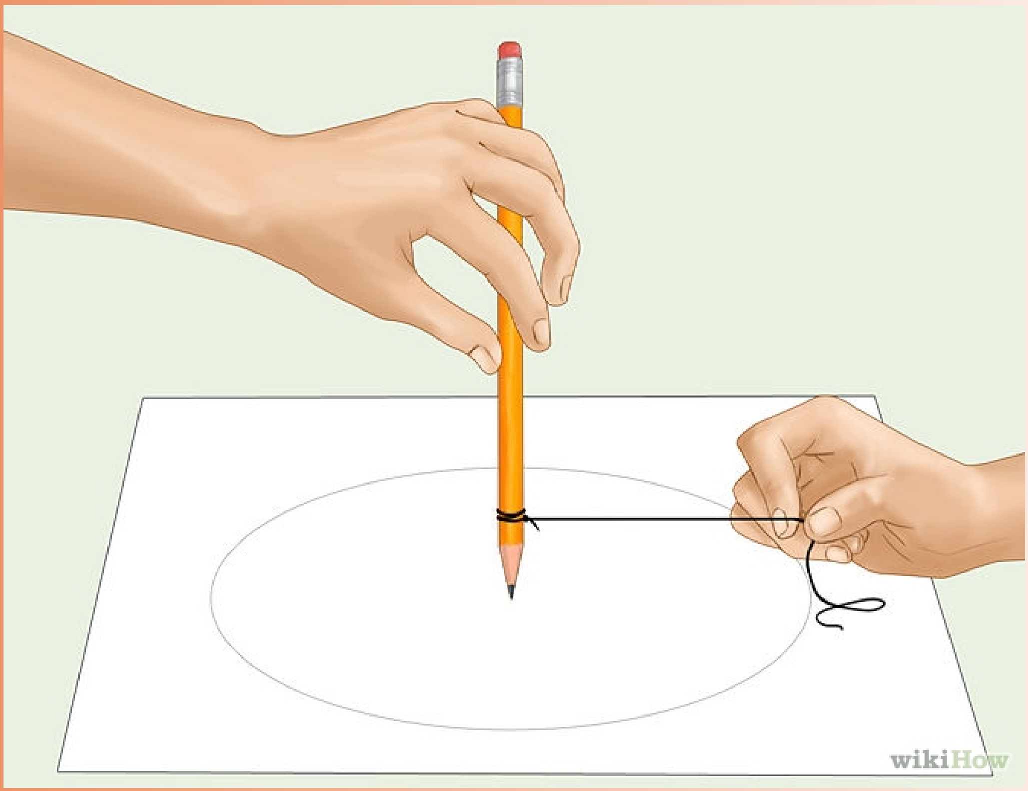
Φιλεκπαιδευτική Εταιρεία
Αρσάκεια - Τοσίτσεια Σχολεία

Συντονισμός Μαθηματικών

Α΄ Τοσίτσειο Αρσάκειο Λύκειο
Μ.Τσιλπιρίδης

Πειραματική διδασκαλία σε μαθητές της Β΄ Λυκείου



'Δύναμη σημείου ως προς κύκλο'

ένας αφανής κόσμος συμμεταβολών

Πανεπιστήμιο Αθηνών - Μεταπτυχιακό Τμήμα
Τομέας: Διδακτική & Μεθοδολογία των Μαθηματικών
«Ενσωμάτωση της Τεχνολογίας στη Διδακτική των Μαθηματικών»

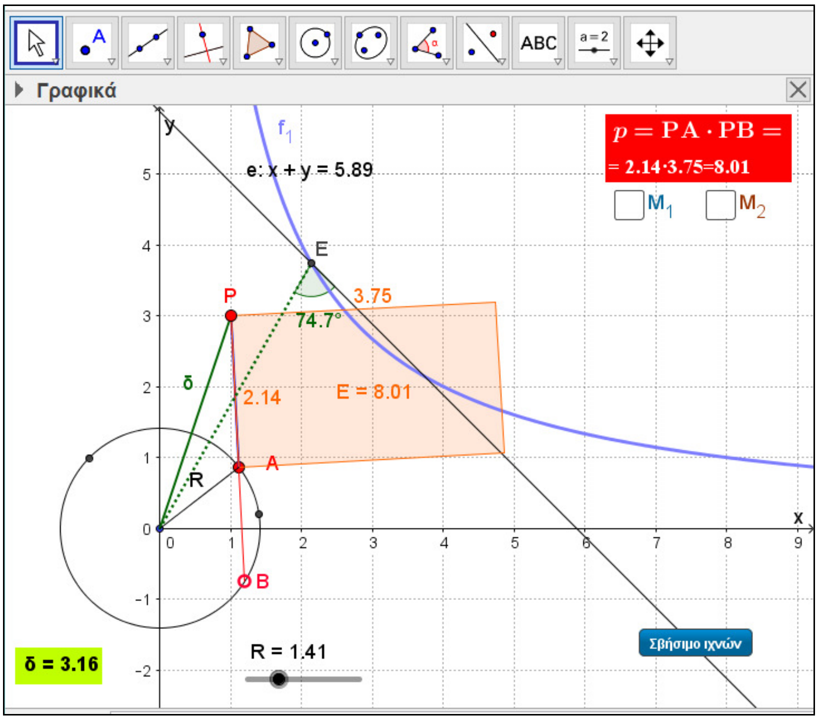
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Μεταπτυχιακό Τμήμα

