

**Demostraciones Visuales de Integrales
Complejas con *GeoGebra*:**

UN ENFOQUE BASADO EN CAMPOS DE PÓLYA

José Saquimux

Universidad de San Carlos, Guatemala

28 de junio de 2022

Edición preliminar, 2017, Universidad de San Carlos de Guatemala.

Impreso en Guatemala. Documento de libre acceso. Cualquier parte de este libro puede ser reproducido, almacenado, o transmitido de cualquier manera sin necesidad de solicitar permiso al autor o institución, siempre que se mencione los créditos correspondientes y sea para usos no comerciales. Para mayor información, dirigirse al Departamento de Matemática de la Facultad de Ingeniería, Universidad de San Carlos. Ciudad Universitaria Zona 12. Ciudad de Guatemala, o al correo del autor, jmsaquimux@ing.usac.edu.gt

Las demostraciones en este libro se han incluido a manera de ejemplos instruccionales. Estas han sido creadas bajo cierta secuencia de comandos de *GeoGebra* y probados en su versión 5.0.

No se da garantía de que lo que está escrito en este libro esté libre de errores. Por lo que el autor no se hace responsable con respecto a su uso.

Saquimux, J.
Área de Matemática Aplicada.
Departamento de Matemática.
Facultad de Ingeniería.
Universidad de San Carlos, Guatemala.

Carátula: Diseño adaptado de https://en.wikibooks.org/wiki/LaTeX/Title_Creation.
Foto: Brújulas en el campo magnético de un imán, representación aproximada del campo normalizado de Pólya de $f(z) = 1/(z - z_0)^2$ tomado de <http://www.medioambiente.org/2012/05/la-mejor-foto-de-un-campo-magnetico.html>. Trazos decorativos tomados de <http://www.freepik.es>.

Prefacio

Debido a bondades pedagógicas propias, las demostraciones visuales¹, son herramientas tecnológicas de uso cada vez más frecuente en educación matemática universitaria de la actualidad.

En particular, para la enseñanza de integración compleja a nivel introductorio, se han propuesto diversas demostraciones elaboradas para visualizar distintos aspectos o representaciones geométricas de integrales complejas de línea y contorno cerrado. Tales demostraciones han sido desarrolladas en distintos softwares que permiten visualizar representaciones geométricas de conceptos matemáticos en ambiente dinámico.

En este libro mostramos la posibilidad de elaborar, y principalmente usar, demostraciones para visualizar algunas integrales de línea y contorno cerrado complejas en el ambiente dinámico e interactivo del *GeoGebra* siguiendo el enfoque de campos vectoriales propuesto por George Pólya.

En el Capítulo 1, presentamos algunas referencias bibliográficas a la fecha sobre visualización dinámica en educación matemática que sustentan las ideas expresadas más arriba y apoyan el posible uso de nuestras demostraciones propuestas. Presentamos y describimos brevemente algunas demostraciones visuales que ilustran diversas interpretaciones geométricas de integrales de línea complejas elaboradas por distintos autores y desarrolladas en diversos softwares de matemática dinámica, elaboradas a la fecha. Describimos brevemente el enfoque del campo de Pólya para visualizar representaciones geométricas y físicas de integrales de línea complejas desarrolladas en *GeoGebra* que presentamos en este libro. Señalamos las características básicas generales de las demostraciones a presentar, describimos su puesta en operación y sus posibilidades de uso pedagógico.

En el Capítulo 2, mostramos la construcción de la relación de Pólya: Las partes real e imaginaria de una integral de línea compleja se representan, respectivamente, como las integrales de componentes tangenciales y normales de

¹En este texto, “demostración visual” o simplemente “demostración”, hace referencia a un programa desarrollado en algún software matemático, diseñado para visualizar en ambiente dinámico e interactivo, interpretaciones geométricas de algún enunciado matemático. Comúnmente, en algunos sitios de internet (ver [?]) se designa con dicho nombre a este tipo herramienta visual. Una demostración visual no constituye ni reemplaza la prueba formal del enunciado que se visualiza, entendida esta última como una argumentación deductiva formal del enunciado a probar.

los vectores de Pólya sobre la curva de integración. Tales nociones y representaciones son la base para construir interpretaciones geométricas y físicas de integrales complejas que utilizamos en la construcción de las demostraciones que proponemos.

En el Capítulo 3, presentamos nociones e ideas que sustentan la construcción y uso didáctico de las representaciones o interpretaciones geométricas de las integrales complejas según el enfoque de Pólya. Así también, mostramos la posibilidad de transformar las representaciones geométricas de integrales que se visualizan en el plano complejo, a representaciones equivalentes, en dos planos reales que llamamos, planos de longitud de arco de las partes real e imaginaria. En estos planos, construimos dos curvas definidas sobre la longitud de arco del contorno de integración, que las llamamos, curvas de componentes tangencial y normal de los vectores de Pólya. Con estas representaciones, usamos el área neta bajo la curva de componentes tangencial (integral de componentes tangenciales) para visualizar la parte real de la integral, y el área neta bajo la curva de componentes normales (integral de componentes normales) para visualizar la parte imaginaria de la integral. Estas ideas y representaciones geométricas se pueden interpretar en términos físicos, como integrales de flujo tangencial y normal de Pólya a la curva de integración, esta representación física la presentamos en el Capítulo 4.

En el Capítulo 5, describimos algunas características generales y propias de matemática dinámica que ofrece *GeoGebra*, las cuales aprovechamos para construir las representaciones.

Los Capítulos 6 y 7, constituyen la parte central del texto. En ellos presentamos las demostraciones que proponemos, describimos su uso potencial, de cada una de ellas y señalamos la posibilidad de su uso aislado para explorar conceptos, y en conjunto, para establecer posibles trayectorias de enseñanza de integración compleja. En el Capítulo 6, presentamos demostraciones para explorar integrales de línea y contorno cerrado usando representaciones visuales de campos vectoriales de Pólya. A partir de ellas se exploran algunos resultados y hechos de integración de línea compleja. En el Capítulo 7, mostramos demostraciones, en las que además, de usar representaciones en el plano complejo, usamos principalmente representaciones en los planos de longitud de arco para visualizar las partes real e imaginaria de la integral. De ellas, aprovechamos simetrías en las curvas de componentes, o invarianza de valores numéricos generados, para explorar propiedades, establecer relaciones y estimar o inducir valores de las integrales en exploración. Las representaciones geométricas, son apoyadas con valores numéricos aproximados de las partes real e imaginaria de la integral, obtenidas a través de sumas de Riemann a partir de procesamientos geométricos y aritméticos que permite *GeoGebra*.

En el Capítulo 8, discutimos algunas posibilidades, bondades o expectativas y dificultades sobre su uso pedagógico de las demostraciones propuestas en la enseñanza de integración en cursos de variable compleja elemental.

Con la intención de motivar al lector interesado; finalizamos, el libro con un

anexo en el que presentamos una posible secuencia de comandos con *GeoGebra* para elaborar una demostración típica de las que presentamos.

