Teoría – Tema 9

Teoría - 21 - Producto vectorial

Producto vectorial

El producto vectorial es una operación interna entre dos vectores de tres dimensiones.

¿Qué significa esto? Que el resultado del producto vectorial es otro vector de tres dimensiones.

El producto vectorial de dos vectores $\vec{u}=(u_x,u_y,u_z)$ y $\vec{v}=(v_x,v_y,v_z)$ se denota $\vec{u}\times\vec{v}$ o bien $\vec{u}\wedge\vec{v}$.

Para obtener una “regla mnemotécnica” que permita calcular el vector resultante del producto vectorial, debemos recordar que todo vector puede expresarse como combinación lineal de los tres vectores unitarios de la base canónica.

$$\vec{u}=(u_x,u_y,u_z)=u_x\hat{i}+u_y\hat{j}+u_z\hat{k}$$

$$\vec{v}=(v_x,v_y,v_z)=v_x\hat{i}+v_y\hat{j}+v_z\hat{k}$$

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ u_x & u_y & u_z\\ v_x & v_y & v_z\end{vmatrix}=(u_y v_z-u_z v_y)\hat{i}+(u_z v_x-u_x v_z)\hat{j}+(u_x v_y-u_y v_x)\hat{k}$$

$$\vec{u}\times\vec{v}=(u_y v_z-u_z v_y,u_z v_x-u_x v_z,u_x v_y-u_y v_x)$$

Importante: El resultado del producto vectorial es otro vector. Repetimos: El resultado del producto vectorial es otro vector.

Ejemplo 1 resuelto

Calcula el producto vectorial de $\vec{u}=(2,3,1)$ **y** $\vec{v}=(1,2,1)$ **.**

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=3\hat{i}+\hat{j}+4\hat{k}-(3\hat{k}+2\hat{j}+2\hat{i})=\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}=(1,-1,1)$$

Algunas propiedades importantes del producto vectorial:

- Es anticonmutativo → $\vec{u}\times\vec{v}=-\vec{v}\times\vec{u}$
- Es distributivo respecto de la suma de vectores → $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\times\vec{v}+\vec{u}\times\vec{w}$
- El producto vectorial $\vec{u}\times\vec{v}$ es perpendicular al plano que contiene a las vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ → $(\vec{u}\times\vec{v})\perp\vec{u}$, $(\vec{u}\times\vec{v})\perp\vec{v}$. Esta propiedad nos permite, por ejemplo, obtener de forma directa un vector perpendicular a un plano, si conocemos dos vectores linealmente independientes del plano.
- El sentido del producto vectorial $\vec{u}\times\vec{v}$ viene dado por la regla del sacacorcho o por la regla de la

mano derecha: girar el primer vector sobre el segundo describiendo el camino más corto (por el menor ángulo). Algunos ejemplos intuitivos de este signo son: $\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k}$, $\hat{j}\times\hat{i}=-\hat{k}$, $\hat{j}\times\hat{k}=\hat{i}$, $\hat{k}\times\hat{j}=-\hat{i}$, $\hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}$, $\hat{i}\times\hat{k}=-\hat{j}$.

- El módulo del producto vectorial de dos vectores es igual al producto de los módulos de cada vector por el seno del ángulo que forman ambos vectores. Es decir: $|\vec{u}\times\vec{v}|=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot sen(\alpha)$.
- El módulo al cuadrado de un producto vectorial cumple la siguiente relación → $|\vec{u}\times\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2\cdot|\vec{v}|^2-(\vec{u}\cdot\vec{v})^2$

Ejemplo 2 resuelto

Sea el punto $P(1,2,-1)$ **y el plano dado en paramétricas** $\Pi:\left\{\begin{matrix} x=\alpha-\beta \\ y=1+\alpha-\beta \\ z=3-\alpha+2\beta \end{matrix}\right\}$ **. Obtener una recta perpendicular al plano que pase por el punto** P **.**

Una opción para resolver este problema sería obtener la ecuación general del plano, y de ahí sacar directamente el vector normal al plano. Y con ese vector perpendicular al plano y el punto P , escribir la ecuación de la recta solución.

Otra opción, usando el producto vectorial, es realizar el producto vectorial de los dos vectores linealmente independientes que pertenecen al plano, y cuyos valores podemos obtener de la expresión en paramétricas.

$$\vec{u}=(1,1,-1) \quad , \quad \vec{v}=(-1,-1,2) \quad \rightarrow \quad \vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}-(-\hat{k}+\hat{i}+2\hat{j})=\hat{i}-\hat{j}$$

$$\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}=\hat{i}-\hat{j}=(1,-1,0)$$

Este vector es perpendicular al plano. En efecto, si hubiésemos obtenido la ecuación general del plano, obtendríamos $\Pi: x-y+1=0$ → Donde es obvio que el vector normal al plano es $\vec{u_\Pi}=(1,-1,0)$.

Pues bien. Con este vector y el punto del enunciado, podemos trazar la ecuación de la recta perpendicular al plano.

$$r:\left\{\begin{matrix} x=1+\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=-1 \end{matrix}\right\}$$