Τομέας: Διδακτική & Μεθοδολογία των Μαθηματικών

Ενσωμάτωση της Τεχνολογίας στη Δ.τ.Μ

Δύναμη Σημείου ως προς Κύκλο: ‘ένας αφανής κόσμος συμμεταβολών’



Παρέμβαση για τη Β΄ Λυκείου Προσανατολισμού
Διάρκεια: 2 διδακτικές ώρες

[17/12/2015]

Μ. Τσιλπιρίδης

Περίληψη

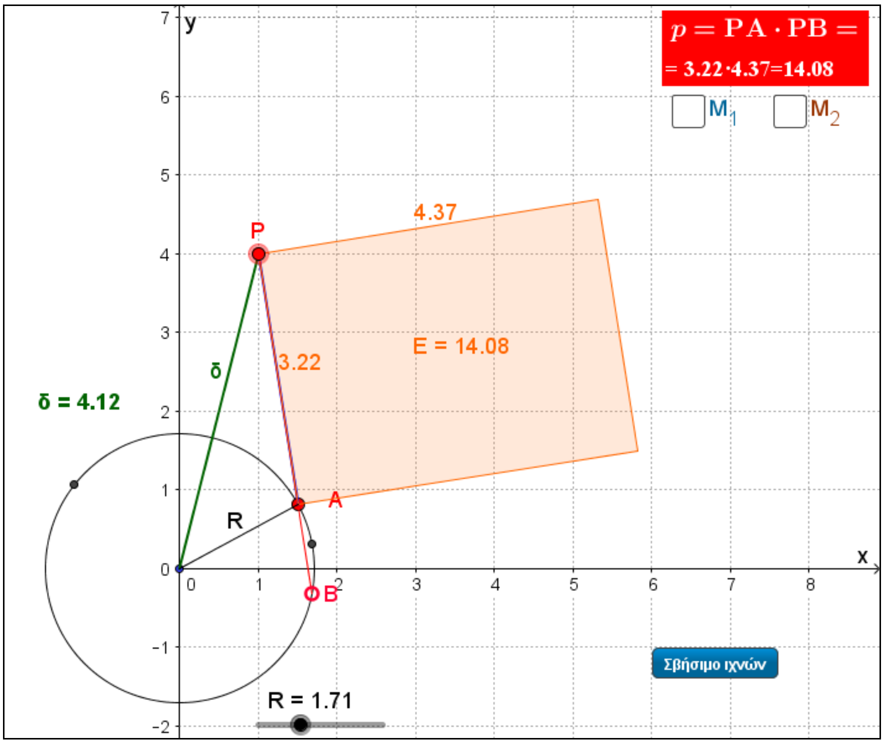
Στόχος της δραστηριότητας

Είναι γνωστό ότι οι μαθητές έχουν αποσπασματικές εικόνες για τις μετρικές σχέσεις που συναντούν στην Ευκλείδεια Γεωμετρία της Β΄ Λυκείου, σε σχέση με το αλγεβρικό – συναρτησιακό περιεχόμενο που αυτές εμπεριέχουν. Με άλλα λόγια: Η Άλγεβρα και η Γεωμετρία λειτουργούν στο σχολικό περιβάλλον ως ερμητικά κλειστοί και αποστασιοποιημένοι χώροι ο ένας ως προς τον άλλον.

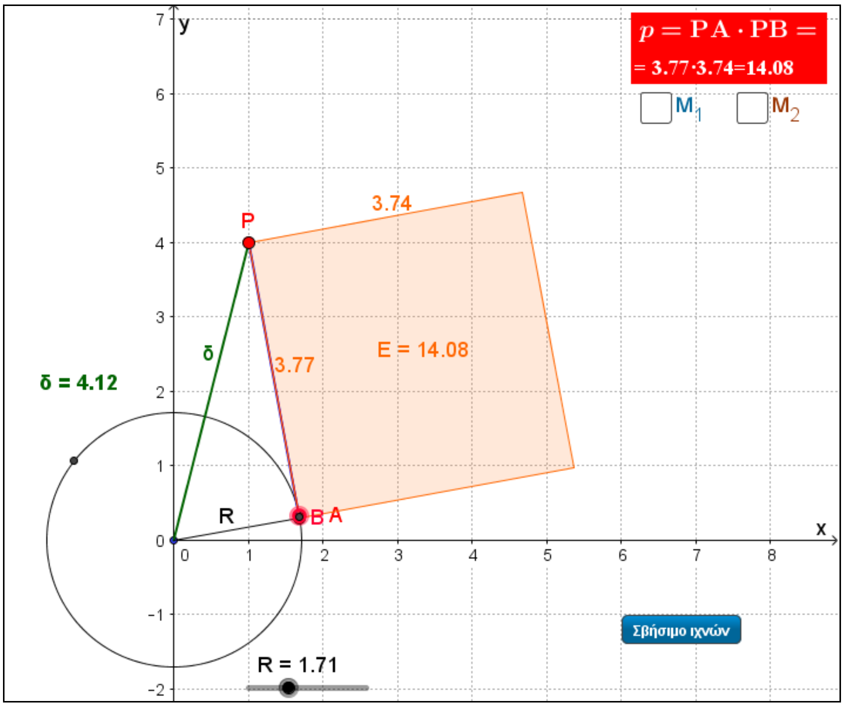
Στη δραστηριότητα επιχειρούμε, στο ενοποιημένο περιβάλλον του λογισμικού **Geogebra**, να αναδείξουμε την αλληλεξάρτηση αυτή, μέσω διαφόρων συμμεταβολών που δημιουργούνται από τη Δύναμη σημείου ως προς κύκλο. Επιχειρούμε μέσω αυτής της δραστηριότητας, οι μαθητές να διαπιστώνουν - ερμηνεύουν αλγεβρικά τις εμφανιζόμενες γεωμετρικές ιδιότητες και αντίστροφα, να εξετάζουν μέσω γεωμετρικών ιδιοτήτων τα αναμενόμενα αλγεβρικά ισοδύναμα τους. Επιπλέον, αξιοποιώντας τις δυνατότητες του λογισμικού, δημιουργούμε μέσω αυτού, σε κρίσιμα σημεία της εργασίας, το κατάλληλο υπέδαφος που θα δώσει ιδέες *informal proving* στους μαθητές, προκειμένου να οδηγηθούν σε τυπικές (*formal*) αποδείξεις των ισχυρισμών τους.