Los archivos en *GeoGebra* correspondientes a algunas demostraciones que presentamos en este libro pueden descargarse del sitio, <http://mate.ingenieria.usac.edu.gt>. Seguir la cadena de búsqueda, ESTUDIANTES->CURSO->MATEMATICA APLICADA 5->TIPO DE ARCHIVO->PROBLEMAS RESUELTOS.

José Saquimux
28 de junio de 2022

Capítulo 1

Preámbulo

1.1. Demostraciones en educación matemática

Las demostraciones visuales interactivas son un recurso, de uso cada vez más frecuente y aceptación, en la enseñanza de la matemática actual. Esto puede constatare revisando diferentes publicaciones de distintos reportes de trabajos o proyectos de investigación sobre su uso pedagógico actual (ver p.e. [?]), y la existencia de una variedad de demostraciones visuales puestos en sitios web construidos con fines didácticos, por ejemplo, en *GeoGebra* (<http://www.geogebra.org>), y en Wolfram Mathematica (<http://demonstrations.wolfram.com>), entre otros.

Como se menciona en [?], creemos que ésta tendencia de uso creciente y de más aceptación se debe, principalmente, a que con dichas herramientas se pueden proponer ambientes de aprendizajes dinámico, interactivo, explorativo y visual, basadas en actividades que posibilitan involucrar a los estudiantes en procesos de pensamiento matemático de exploración, verificación, descubrimiento, experimentación o inducción. Actividades, que podrían motivar al estudiante el estudio formal de los contenidos involucrados, así también consideramos que pueden ser de útil apoyo y/o complemento a las realizadas con representaciones simbólicas (analíticas) en ambientes de aprendizaje más estáticos de papel y lápiz, o bien asistidos con sistemas algebraicos por computadora. En [?] se discute con más detalle esta temática de enseñanza-aprendizaje.

Las demostraciones visuales a nivel universitario ofrecen oportunidades de participación activa del estudiante en procesos de descubrimientos, convencimiento significativo, construcciones personales, se cree que la participación en experiencias activas, pueden ayudar a construir raíces conceptuales profundas [?]. En el mismo sentido, en [?] se afirma que las demostraciones visuales interactivas en las que el estudiante participa manipulando el “ratón” como interfaz enactiva, para seleccionar y controlar la imagen de la pantalla por medio de movimientos manuales intuitivos, le permite construir conceptos matemáticos basados en su percepción humana subyacente. Además, cree que, su uso puede beneficiar a aquellos estudiantes que necesitan una visión intuitiva de cier-

tos conceptos matemáticos. Citados en [?], Leikin y Grossman, argumentan que los cambios dinámicos en las representaciones geométricas en la pantalla, asociados a funciones de arrastres y deslizamientos ejecutados por el usuario, promueven y le ayudan a generar preguntas del tipo, *qué pasa sí*, y los anima a pensar a través de los cambios observados.

1.2. Demostraciones en integración compleja

Para la enseñanza de integración compleja a nivel introductorio, existen varias demostraciones dinámicas y/o interactivas creadas para visualizar distintas interpretaciones geométricas y físicas de integrales complejas. Por ejemplo; elaborados en *Cabri II Plus*, (www.cabri.com), en [?], se presentan demostraciones para visualizar integrales de $f(z) = 1/z^n$, n entero, sobre una circunferencia centrada en el origen a través de su representación geométrica aproximada como una suma compleja-vectorial de Riemann $\sum f(z_k)\Delta_k$, sobre la circunferencia. Por ejemplo presenta la demostración para inducir $\oint_C dz/z = 2\pi i$ mostrada en la Figura 1.1

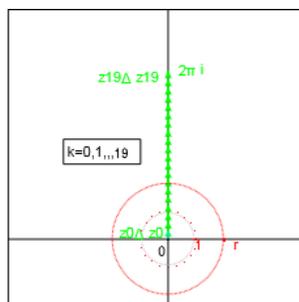


Figura 1.1: Visualización de [?] para inducir $\oint dz/z = 2\pi i$.

También usando *Cabri*, en [?] se muestran algunas demostraciones para visualizar integrales complejas basándose en el enfoque vectorial de Pólya: La parte real de integral se visualiza como el área neta bajo la curva de componentes tangenciales de los vectores de Pólya sobre la curva o contorno de integración, y la parte imaginaria de integral se visualiza como el área neta bajo la curva de componentes normales de los vectores de Pólya a la curva de integración. Por ejemplo, en la Figura 1.2 se muestra una imagen de la demostración para visualizar la integral $\oint_C dz/(z - z_0)^3 = 0$. La curva de componentes tangenciales en rojo y normales en azul, ambas curvas parecen ser dos períodos completos de senoides, el área neta bajo ambas es cero, por lo que la integral deber ser cero.

Usando *Mathematica* (www.wolfram.com), en [?] se presentan demostraciones para visualizar y argumentar, el teorema del residuo, el teorema de Cauchy, y el valor principal de Cauchy por medio de arrastres en el plano complejo del

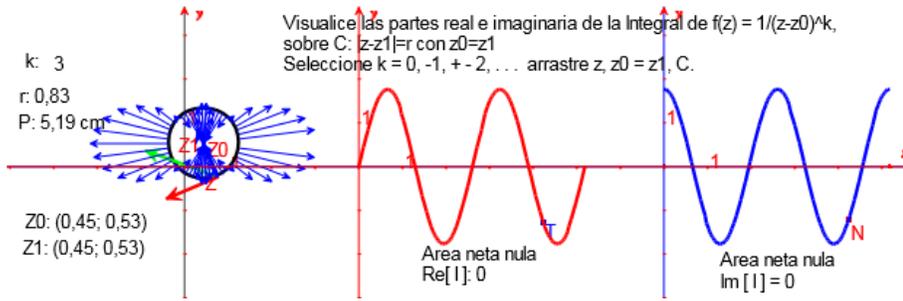


Figura 1.2: Visualización de [?] para inducir $I = \oint_C dz/(z - z_0)^3 = 0$, con z_0 el centro de la circunferencia, $\text{Im}I = \text{Re}I = 0$

punto z_0 en la integral $(1/2\pi i) \oint_C 1/(z - z_0) dz$ sobre una circunferencia deslizable de radio fijo. En la Figura 1.3, se muestran imágenes para visualizar dicha propiedades.

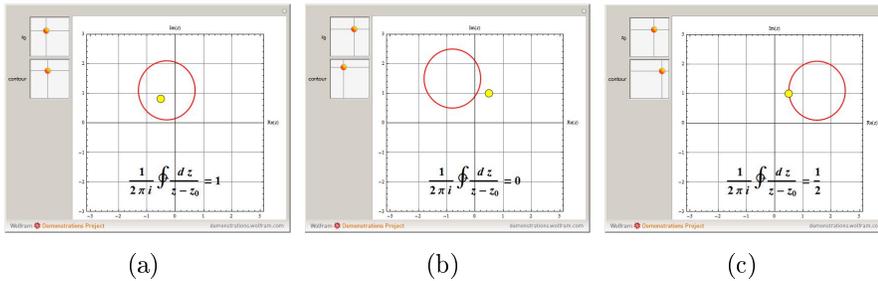


Figura 1.3: Imágenes de demostraciones de [?] con Mathematica.

