

12月21日作业

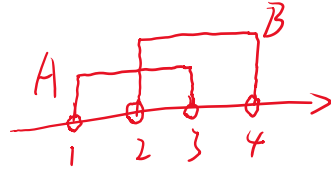
1. 已知集合 $A = \{x | 1 < x < 3\}$, $B = \{x | 2 < x < 4\}$, $C = \{x | 0 < x < a\}$.

(1) 求 $A \cup B$, $A \cap B$;

解: $\because A = \{x | 1 < x < 3\}$, $B = \{x | 2 < x < 4\}$

$$\therefore A \cup B = \{x | 1 < x < 4\}$$

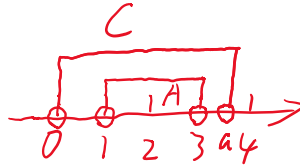
$$A \cap B = \{x | 2 < x < 3\}.$$



(2) 若 $A \subseteq C$, 求实数 a 的取值范围.

解: $\because A \subseteq C$

$$\therefore a \geq 3 \therefore a \in \{x | x \geq 3\}.$$



2. 已知不等式 $ax^2 - 5x + 2 < 0$ 的解集是 M .

(1) 若 $1 \in M$, 求实数 a 的取值范围;

解: ① 若 $a = 0$ 则 $-5x + 2 < 0$ 即 $M = \{x | x > \frac{2}{5}\}$, $1 \in M$

② 若 $a \neq 0$ 则 $ax^2 - 5x + 2 < 0$ 有解集且 $1 \in M$

$$\therefore \begin{cases} 25 - 8a > 0 \\ a < 3 \end{cases} \text{ 解得 } a < 3.$$

综上, a 的取值范围是 $(-\infty, 3)$.

(2) 若 $M = \{x | \frac{1}{2} < x < 2\}$, 求不等式 $-ax^2 + (2a+3)x - 6 < 0$ 的解集.

解: $\because ax^2 - 5x + 2 < 0$ 的解集是 $\{x | \frac{1}{2} < x < 2\}$, $\therefore a > 0$.

$$\therefore \frac{5}{a} = \frac{1}{2} + 2 \therefore a = 2.$$

$$\therefore -2x^2 + 7x - 6 < 0$$

$$\therefore 2x^2 - 7x + 6 > 0$$

$$\therefore (2x-3)(x-2) > 0$$

$$\therefore x < \frac{3}{2} \text{ 或 } x > 2$$

$\therefore$ 原不等式的解集为 $\{x | x < \frac{3}{2} \text{ 或 } x > 2\}$

$$\begin{matrix} 2x & - & 3 \\ x & - & 2 \end{matrix}$$

3. 某公司生产某种电子仪器的固定成本为 20000 元, 每生产一台仪器需增加投入 100 元,

已知总收入 R (单位: 元) 关于月产量 x (单位: 台) 满足函数:

$$R = \begin{cases} 400x - \frac{1}{2}x^2, & 1 \leq x \leq 400 \\ 80000, & x > 400 \end{cases}.$$

(1) 将利润 $P(x)$ (单位: 元) 表示为月产量 x 的函数; (利润 = 总收入 - 总成本)

解: 当 $1 \leq x \leq 400$ 时 $P(x) = 400x - \frac{1}{2}x^2 - 20000 - 100x = -\frac{1}{2}x^2 + 300x - 20000$

当 $x > 400$ 时 $P(x) = 80000 - 20000 - 100x = -100x + 60000$

$$\therefore P(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + 300x - 20000, & 1 \leq x \leq 400 \\ -100x + 60000, & x > 400 \end{cases}$$

(2) 若称 $g(x) = \frac{P(x)}{x}$ 为月平均单件利润 (单位: 元), 当月产量 x 为何值时, 公司所

获月平均单件利润最大? 最大月平均单件利润为多少元?

$$\text{解: } \because g(x) = \begin{cases} 300 - (\frac{x}{2} + \frac{20000}{x}), & 1 \leq x \leq 400 \\ \frac{60000}{x} - 100, & x > 400 \end{cases}$$

当 $1 \leq x \leq 400$ 时 $g(x) = 300 - (\frac{x}{2} + \frac{20000}{x}) \leq 300 - 2\sqrt{\frac{x}{2} \cdot \frac{20000}{x}} = 100$, 当 $x = 200$ 时 $g(x)_{\max} = 100$.

当 $x > 400$ 时 $g(x) = \frac{60000}{x} - 100$ 单调递减且 $g(x) < 50$ 取最大值.

$\therefore$ 当 $x = 200$ 时公司所获月平均单件利润最大为 100 元.

4. 已知函数 $f(x) = \frac{x+m}{x^2-4}$ 是定义在 $(-2, 2)$ 上的奇函数.

(1) 确定 $f(x)$ 的解析式;

解: $\because f(x)$ 是 $(-2, 2)$ 上的奇函数 $\therefore f(0) = 0$

$$\therefore \frac{m}{-4} = 0 \quad \therefore m = 0 \quad \therefore f(x) = \frac{x}{x^2-4} \quad (-2 < x < 2)$$

(2) 用定义证明: $f(x)$ 在区间 $(-2, 2)$ 上是减函数;

证明: 设 $-2 < x_1 < x_2 < 2$

$$\begin{aligned} \therefore f(x_1) - f(x_2) &= \frac{x_1}{x_1^2-4} - \frac{x_2}{x_2^2-4} = \frac{x_1(x_2^2-4) - x_2(x_1^2-4)}{(x_1^2-4)(x_2^2-4)} = \frac{x_1x_2^2 - 4x_1 - x_1^2x_2 + 4x_2}{(x_1^2-4)(x_2^2-4)} \\ &= \frac{x_1x_2(x_2-x_1) + 4(x_2-x_1)}{(x_1^2-4)(x_2^2-4)} = \frac{(x_2-x_1)(x_1x_2+4)}{(x_1^2-4)(x_2^2-4)} \end{aligned}$$

$\because -2 < x_1 < x_2 < 2, \therefore x_2 - x_1 > 0, x_1x_2 + 4 > 0, x_1^2 - 4 < 0, x_2^2 - 4 < 0, \therefore f(x_1) - f(x_2) > 0$

(3) 解不等式 $f(t-1) + f(t) < 0$.

$$\therefore f(x_1) > f(x_2)$$

$\therefore f(x)$ 在区间 $(-2, 2)$ 上是减函数.

解: $\because f(t-1) + f(t) < 0$

$$\therefore f(t-1) < -f(t)$$

$\because f(x)$ 是奇函数 $\therefore f(t-1) < f(t)$

$\because f(x)$ 是 $(-2, 2)$ 上的减函数.

$$\therefore -2 < -t < t-1 < 2 \quad \text{解得} \quad \frac{1}{2} < t < 2$$

$\therefore$ 不等式解集为 $\{t \mid \frac{1}{2} < t < 2\}$.