Φάσεις της δραστηριότητας

1. Να διαπιστώσουν ότι το γινόμενο: $p = PA \cdot PB$ είναι σταθερό (δύο περιπτώσεις P εσωτερικό ή εξωτερικό του κύκλου)
2. Να εντοπίσουν τις μεταβλητές που καθορίζουν τη σταθερή τιμή του γινομένου p (ακτίνα R, απόσταση δ=OP).
3. Να αναζητήσουν τη σχέση $p = \delta^2 - R^2$ (για εξωτερικό σημείο P). Ζητάμε από τους μαθητές να εξετάσουν τι συμβαίνει στην περίπτωση που το A τείνει να ταυτιστεί με το B, όσον αφορά τη σχετική θέση της ευθείας PAB με τον κύκλο. Επιχειρούμε να καλλιεργήσουμε το εννοιολογικό έδαφος ώστε να οδηγηθούν στην απόδειξη με Πυθαγόρειο Θεώρημα της σχέσης: $p = \delta^2 - R^2$.
4. Στη συνέχεια να εξετάσουν τι συμβαίνει όταν το σημείο P είναι εσωτερικό του κύκλου. Και στην περίπτωση αυτή τους ζητάμε να αναζητήσουν μια ειδική θέση για το σημείο P ($OP \perp AB$) για να οδηγηθούν στην αντίστοιχη σχέση: $p = R^2 - \delta^2$.
5. Να αναπαραστήσουν γεωμετρικά το σταθερό γινόμενο p ως εμβαδόν του ορθογωνίου E με διαστάσεις PA και PB .



6. Να διαπιστώσουν ότι όταν το Α πλησιάζει στο Β το ορθογώνιο τείνει να γίνει τετράγωνο.



7. Να διαπιστώσουν ότι όταν το Α τείνει να ταυτιστεί με το Β τότε η περίμετρος του ορθογωνίου Ε γίνεται **ελάχιστη** και με αυτό, να διατυπώσουν τον ισχυρισμό ότι «*από όλα τα ορθογώνια με σταθερό εμβαδόν, το τετράγωνο έχει την ελάχιστη περίμετρο*».

8. Να αποδείξουν τους ισχυρισμούς τους, μετατρέποντας τα ευρήματά τους στο σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{matrix}(\Upsilon)\\(\varepsilon)\end{matrix}\begin{cases} x\cdot y = p \\ x + y = \tau \end{cases}(\Sigma)$$

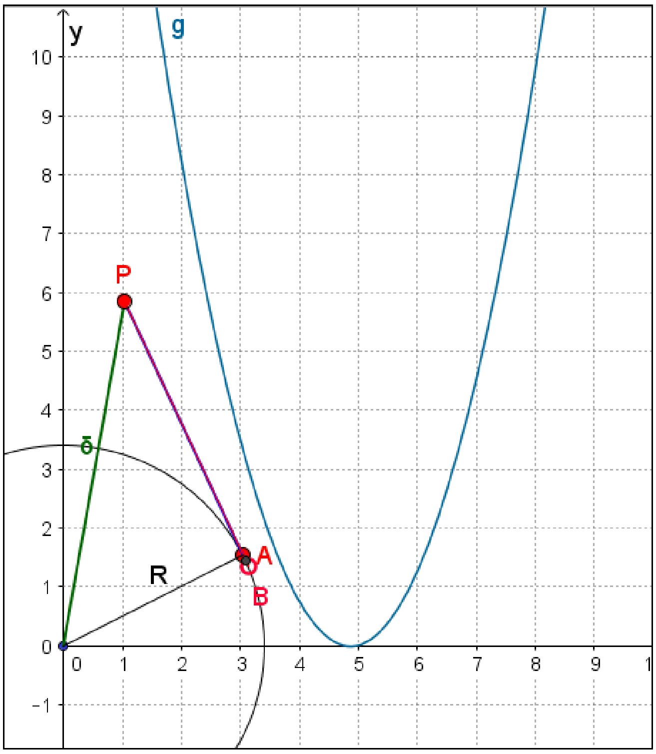
Όπου $p = PA \cdot PB =$ σταθερό και τ η (μεταβλητή) ημιπερίμετρος του ορθογωνίου Ε.

9. Για την επίλυση του (Σ):

Το μετασχηματίζουν $\begin{cases} xy = p \\ x^2 - \tau x + p = 0 \end{cases}$

και με την απαίτηση $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow \tau^2 - 4p \geq 0 \Leftrightarrow \tau \geq 2\sqrt{p} \Rightarrow \tau_{min} = 2\sqrt{p}$ οπότε $x = y = \sqrt{p}$ και άρα το ορθογώνιο ΡΒΚΛ είναι τετράγωνο.