En [?] también elaborados en *Mathemática*, se presentan algunas relaciones geométricas, usando campos y vectores ordinarios, para visualizar algunas integrales de forma $\oint_C z^n dz$, $C : |z| = 1$, n entero. La demostración genera punto a punto del valor aproximado de la integral. La Figura 1.4 muestra unas imágenes de tal demostración.

En otra demostración elaborada en *Mathematica*, en [?], se presentan vectores del campo de Pólya de funciones y los valores de la integral compleja sobre una circunferencia. En esta demostración el usuario tiene opciones de seleccionar una de las funciones predeterminadas, elegir los radios de las circunferencias y activar o desactivar el campo de Pólya, visualizar las curvas de integrales de flujo tangencial y normal, entre otras. La Figura 1.5 presenta una imagen de esta demostración.

Finalmente, en [?] y [?] usando *GeoGebra*, se presentan construcciones geométricas de integrales de línea y contorno cerrado usando la definición como el límite de una suma compleja-vectorial aproximada para elaborar su representación visual y generar su valor numérico. Con ellas explora visualmente algunas propiedades y resultados de integración compleja. La Figura 1.6 muestra imá-

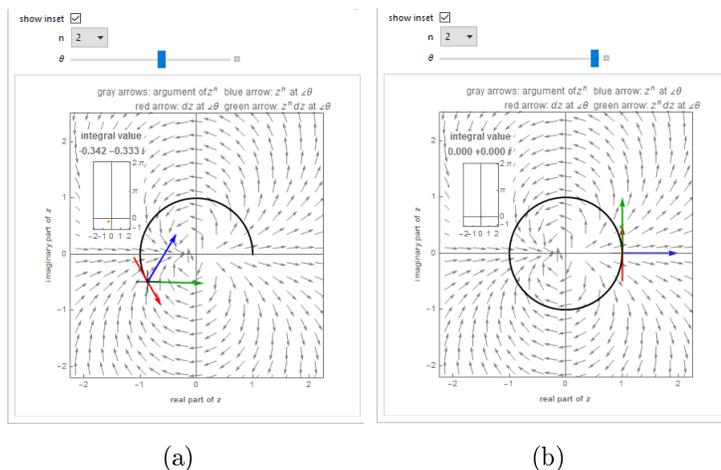


Figura 1.4: Imágenes de demostraciones de [?] con *Mathematica*.

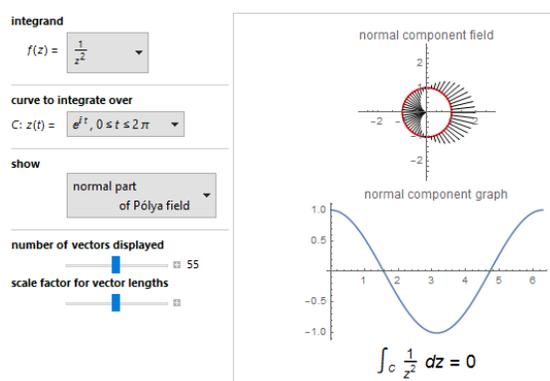


Figura 1.5: Imagen de demostración de [?] con *Mathematica*.

genes de estas demostraciones.

1.3. Demostraciones con el enfoque de Pólya

Tratando de actualizar, y principalmente, mejorar las demostraciones elaboradas con *Cabri* en [?], en este documento presentamos un conjunto de demostraciones interactivas para visualizar algunas integrales de línea y contorno cerradas complejas en el ambiente dinámico del *GeoGebra* basándonos en el enfoque de campos de Pólya. En este enfoque, a la integral $\oint_C f(z)dz$, a $f(z) = u + iv$ se le asocia el campo vectorial de Pólya dado por $\langle u, -v \rangle$ en el plano complejo. Con esta asociación se demuestra que la parte real de la integral de línea se puede visualizar como la integral definida de componentes tangentes de los vectores de Pólya sobre C o integral de flujo tangencial a C , y que su parte imaginaria se puede visualizar como la integral definida de com-

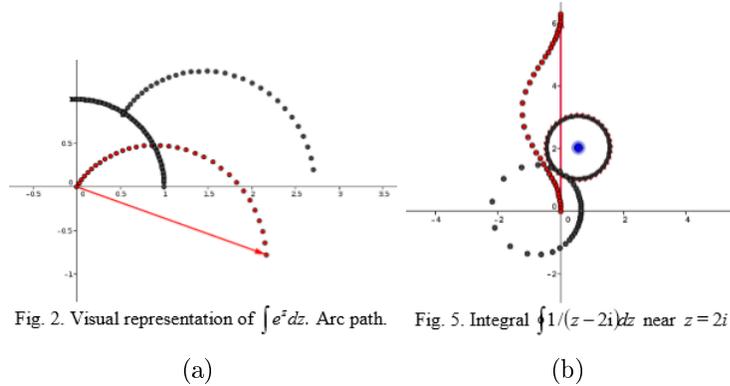


Figura 1.6: Imágenes de demostraciones de [?] con *GeoGebra*.

ponentes normales del campo de Pólya sobre C o integral de flujo normal a C . Por lo que, si disponemos de representaciones visuales de vectores de Pólya de $f(z)$ sobre la curva de integración C , de ellas podemos estimar las partes real e imaginaria de la integral. Nuestra intención es elaborar demostraciones de las que podamos visualizar dichas interpretaciones geométricas en ambiente dinámico con fines didácticos.

Dividimos las demostraciones en dos grupos, uno en las que se visualizan el campo de Polya en cierta región del plano complejo y la curva de integración inmersa en dicho campo, y otro en la que se visualizan las integrales definidas de las componentes tangentes y normales consideradas como áreas netas bajo curvas de componentes tangentes y normales. A continuación ilustramos ejemplos típicos.

1.3.1. Visualización en el plano complejo

Las visualizaciones de estas demostraciones, pueden considerarse como una aplicación directa en *GeoGebra* de algunas ideas, sugerencias y propuestas de [?], [?] y [?]. Por ejemplo, en la Figura 1.7 presentamos imágenes de demostraciones para visualizar en a) la dependencia de la trayectoria en la integral $\int_C 0,41\bar{z}dz$ sobre las trayectorias $C_1 : PQR$ y $C_2 : PSR$, en ella se muestra el campo de Pólya de la función no analítica en todo el plano complejo $f(z) = 0,41\bar{z}$, y las trayectorias C_1 y C_2 ; y en, b) para explorar el resultado $\oint_C dz/(z - z_0) = 2\pi i$, en esta se presenta el campo de $f(z) = 1/(z - z_0)$ y la circunferencia $|z - z_0| = r$ para ciertos valores de z_0 y r . Animamos al lector, a justificar visualmente dichos hechos sobre esas integrales, apoyándose de la interpretaciones de campos de Polya.

