

Problemas – Tema 2

CCSS Problemas resueltos - 3 - condiciones de contorno para obtener constante de integración

1. Hallar la primitiva de la función $f(x) = \frac{3}{(x+1)^2}$ que pasa por el punto $(0,1)$.

Recordamos la derivada de la función inversa $\rightarrow \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{f(x)} \right] = \frac{-f'(x)}{f^2(x)}$

Por lo tanto:

$$\int \frac{3}{(x+1)^2} dx = \frac{-3}{x+1} + C$$

Elegimos la primitiva $F(x)$ que pase por el punto $(0,1)$. Es decir:

$$F(0) = 1 \rightarrow \frac{-3}{0+1} + C = 1 \rightarrow C = 4 \rightarrow F(x) = \frac{-3}{x+1} + 4$$

2. Determina la ecuación de la curva $F(x)$ que verifica que $F(1)=2$, $F'(0)=3$ y $F''(x)=12x+3$.

Nos dan la segunda derivada de una función. Por lo tanto, debemos integrar dos veces.

$$F'(x) = \int F''(x) dx \rightarrow F'(x) = \int (12x+3) dx = 6x^2 + 3x + C$$

Utilizamos la condición de contorno $F'(0)=3$ para obtener la constante de integración C .

$$F'(0)=3 \rightarrow 0+0+C=3 \rightarrow C=3 \rightarrow F'(x)=6x^2+3x+3$$

Volvemos a integrar.

$$F(x) = \int F'(x) dx \rightarrow F(x) = \int (6x^2+3x+3) dx = 2x^3 + \frac{3x^2}{2} + 3x + D$$

Aplicamos la segunda condición de contorno para obtener D .

$$F(1)=2 \rightarrow 2 \cdot 1 + \frac{3 \cdot 1}{2} + 3 \cdot 1 + D = 2 \rightarrow D = \frac{-9}{2} \rightarrow F(x) = 2x^3 + \frac{3x^2}{2} + 3x - \frac{9}{2}$$

3. Determina la ecuación de la curva $F(x)$ que verifica que $F(0)=-5$, tiene un mínimo relativo en el punto de abscisa $x=2$ y $F''(x)=6x^2-12x$.

El mínimo relativo genera la condición $F'(2)=0$, ya que la primera derivada se anula en un extremo relativo.

Debemos integrar dos veces y aplicar las dos condiciones de contorno para determinar, de manera única, las constantes de integración.

$$F'(x) = \int F''(x) dx \rightarrow F'(x) = \int (6x^2 - 12x) dx = 2x^3 - 6x^2 + C$$

$$F'(2)=0 \rightarrow 16 - 24 + C = 0 \rightarrow C = 8 \rightarrow F'(x) = 2x^3 - 6x^2 + 8$$

Integramos nuevamente.

$$F(x) = \int F'(x) dx = \int (2x^3 - 6x^2 + 8) dx = \frac{x^4}{2} - 2x^3 + 8x + D$$

$$F(0) = -5 \rightarrow 0 - 0 + 0 + D = -5 \rightarrow D = -5 \rightarrow F(x) = \frac{x^4}{2} - 2x^3 + 8x - 5$$