Δημιουργούμε και εδώ το εννοιολογικό έδαφος για την απαίτηση $\Delta \geq 0$, συνθήκη που είναι καθοριστική για την παραπάνω απόδειξη, εμφανίζοντας την παραβολή:
$q(x) = x^2 - \tau x + p$ και παρατηρώντας ότι τέμνει ή εφάπτεται πάντα (για κάθε μεταβολή του δ και του R και των θέσεων του B).



Γεωμετρικές αναπαραστάσεις αποτελεσμάτων:

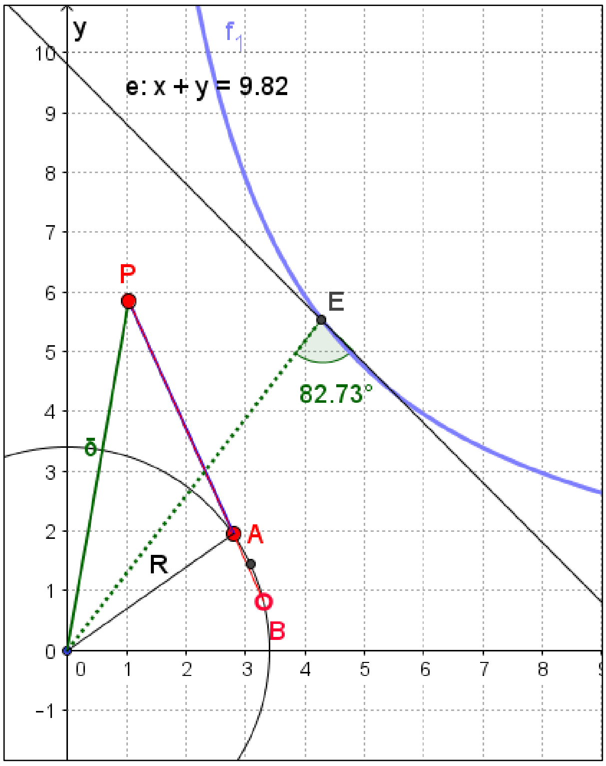
Α΄ αναπαράσταση:

Η παραβολή $q(x) = x^2 - \tau x + p$ τείνει να εφάπτεται στον άξονα xx΄ όταν A→B.(διακόπτης [q(x)]) (αποτέλεσμα συμβατό με την ακολουθούμενη διαδικασία στον Α΄ τρόπο).

Β΄ αναπαράσταση:

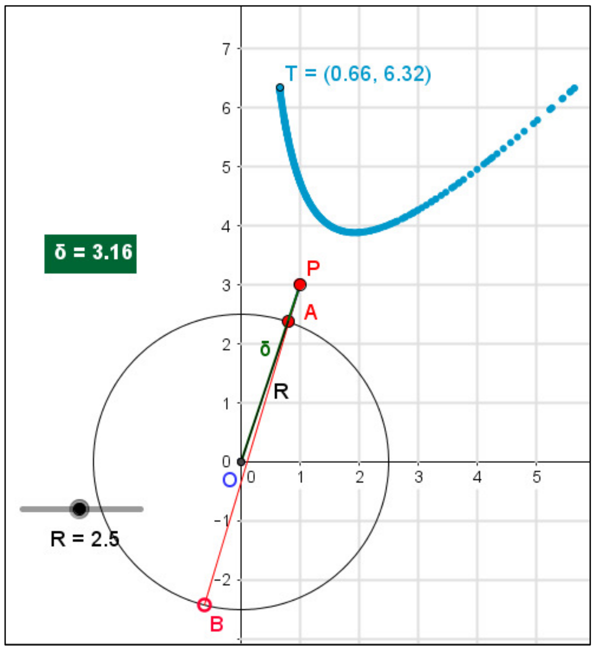
$$\begin{matrix}(\Upsilon) \\ (\varepsilon)\end{matrix}\begin{cases} x \cdot y = p \\ x + y = \tau \end{cases} (\Sigma)$$

Η ευθεία (ε) τείνει να γίνει εφαπτομένη της υπερβολής (Υ) όταν A→B, αποτέλεσμα συμβατό με ύλη Β΄ Προσανατολισμού (μια ευθεία εφάπτεται μιας κωνικής τομής αν και μόνο (Σ) οδηγεί σε δευτεροβάθμια εξίσωση που η διακρίνουσα της είναι μηδέν. (διακόπτης [Σύστημα])



10. Να εξετάσουν για ποια θέση του σημείου B, η ημιπερίμετρος: $\tau = PA + PB = x + \dfrac{p}{x}$ παίρνει τη **μέγιστη** τιμή της.