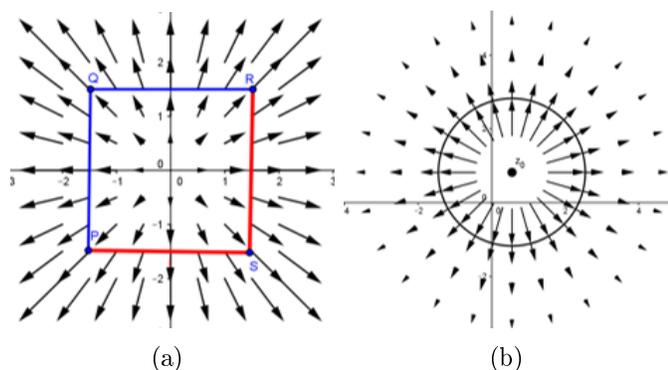


Figura 1.7: Imágenes de demostraciones de [?] con *GeoGebra*.

1.3.2. Visualización de partes real e imaginaria

En el segundo grupo de demostraciones, ilustramos la posibilidad de transformar las representaciones geométricas y físicas de integrales de línea complejas que se visualizan en el plano complejo, a representaciones equivalentes, en dos planos reales que llamamos, planos de longitud de arco de la parte real e imaginaria. En estos planos, definimos dos curvas definidas sobre la longitud de arco del contorno de integración, que las llamamos, curvas de componentes tangencial y normal de los vectores de Pólya o curvas de flujo tangencial y normal a la curva de integración. Con estas representaciones, usamos el área neta bajo la curva de componentes tangencial (o integral de flujo tangencial) para visualizar la parte real de la integral, y el área neta bajo la curva de componentes normales (o integral flujo normal) para visualizar la parte imaginaria de la integral.

La Figura 1.8 muestra la pantalla de trabajo para explorar integrales de la forma $\oint_C dz/(z - B)^n$, B dentro de $C : |z - A| = r$ y $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. En dicha pantalla se visualiza que para el caso de $n = 2$ ambas partes real e imaginaria deben ser nulas.

En esa misma demostración seleccionando $n = 1$ y eligiendo $A = B$, centro de C y punto singular de $f(z)$; se obtiene la imagen de la Figura 1.9. En ella se visualizan que la parte real debe ser nula y que la parte imaginaria debe ser $2\pi i$

1.3.3. Características y descripciones generales

Como ilustran las imágenes de las demostraciones descritas en la Sección 1.3.2, su diseño permite que el usuario tenga cierto grado de interacción con ellas. Entre las principales acciones que el usuario puede ejecutar, mencionamos,

- Ingresar en los comandos establecidos el conjugado de la función $f(z)$ a explorar bajo ciertas limitaciones de visualización apropiadas,

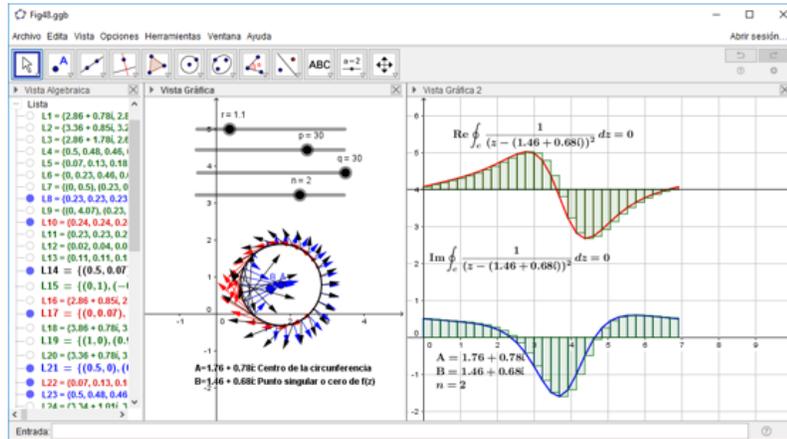


Figura 1.8: Demostración para explorar integrales $\oint_C dz/(z - B)^n$

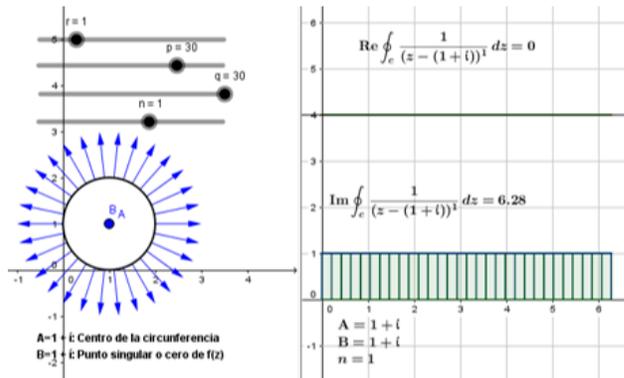


Figura 1.9: Demostración para explorar integrales $\oint_C dz/(z - B) \approx 2\pi i$

- Elegir los parámetros complejos en $f(z)$, por medio de funciones de arrastre,
- Modificar o deformar la curva de integración, por medio de funciones arrastre,
- Elegir el número total de vectores y componentes a visualizar sobre la curva de integración por medio de deslizadores, y
- Construir los vectores de Pólya de $f(z)$, las áreas netas y los valores acumulados de las integrales, punto a punto, sobre la curva de integración, por medio de un deslizador.

Con ellas esperamos proponer al usuario un ambiente de aprendizaje dinámico e interactivo, con una variedad de funciones de arrastre, deslizamientos y

cambios, tales que, como afirman Leikin y Grossman (citados en [?]), le ayude a motivar preguntas de aprendizaje explorativo del tipo; *qué sucede si*, esto es, que sucede con el valor de la integral, si el usuario efectúa determinado cambio en alguno de los elementos de la integral que explora.

Presentamos y describimos, principalmente, demostraciones para visualizar integrales de $f(z) = Az + B$, y $f(z) = A\bar{z} + B$, con A y B complejos, sobre segmentos y arcos circulares deformables; integrales de $f(z) = 1/(z - z_0)^n$, $n = 0, \pm 1, \dots$ sobre circunferencias, cuadriláteros y curvas más generales deformables, con z_0 dentro, sobre o fuera del contorno; integrales de $f(z) = \sin z/(z - z_0)$ y $f(z) = z^3/(z - z_0)$ y otras funciones, sobre circunferencias y otros contornos cerrados con z_0 dentro del contorno. Una demostración específica está elaborada para visualizar la integral $f(z) = 1/(z^2 + z_0)$ sobre circunferencias apropiadas.

Con tales demostraciones, ilustramos la posibilidad de proponer actividades de aprendizaje dinámico, que ayuden al usuario a visualizar integrales complejas y a elaborar ideas primarias e intuitivas sobre algunos resultados y propiedades importantes de integración compleja.

Esperamos lograr mostrar la posibilidad de construir un conjunto organizado de demostraciones con *GeoGebra*, según el enfoque de Pólya, que sean de cierta utilidad efectiva en la enseñanza de integración compleja a nivel introductorio.

Capítulo 2

Representación de Pólya

Revisemos los fundamentos matemáticos que permite elaborar interpretaciones geométricas y físicas, y correspondientes representaciones visuales, de integrales de funciones complejas sobre curvas y contornos cerrados simples en términos del campo de Pólya.

El campo de Pólya de una función compleja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, se define como el campo vectorial en el plano complejo donde $f(z)$ esté definida,

$$\vec{W} = \langle u(x, y), -v(x, y) \rangle \quad (2.1)$$

El campo de la Ecuación (2.1) está asociado a la función conjugada de $f(z)$,

$$\overline{f(z)} = u(x, y) - iv(x, y) \quad (2.2)$$

En la Figura 2.1(a) se presenta el campo de Pólya de una función compleja y una curva orientada $C : z_1 z_2 z_3 z_4$ definida por pedazos, dispuesta en dicho campo; en la Figura 2.1(b) se muestran solamente los vectores del campo de Pólya de esa misma función sobre la curva orientada $C : z_1 z_2 z_3 z_4$. Estos últimos vectores sobre C son de interés central en el contenido de este libro.

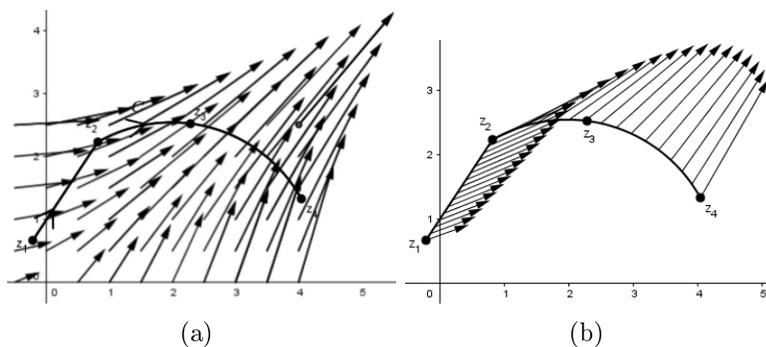


Figura 2.1: a) Curva C en el campo de Pólya, b) Vectores de Pólya sobre C .

En la Figura 2.2, vemos representaciones de los vectores complejos $f(z) =$

$u + iv, \overline{f(z)} = u - iv$ y vectores de Pólya $\mathbf{W} = \langle u, v \rangle$ en $z = x + iy$ sobre la curva orientada $C : z_1 z_2 z_3 z_4$.

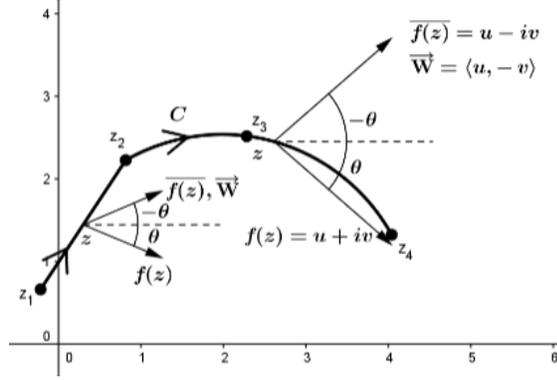


Figura 2.2: Visualización de $f(z)$, $\overline{f(z)}$ y $\overline{\mathbf{W}}$ en z sobre C .

Según [?], podríamos decir que el enfoque de interpretar integrales de línea compleja en términos de campos vectoriales, inició cerca de los años de 1974, cuando Polya y Latta publicaron su texto de variable compleja [?], en ese texto, muestran que una integral de una función compleja $f(z)$ sobre una curva orientada suave C ,

$$\int_C f(z) dz \quad (2.3)$$

puede interpretarse geométrica y físicamente, en términos del campo de Pólya de $f(z)$, definido por $\overrightarrow{\mathbf{W}} = \langle u(x, y), -v(x, y) \rangle$ con $z = x + iy$ sobre la curva C .

Más precisamente, Polya y Latta en [?], mostraron que una integral de línea de una función compleja $f(z)$ continua definida a lo largo de una curva orientada, simple y suave C , (extendible a suave por pedazos) puede expresarse en términos de integrales reales de proyecciones de $\overrightarrow{\mathbf{W}}$ sobre los vectores unitarios tangente $\overrightarrow{\mathbf{T}}$ y normal $\overrightarrow{\mathbf{N}}$ sobre C , definidas en la variable de longitud de arco. A estas integrales se les asocia interpretaciones físicas de trabajo y flujo.¹

Supongamos la función compleja $f(z) = u + iv$ definida en todos los puntos z sobre una curva suave orientada simple C en el plano complejo. La integral de $f(z)$ sobre C , podemos definirla usando el procedimiento de descomponerla en sus partes real e imaginaria, así,

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_C (u + iv)(dx + idy) \\ &= \int_C (udx - vdy) + i(udy + vdx) \end{aligned} \quad (2.4)$$

¹Es interesante señalar que estas interpretaciones y representaciones, Pólya y Latta, en su texto [?], las presentan en sentido general, pero no las usan para visualizar integrales complejas en el tratamiento que presentan de este tema

De la relación (2.4) definimos,

$$\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + i \int_C udy + vdx \quad (2.5)$$

En la definición de (2.5)² expresando $udx - vdy$ y $udy + vdx$ en términos del producto punto de vectores, tenemos,

$$\int_C f(z)dz = \int_C \langle u, -v \rangle \cdot \langle dx, dy \rangle + i \int_C \langle u, -v \rangle \cdot \langle dy, -dx \rangle \quad (2.6)$$

En las integrales del lado derecho de (2.5) vemos que aparecen vectores del campo de Pólya, definido en (2.1).

Siendo $\langle dx, dy \rangle$ vector tangente a C según la orientación de ésta, y notando que,

$$\langle dx, dy \rangle \cdot \langle dy, -dx \rangle = 0 \quad (2.7)$$

y

$$-i(dx, idy) = dy - idx \quad (2.8)$$

de las ecuaciones (2.7) y (2.8) se sigue que $\langle dy, -dx \rangle$ es el vector normal que se obtiene al rotar el vector tangente a la curva orientada C , un ángulo de $-\pi/2$, como se muestra en la Figura 2.3. Para su visualización, pueden emplearse las reglas: Al desplazarse según la orientación de C definida por pedazos, la tangente queda *enfrente* y la normal a mano *derecha*.

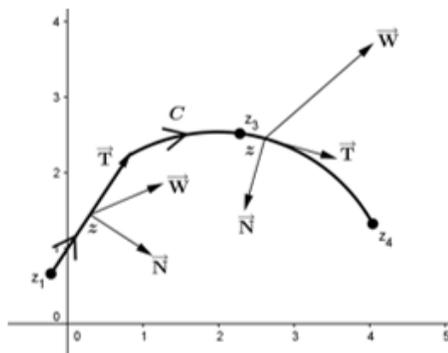


Figura 2.3: Vectores \mathbf{T} y \mathbf{N} sobre C orientada y el vector de Pólya \mathbf{W}

Con estas últimas observaciones, podemos reescribir (2.6) en términos de vectores tangente y normal unitarios, y el vector de campo de Pólya.