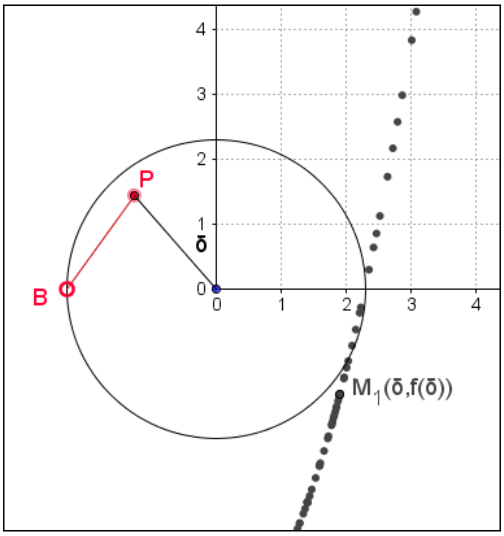
Στο δόμημα εμφανίζεται το ίχνος του σημείου T με συντεταγμένες $\left(x, x + \dfrac{p}{x}\right)$ από το οποίο φαίνεται ότι αυτό συμβαίνει όταν τα σημεία P, O και B είναι συνευθειακά. Στη συνέχεια ζητείται να αποδειχθεί αλγεβρικά αυτή η διαπίστωση.[1]

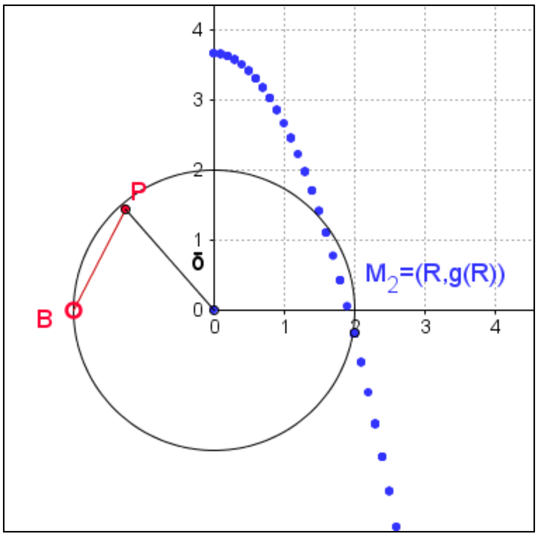


[1] Μπορεί να δοθεί και ως εργασία στον επόμενο κύκλο, αναλόγως του χρόνου διεξαγωγής των προηγούμενων φάσεων,

Εργασία

Να ερμηνεύσουν το είδος της καμπύλης των σημείων $M_1(\delta, \delta^2 - R^2)$ με R=σταθερό και $M_2(R, \delta^2 - R^2)$ με δ= σταθερό στηριζόμενοι στην προηγούμενη σχέση. Στην $1^η$ περίπτωση ερμηνεύουν για τις διάφορες θέσεις του P (εσωτερικό ή εξωτερικό του κύκλου) τις θετικές ή αρνητικές τιμές που παίρνει (ο κλάδος) της αντίστοιχης παραβολής. Ομοίως και για την περίπτωση του κλάδου παραβολής του M_2. Επίσης με εμφανές το σημείο M_1, να παρατηρήσουν ότι οι συμμεταβολές $M_1=M_1(R)$ και $M_2=M_2(\delta)$ **δεν είναι συναρτήσεις** και να δικαιολογήσουν τις παρατηρήσεις τους.





Φύλλο Εργασίας[2]

1η Φάση

Στη δραστηριότητα υπάρχουν:

Ένα σημείο P, ένας κύκλος (O,R) που η ακτίνα του μεταβάλλεται από το δρομέα R η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία P, A και B. Επίσης, υπάρχει η μέτρηση για το γινόμενο $p = PA \cdot PB$.

1. Μετακινείστε το σημείο B στην περιφέρεια του κύκλου. Τι παρατηρείτε για την τιμή του γινομένου $p = PA \cdot PB$;

Ότι είναι σταθερό

2. Προσπαθήστε να εντοπίσετε τις παραμέτρους που καθορίζουν τις τιμές του γινομένου p.

Οι τιμές του γινομένου p εξαρτάται από την ακτίνα R του κύκλου και την απόσταση δ του P από το κέντρο O

3. Πλησιάστε πολύ κοντά τα σημεία A και B. Τι φαίνεται να ισχύει για τη σχετική θέση της ευθείας PAB και του κύκλου;

Ότι είναι εφαπτομένη του κύκλου

4. Πώς μπορείτε να αξιοποιήσετε την προηγούμενη παρατήρηση ώστε να βρείτε τον τύπο που υπολογίζει την τιμή του γινομένου p.

Εφαρμόζουμε Π. Θ στο ορθογώνιο τρίγωνο OPB (όπου PA=PB) και παίρνουμε ότι: $PB^2 = PA \cdot PB = p = \delta^2 - R^2$

5. I. Επαναλάβετε τα βήματα 1 & 2 όταν το σημείο P είναι μέσα στον κύκλο. Ισχύουν τώρα ανάλογα συμπεράσματα με τα βήματα 1 & 2; ☐ Ναι ☐ Όχι

   II. Προσπαθήστε να δώσετε τώρα τον τύπο που δίνει την τιμή του γινομένου p.

Ναι Θεωρούμε το ορθογώνιο τρίγωνο OPA ώστε $OP \perp AB$ και εφαρμόζουμε Π.Θ στο ορθογώνιο τρίγωνο OAP. Τότε θα είναι αντίστοιχα: $p = R^2 - \delta^2$

6. Γενικεύστε τα συμπεράσματα των ερωτήσεων 4 και 5 στο επόμενο πλαίσιο.

[2] Στα κενά κουτιά δίνονται οι αναμενόμενες από τους μαθητές απαντήσεις.

7. Βρείτε ένα γεωμετρικό μέγεθος που να περιγράφει το γινόμενο p.

Το γινόμενο p μπορεί να περιγράφει το εμβαδόν ενός ορθογωνίου Ε, με πλευρές PA και PB.

8. Με το σημείο P να είναι εξωτερικό του κύκλου, ανοίξτε το διακόπτη [**Αναπαράσταση**]. Εμφανίζεται ένα ορθογώνιο Ε με πλευρές PA και PB και η μέτρηση τ = PA+PB της ημιπεριμέτρου του.

I. Πειραματιστείτε για διάφορες θέσεις του σημείου B στον κύκλο (O,R) και παρατηρείστε τις τιμές της ημιπεριμέτρου τ. Τί φαίνεται να ισχύει για την περίπτωση που το B τείνει να ταυτιστεί με το A;

Η τιμή της ημιπεριμέτρου τ, φαίνεται να παίρνει μια ελάχιστη τιμή.

II. Αλλάξτε διαδοχικά την ακτίνα R του κύκλου (O,R) και την απόσταση δ και επαναλάβετε τον πειραματισμό. Διατυπώστε στο πλαίσιο την εικασία σας.

Όταν το B τείνει να ταυτιστεί με το A, η τιμή της ημιπεριμέτρου τ, γίνεται ελάχιστη.

9. Τι σχήμα φαίνεται να αποκτά το ορθογώνιο Ε, όταν το A τείνει να ταυτιστεί με το B; Δικαιολογείστε την απάντηση σας.

Τετράγωνο, αφού τότε PA=PB

10. Συνδυάζοντας τις παρατηρήσεις σας από το $7^{ο}$ και $8^{ο}$ βήμα, διατυπώστε έναν ισχυρισμό που να αφορά στα ευρήματα αυτών των βημάτων.

Από όλα τα ορθογώνια με το ίδιο εμβαδόν, το τετράγωνο έχει την ελάχιστη περίμετρο

$2^{η}$ Φάση

11. I. Αν θέσουμε PA=x και PB=y, γράψτε ένα σύστημα (Σ) δύο εξισώσεων με αγνώστους τα x και y που να περιγράφει τα μεγέθη p και τ.

$$\begin{cases} x \cdot y = p \\ x + y = \tau \end{cases} \quad (\Sigma)$$

II. Να δείξετε ότι το σύστημα (Σ) οδηγεί στην εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού: $x^2 - \tau x + p = 0$

12. Ανοίξτε το διακόπτη [q(x)]: Εμφανίζεται η γραφική παράσταση της παραβολής: $q(x) = x^2 - \tau x + p$.

Πειραματιστείτε για διάφορες τιμές των R και δ, καθώς και για διάφορες θέσεις του σημείου B.

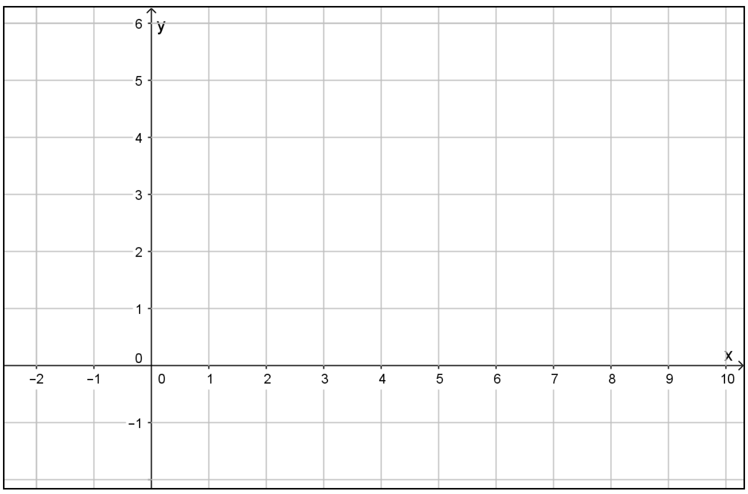
- Ποιο συμπέρασμα προκύπτει για τη σχετική θέση της παραβολής με τον άξονα xx΄;
- Πώς μεταφράζεται αυτό αλγεβρικά;

Η παραβολή q(x) ή τέμνει ή εφάπτεται στον άξονα xx΄ . Επομένως θα ισχύει ότι $\Delta \geq 0$.

13. Με βάση τις προηγούμενες παρατηρήσεις σας να αποδείξετε τον ισχυρισμό που διατυπώσατε στην $9^{η}$ ερώτηση.

$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow \tau^2 - 4p \geq 0 \Leftrightarrow \tau \geq 2\sqrt{p}$ και τότε $\tau_{min} = 2\sqrt{p}$. Σε αυτή την περίπτωση προκύπτει ότι: $x = y = \sqrt{p}$

14. Τί παριστάνουν οι εξισώσεις του συστήματος (Σ) σε ένα σύστημα συντεταγμένων xOy; Να τις αναπαραστήσετε προσεγγιστικά παρακάτω.



15. Πλησιάστε αρκούντως κοντά τα σημεία Β και Α.

Α. Τι φαίνεται να ισχύει για τη σχετική θέση των γραμμών που περιγράψατε στο προηγούμενο ερώτημα;

Β. Τι φαίνεται να ισχύει για τη γωνία $O\hat{E}Z$;

Η ευθεία x+y=τ φαίνεται να εφάπτεται στην υπερβολή xy=p και η γωνία ΟΕΖ να είναι ορθή.

16. Βρείτε στο σχολικό σας βιβλίο (Μαθηματικά Προσανατολισμού Β΄ Λυκείου – Κεφ. 3ο Κωνικές Τομές) σχετικό εδάφιο που να ερμηνεύει αλγεβρικά τον ισχυρισμό σας στην ερώτηση 15/Α. Αποδείξτε τον ισχυρισμό σας στην ερώτηση 15Β.