²Esta definición puede construirse formalmente, ver, por ejemplo [?, págs. 82-84]. Esta misma definición puede extenderse a curvas compuestas por arcos continuamente diferenciables, abiertas o cerradas simples.

$$\begin{aligned} \int_C f(z)dz &= \int_C \langle u, -v \rangle \cdot \frac{\langle dx, dy \rangle}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} \sqrt{dx^2 + dy^2} \\ &+ \int_C \langle u, -v \rangle \cdot \frac{\langle dy, -dx \rangle}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} \sqrt{dx^2 + dy^2} \end{aligned} \quad (2.9)$$

De la que finalmente, obtenemos la *representación* de Pólya de integrales de línea compleja,

$$\int_C f(z)dz = \int_C \vec{\mathbf{W}} \cdot \vec{\mathbf{T}} ds + i \int_C \vec{\mathbf{W}} \cdot \vec{\mathbf{N}} ds \quad (2.10)$$

Donde $\vec{\mathbf{W}}$ es un vector de campo de Pólya sobre C , $\vec{\mathbf{T}}$ el vector tangente unitario, $\vec{\mathbf{N}}$ el vector normal unitario, y ds el diferencial de longitud de arco, en cada punto $z = x + iy$ sobre la curva orientada C . Para abreviar, en lo sucesivo algunas veces le llamaremos simplemente curva C .

Capítulo 3

Interpretación geométrica

3.1. Integral de línea

Primeramente, resaltemos y explicitemos el hecho importante que nos muestra la ecuación de Pólya (2-10). Esto es, la integral $\int_C f(z)dz$ puede expresarse en términos de dos integrales reales que representan su parte real e imaginaria,

$$\int_C f(z)dz = \underbrace{\int_C \vec{W} \cdot \vec{T} ds}_{\text{Parte real}} + i \underbrace{\int_C \vec{W} \cdot \vec{T} ds}_{\text{Parte imaginaria}} \quad (3.1)$$

La primera integral del lado derecho de (3.1) nos proporciona la parte real de la integral de línea compleja,

$$\text{Re} \left[\int_C f(z)dz \right] = \int_C \vec{W} \cdot \vec{T} ds \quad (3.2)$$

mientras que la segunda integral de lado derecho nos proporciona la parte imaginaria de dicha integral de línea compleja.

$$\text{Im} \left[\int_C f(z)dz \right] = \int_C \vec{W} \cdot \vec{N} ds \quad (3.3)$$

Construyamos representaciones geométricas para visualizar los productos punto: $\vec{W} \cdot \vec{T}$ y $\vec{W} \cdot \vec{N}$ en un punto z sobre la curva C .

Por propiedades del producto punto, sabemos que $\vec{W} \cdot \vec{T}$ es el valor de la proyección del vector de campo \vec{W} sobre el vector unitario \vec{T} . Así también, $\vec{W} \cdot \vec{N}$ es el valor de la proyección del vector de campo \vec{W} sobre el vector unitario \vec{N} .

Recordemos que, dependiendo de los ángulos entre \vec{W} y los vectores unitarios, el valor de la proyección es positivo cuando la proyección queda en

el sentido del vector unitario, es negativo cuando la proyección queda en el sentido opuesto, y cero cuando la proyección es nula.

En la Figura 3.1 las proyecciones de \vec{W} sobre los vectores unitarios en los dos puntos sobre $C : z_1 z_2 z_3 z_4$, se visualizan por medio de segmentos orientados. Esto es, las longitudes de los segmentos representan los valores absolutos de las proyecciones y su ubicación con respecto a la dirección de los vectores unitarios nos proporciona el signo de la proyección.

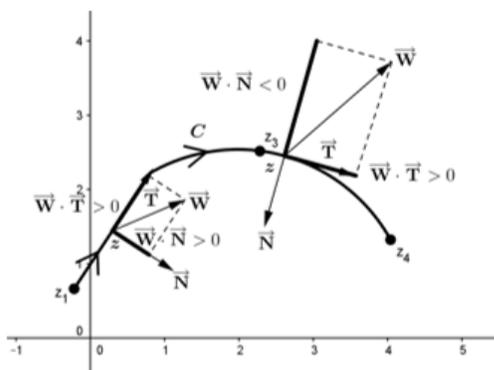


Figura 3.1: Visualización de proyecciones orientadas de \vec{W} sobre vectores unitarios

En la Fig. 3.1 establecemos las siguientes interpretaciones geométricas en un punto z sobre la curva $C : z_1 z_2 z_3 z_4$.

- $\vec{W} \cdot \vec{T}$: El segmento correspondiente a la proyección de \vec{W} sobre \vec{T} , junto a su signo asociado.
- $\vec{W} \cdot \vec{N}$: El segmento correspondiente a la proyección de \vec{W} sobre \vec{N} , junto a su signo asociado.

Para determinar visualmente los signos de las proyecciones, podemos usar los criterios mencionados sobre las direcciones de los vectores unitarios: desplazándonos según la *orientación* de la curva, $\vec{W} \cdot \vec{T}$ es positiva cuando el segmento queda enfrente y negativa cuando éste queda atrás (regla *frente-atrás*); mientras que $\vec{W} \cdot \vec{N}$ es positiva cuando el segmento queda a mano derecha y negativa cuando este queda a mano izquierda (regla de la *mano derecha*). En tanto que es cero, si la proyección es nula.

3.1.1. Parte imaginaria

Construyamos representaciones visuales de la integral del lado derecho de la Ecuación 3.3. La expresión, $\vec{W} \cdot \vec{N} ds = (\vec{W} \cdot \vec{N}) ds$ puede visualizarse aproximadamente en términos de productos de longitudes de segmentos (con signos

asociados según *la regla de mano derecha*) y longitudes de incrementos de arco Δs sobre C .

Así, si construimos más segmentos correspondientes a las proyecciones normales de los vectores de Pólya sobre C de z_1 a z_4 como las que vemos en la Figura 3.1, obtenemos la representación de la Figura 3.2

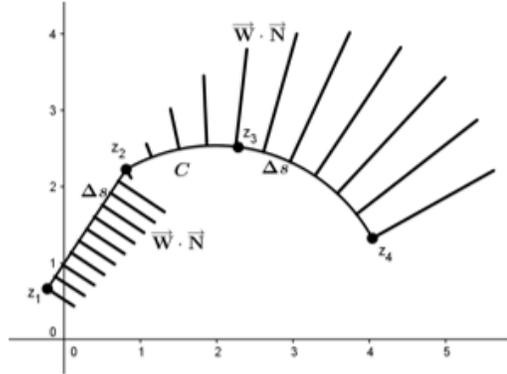


Figura 3.2: Visualización de $\vec{W} \cdot \vec{N}\Delta s$, $\sum \vec{W} \cdot \vec{N}\Delta s$ e $\int_C \vec{W} \cdot \vec{N}ds$.

En la Figura 3.2, si estimamos visualmente los productos $\vec{W} \cdot \vec{N}\Delta s$ en cada punto indicado y su suma, podemos tener una idea de $\sum \vec{W} \cdot \vec{N}\Delta s$, y con esta tener información aproximada de $\int \vec{W} \cdot \vec{N}ds$. En efecto, desplazándonos sobre C de z_1 a z_2 , y usando la regla de la mano derecha establecemos que las proyecciones son positivas, por lo que la suma es positiva. Mientras que de z_2 a z_4 sobre C , con la regla de la mano derecha establecemos que, exceptuando la primera, las proyecciones son negativas, por lo que la suma es negativa. Y comparando visualmente las longitudes de las proyecciones positivas y negativas y las longitudes de arco de z_1 a z_2 y de z_2 a z_4 ; estimamos que la suma $\sum \vec{W} \cdot \vec{N}\Delta s$ sobre la curva C debe ser negativa. Por lo que logramos establecer que $\int_C \vec{W} \cdot \vec{N}ds = \text{Im} \int_C f(z)dz < 0$.

Por otro lado, haciendo que Δs tienda a cero, estos incrementos de arco tienden a ser incrementos de segmentos (si la curva no es lineal). Por lo que a los productos $\vec{W} \cdot \vec{N}\Delta s$, podemos considerarlos como áreas de rectángulos *perpendiculares* sobre la curva C , como se ilustra en la Figura 3.3.

La Figura 3.3, es una representación visual en términos de áreas de rectángulos perpendiculares a C de la suma de Riemann $\sum \vec{W} \cdot \vec{N}\Delta s$ sobre C , la cual aproxima a $\int_C \vec{W} \cdot \vec{N}ds$ sobre C . En forma parafraseada, sugerimos la interpretación en el plano complejo,

$$\int_C \vec{W} \cdot \vec{N}ds = \underbrace{\left(\begin{array}{l} \text{Suma neta de las áreas de los rectángulos} \\ \text{normales a } C, \text{ formados por las proyecciones} \\ \vec{W} \cdot \vec{N} \text{ y los diferenciales de arco } ds \text{ sobre } C \end{array} \right)}_{\text{En el plano complejo}} \quad (3.4)$$

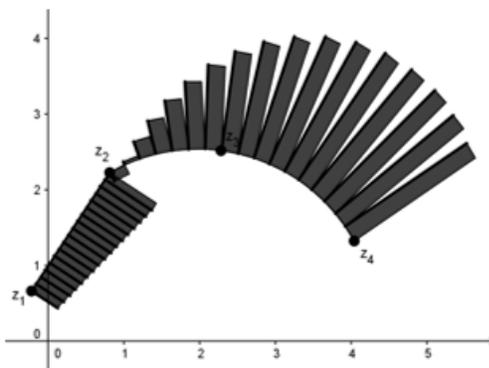


Figura 3.3: Visualización de $\sum \mathbf{W} \cdot \mathbf{N} \Delta s$ que aproxima a $\int_C \mathbf{W} \cdot \mathbf{N} ds$ en el plano complejo como suma neta de áreas de rectángulos

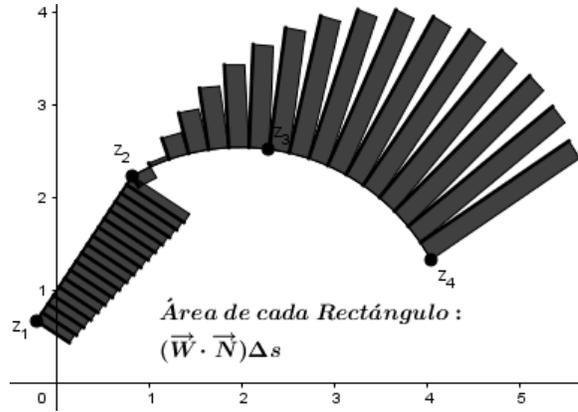
En la Figura 3.3, desplazándonos sobre la curva siguiendo la orientación de z_1 a z_4 , y usando la regla de la mano derecha para determinar el signo de las áreas de los rectángulos; podemos visualizar que sobre el segmento de $z_1 z_2$ la suma de las áreas de los rectángulos es positiva, que sobre el arco circular $z_2 z_3$ la suma de las áreas de los rectángulos es negativa, y que la suma neta de dichas áreas de z_1 a z_4 es negativa. Así, estimamos que $\int_C \vec{\mathbf{W}} \cdot \vec{\mathbf{N}} ds < 0$

En general, si disponemos representaciones geométricas, generadas por demostraciones visuales, o podemos construir una imagen mental de dichas representaciones, mencionada en la Ecuación 3.4, como la que se muestra en las Figuras 3.2 y 3.3, de ellas podemos estimar o aproximar la parte imaginaria de la integral de línea compleja.

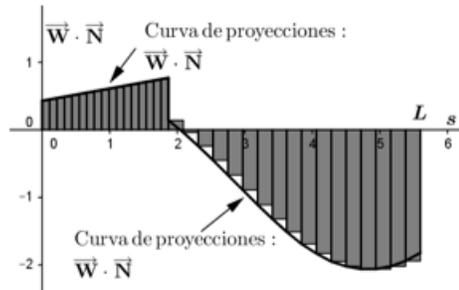
Se puede construir una representación geométrica de la cual podemos visualizar la integral $\int_C \vec{\mathbf{W}} \cdot \vec{\mathbf{N}} ds$ de una manera más familiar, usando la representación geométrica de la integral definida de una variable real como área neta bajo una curva. Veamos.

Apoyándonos en la Figura 3.4, transformemos la representación geométrica mostrada en el plano complejo de la Figura 3.4 (a), a una equivalente en un sistema de coordenadas cartesianas de longitud de arco de la Figura 3.4 (b).

Explicuemos y justifiquemos este proceso de transformación. En el plano complejo, a cada punto z sobre la curva orientada C : desde z_1 a z_4 , le asociamos el valor real correspondiente a su longitud de arco $s \geq 0$ medido desde el punto inicial de integración z_1 . Al punto inicial z_1 sobre C le asociamos el origen del sistema de coordenadas cartesianas de longitud de arco en la Figura 3.4 (b). Al punto z sobre C le asociamos el punto $(s, 0)$ sobre el semieje real positivo del sistema de coordenadas. Si L es la longitud de arco de la de la curva C , al punto z_4 sobre C le asociamos el punto $(L, 0)$ en el sistema de coordenadas. Bajo este proceso, la curva C se transforma en un segmento horizontal (si no lo era) sobre el semieje real positivo s con extremo derecho en $(0, 0)$ y longitud



(a)



(b)

Figura 3.4: Visualización aproximada de $\int_C \vec{W} \cdot \vec{N} ds$, (a) Como áreas netas de rectángulos en el plano complejo sobre C , (b) Como área neta bajo la curva de componentes normales el plano de longitud de arco s .

igual a L .

A los rectángulos orientados (su área puede ser positiva, negativa o cero) sobre C en la Figura 3.4(a), les asociamos rectángulos verticales con altura hacia arriba o hacia abajo, según su orientación, en el sistema de coordenadas de la Figura 3.4(b); en los que a sus vértices derechos les asociamos los puntos $(s, 0)$ y $(s, \vec{W} \cdot \vec{N})$ el sistema de coordenadas de la Figura 3.4 (b). Al incremento de arco sobre C , le asociamos el incremento lineal sobre el segmento lineal de longitud de arco, denotado también por ds .

Notemos que bajo esta transformación el ángulo recto que forma los segmentos orientados $\vec{W} \cdot \vec{N}$ con la curva C , corresponde al ángulo recto que forman los rectángulos verticales con el eje de longitud de arco s . Es decir, bajo esta transformación, los ángulos rectos se conservan.

Así, la integral $\int_C \vec{W} \cdot \vec{N} ds$ que visualizamos en términos de área neta en el plano complejo de la Figura 3.4(a), podemos visualizarla de forma equivalente en la Figura 3.4(b) como el área neta bajo la curva formada por los puntos $(s, \vec{W} \cdot \vec{N})$, $0 \leq s \leq L$, y que también representa a la integral $\int_0^L \vec{W} \cdot \vec{N} ds$ en

el plano cartesiano de longitud de arco.