Αυτό οφείλεται στο ότι η δευτεροβάθμια εξίσωση που προκύπτει από τις δύο αυτές εξισώσεις έχει διακρίνουσα Δ=0 όταν Α=Β. Σχετικό εδάφιο σελ. 128:

Σχετική Θέση Ευθείας και Κωνικής

Ας θεωρήσουμε μία ευθεία $y=\lambda x+\beta$ και μία κωνική τομή $Ax^2+By^2+\Gamma x+\Delta y+E=0$. Η ευθεία ε και η κωνική C έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία, αφού το σύστημα

$$\begin{cases} y=\lambda x+\beta & (1) \\ Ax^2+By^2+\Gamma x+\Delta y+E=0 & (2) \end{cases}$$

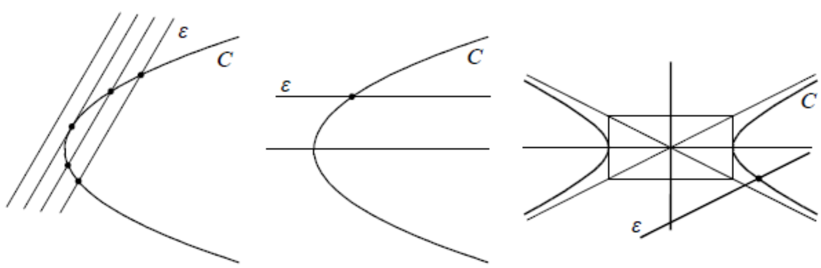
έχει το πολύ δύο διακεκριμένες λύσεις.

Για την επίλυση του συστήματος θέτουμε στη (2), όπου $y=\lambda x+\beta$, οπότε προκύπτει μια δευτεροβάθμια εξίσωση.

— Αν η εξίσωση αυτή έχει δύο ρίζες άνισες ή μια απλή ρίζα (όταν είναι 1ου βαθμού), τότε η ευθεία και η κωνική τέμνονται.

— Αν η εξίσωση έχει δύο ρίζες ίσες, δηλαδή αν είναι 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta=0$, τότε αποδεικνύεται ότι η ευθεία εφάπτεται της κωνικής.

—Τέλος, αν η εξίσωση δεν έχει ρίζες, τότε η ευθεία και η κωνική δεν έχουν κοινά σημεία.



Β. Από το 13ο ερώτημα έχει αποδειχθεί ότι: $A=B \Leftrightarrow x=y=\sqrt{p}$ οπότε σε αυτή την περίπτωση θα είναι: $\overrightarrow{OE}=(\sqrt{p},\sqrt{p}) \Rightarrow \lambda_{\overrightarrow{OE}}=1$ και τελικά η ΟΕ είναι κάθετη στην ευθεία (ε): x+y=τ

$3^η$ Φάση – Άσκηση[3]

1. Ορίζουμε το σημείο M_1 με συντεταγμένες $(\delta, f(\delta))$ με $f(\delta)=\delta^2-R^2$ ([4]) (διακόπτης M_1). Πειραματιστείτε για διάφορες θέσεις του σημείου P και παρατηρήστε τη γραμμή που διαγράφουν τα ίχνη του σημείου M_1.

   - Ποιο τμήμα γνωστής γραφικής παράστασης, φαίνεται να είναι αυτή η γραμμή; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

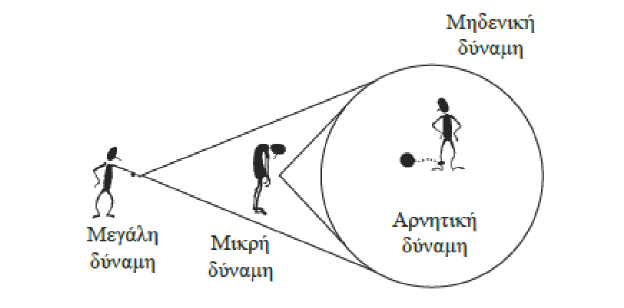
Τμήμα παραβολής x^2-R^2 αφού το δ μεταβάλλεται και το R είναι σταθερό.

2. Εξετάστε για ποιες θέσεις του σημείου P συμβαίνουν οι περιπτώσεις: $f(\delta)>0$, $f(\delta)=0$ και $f(\delta)<0$. Βρείτε στο σχολικό σας βιβλίο Γεωμετρίας σχετικό εδάφιο, που να δικαιολογεί γεωμετρικά, τα ευρήματα σας.

$f(\delta)>0$ αν και μόνο αν το P: εξωτερικό του κύκλου

$f(\delta)<0$ αν και μόνο αν το P: εσωτερικό του κύκλου

$f(\delta)=0$ αν και μόνο αν το P: σημείο του κύκλου



Σχήμα 20

(σελ. 202 σχολικό Ευκλείδεια Γεωμετρία)

3. Κλείστε το διακόπτη M_1. Ορίζουμε τώρα το σημείο M_2 με συντεταγμένες $(R, g(R))$ όπου $g(R)=\delta^2-R^2$.

   Πειραματιστείτε για διάφορες τιμές του R (διακόπτης → Μεταβολή R) και παρατηρήστε τη γραμμή που διαγράφουν τα ίχνη του σημείου M_2.

---

[3] Μπορεί να δοθεί ως άσκηση για υλοποίηση στο σπίτι.

[4] Η παράσταση δ^2-R^2 καλείται **δύναμη του σημείου P ως προς τον κύκλο (O,R)** και συμβολίζεται με: $\mathscr{D}^{P}_{(O,R)}$

Ποιο τμήμα γνωστής γραφικής παράστασης, φαίνεται να είναι αυτή η γραμμή; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

Τμήμα παραβολής δ^2-x^2 αφού το R μεταβάλλεται και το δ είναι σταθερό.

4. Εξετάστε τα σημεία της $2^{ης}$ ερώτησης και για την περίπτωση του σημείου M_2.

5. Με ανοικτό το διακόπτη M_2 ανοίξτε και το διακόπτη M_1 και δώστε πάλι [Μεταβολή του R].

- Τι παρατηρείτε τώρα για τη γραμμή που διαγράφουν τα ίχνη του σημείου M_1;
- Είναι γραφική παράσταση συνάρτησης;
- Πού οφείλεται αυτή η αλλαγή σε σχέση με την $1^η$ Ερώτηση;

Το σημείο M_1 έχει οριστεί ως εξής: $M_1(\delta, \delta^2 - R^2)$. Επομένως όταν δ=σταθερό και R: μεταβαλλόμενο, το σημείο M_1 κινείται στην κατακόρυφη ευθεία x=δ που ως γνωστό δεν είναι συνάρτηση.

6. Επαναλάβετε τον προηγούμενο πειραματισμό μεταβάλλοντας το δ. Τι παρατηρείτε για τη γραμμή που διαγράφει τώρα το σημείο M_2; Πού οφείλεται αυτή η αλλαγή σε σχέση με την $3^η$ ερώτηση;

Το σημείο M_2 έχει οριστεί ως εξής: $M_2(R, R^2 - \delta^2)$. Επομένως όταν R=σταθερό και δ: μεταβαλλόμενο, το σημείο M_2 κινείται στην κατακόρυφη ευθεία x=R που ως γνωστό δεν είναι συνάρτηση.

7. Α. Όταν το σημείο P είναι εξωτερικό του κύκλου, ανοίξτε το διακόπτη [τ(max)] και δώστε κίνηση στο σημείο B (διακόπτης [κίνηση B]). Εμφανίζεται το ίχνος του σημείου T που έχει συντεταγμένες $(x, x+\frac{p}{x})$ όπου $x = PA$ και $p = PA \cdot PB$. Έχει ακρότατα αυτή η συνάρτηση; Αν ναι, τι είδους ακρότατα έχει και σε ποιες θέσεις του σημείου B εμφανίζονται;

Παρατηρούμε ότι υπάρχει **ελάχιστο** όταν B=A και **μέγιστο** σε 2 θέσεις στις οποίες τα σημεία P, O και B είναι συνευθειακά.

Β. Να δικαιολογήσετε αλγεβρικά ή γεωμετρικά τα προηγούμενα ευρήματα.

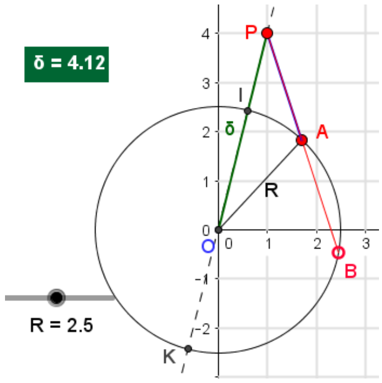
Για την περίπτωση Β=Α έχει διαπιστωθεί και στα ερωτήματα 9 & 10 και έχει αποδειχθεί στο 13° ερώτημα.

Για το **μέγιστο** σε 2 θέσεις στις οποίες τα σημεία P, O και B είναι συνευθειακά. Παρατηρούμε ότι σε αυτή την περίπτωση είναι: PA+PB=(δ-R)+(δ+R)=2δ και επομένως αρκεί να αποδειχθεί ότι:

$$x+\frac{p}{x}\le 2\delta \Leftrightarrow \frac{x^2+p}{x}\le 2\delta \Leftrightarrow x^2-2\delta x+p\le 0 \Leftrightarrow (x-\delta)^2+p-\delta^2\le 0 \Leftrightarrow$$
$$(x-\delta)^2+\delta^2-R^2-\delta^2\le 0 \Leftrightarrow (x-\delta-R)(x-\delta+R)\le 0$$

Που το τελευταίο ισχύει γιατί:

(I) $PI\le PA\le PK \Rightarrow \delta-R\le x\le \delta+R$



Παράρτημα

Η σχέση (Ι) λαμβάνει υπόψη την άσκηση 4 (σελ. 64) του σχολικού βιβλίου στην οποία ουσιαστικά ορίζεται η **απόσταση ενός (εξωτερικού) σημείου από έναν κύκλο**.

i) $M\hat{A}B > M\hat{A}\Gamma$,

ii) $\frac{\beta-\gamma}{2} < \mu_\alpha < \frac{\beta+\gamma}{2}$,

iii) $\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma < 2\tau$.

4. *Έστω κύκλος (Ο, R) διαμέτρου ΑΒ και σημείο Σ της ημιευθείας ΟΑ. Για κάθε σημείο Μ του κύκλου να αποδειχθεί ότι* $\Sigma A \leq \Sigma M \leq \Sigma B$. *(Το τμήμα ΣΑ λέγεται απόσταση του Σ από τον κύκλο).*

5. *Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Αν η διχοτόμος* δ_α *τέμνει κάθετα τη διάμεσο* μ_β, *να αποδείξετε ότι:*