De este modo, obtenemos la equivalencia de integrales.

$$\underbrace{\int_C \vec{W} \cdot \vec{N} ds}_{\text{En el plano complejo}} = \underbrace{\int_0^L \vec{W} \cdot \vec{N} ds}_{\text{En el plano de longitud de arco}} \quad (3.5)$$

Si a la curva formada por los puntos $(s, \vec{W} \cdot \vec{N})$ con $0 \leq s \leq L$, le llamamos curva de proyecciones de los vectores de campo de Pólya sobre los vectores normales a lo largo de la longitud de arco, o simplemente curva de componentes normales en $[0, L]$, la equivalencia (3.5), nos permite asignar la interpretación geométrica,

$$\int_C \vec{W} \cdot \vec{N} ds = \underbrace{\left(\text{Área neta bajo la curva de componentes normales en } [0, L] \right)}_{\text{En el sistema de coordenadas de longitud de arco}} \quad (3.6)$$

Finalmente, de (3.3) y (3.6) tenemos la interpretación en términos de área neta bajo una curva y correspondiente visualización,

$$\text{Im} \left[\int_C f(z) dz \right] = \underbrace{\left(\text{Área neta bajo la curva de componentes normales en } [0, L] \right)}_{\text{En el sistema de coordenadas de longitud de arco}} \quad (3.7)$$

Por lo que, si disponemos de representaciones geométricas de las áreas bajo la curva de componentes normales en el plano de longitud de arco, mencionada en (3.7), como se muestra en la Figura 3.4(b), de ella podemos obtener o inducir cierta información acerca de la parte imaginaria de la integral de línea compleja. Nuestro objetivo es crear demostraciones que desplieguen pantallas con tales representaciones geométricas.

3.1.2. Parte real

Usemos razonamientos y procedimientos similares a los que empleamos en la Sección 3.2.1 para construir representaciones geométricas asociadas a la parte real de la integral de línea compleja. Recordemos que, $\text{Re} \left[\int_C f(z) dz \right] = \int_C (\vec{W} \cdot \vec{T}) ds$.

Ya establecimos que $\vec{W} \cdot \vec{T}$ se visualiza sobre la curva C como el segmento correspondiente a la proyección orientada del campo de Pólya sobre el vector tangente unitarios \vec{T} como se ilustra en la Figura 3.5 Para leer su orientación, aplicamos el principio *frente-atrás*, esto es, desplazándonos según la orientación de C , es positiva si queda enfrente, es negativa si queda atrás y cero si es nula.

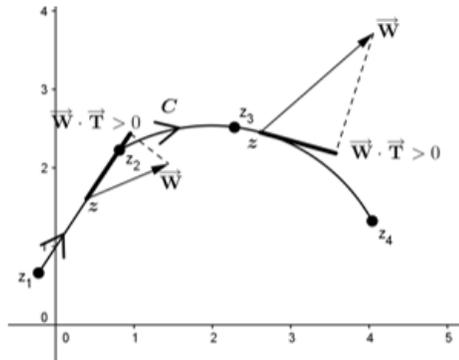


Figura 3.5: Proyecciones tangentes de vectores de Pólya sobre C

En la Figura 3.6 se muestran más segmentos que representan proyecciones de \vec{W} sobre \vec{T} a lo largo de C . En la parte lineal de la curva de z_1 a z_2 los segmentos tangentes parecen tener orientación positiva y están ubicados sobre el segmento $\overline{z_1 z_2}$. En la parte de arco circular de z_2 a z_4 , la primera parte de ellos tiene orientación positiva y los últimos tienen orientación negativa.

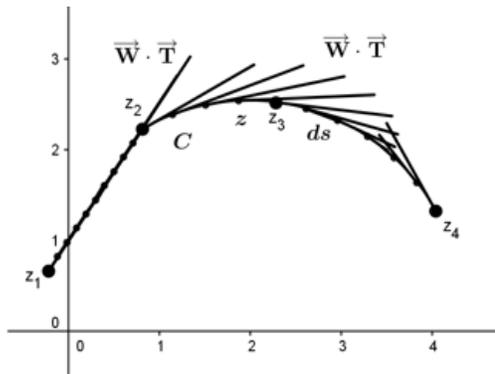


Figura 3.6: Visualización de $\vec{W} \cdot \vec{T} \Delta s$, $\sum \vec{W} \cdot \vec{T} \Delta s$ e $\int_C \vec{W} \cdot \vec{T} ds$.

La orientación de los segmentos puede representarse también por medio de vectores componentes de Pólya tangentes $(\vec{W} \cdot \vec{T}) \vec{T}$ como se ilustra en la Figura 3.7.

En las representaciones de las Figuras 3.6 o 3.7, si estimamos visualmente los productos $(\vec{W} \cdot \vec{T}) \Delta s$ sobre C y los sumamos, podemos, estimar la suma de Riemann $\sum (\vec{W} \cdot \vec{T}) \Delta s$ sobre C , y aproximar la integral $\int (\vec{W} \cdot \vec{T}) ds$ también sobre C . En efecto, desplazándonos sobre C de z_1 a z_2 , establecemos que las proyecciones son positivas, por lo que la suma es positiva. Mientras que de z_2 a z_4 sobre C , la primera gran parte las proyecciones son positivas, por lo que la suma es positiva. Y comparando visualmente las longitudes de las proyecciones

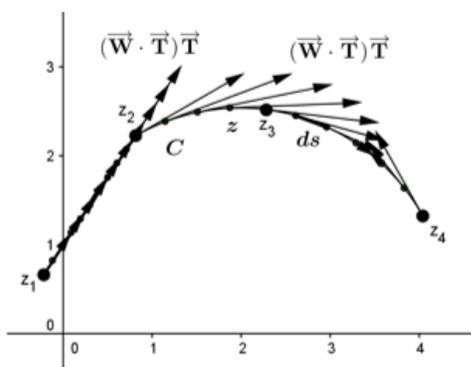


Figura 3.7: Visualización de $\mathbf{W} \cdot \mathbf{T}\Delta s$, $\sum \mathbf{W} \cdot \mathbf{T}\Delta s$ e $\int_C \mathbf{W} \cdot \mathbf{T}ds$.

positivas y negativas, estimamos que la suma $\sum(\vec{W} \cdot \vec{T})\Delta s$ sobre C debe ser positiva, y por tanto estimamos que $\int(\vec{W} \cdot \vec{T})ds > 0$.

Por lo que si disponemos de demostraciones que nos proporcionen representaciones como las presentadas en las Figuras 3.6 y 3.7, de éstas podemos estimar, aproximar o inferir información sobre el valor de la parte real de la integral de línea compleja.

Como lo realizado en la parte imaginaria, otra manera de visualizar la parte real, se consigue usando áreas de rectángulos orientados, así. A los productos $(\vec{W} \cdot \vec{T})\Delta s$, podemos considerarlos como áreas de rectángulos orientados tangentes a la curva C , como se muestra en la Figura 3.8, donde los incrementos Δs los dibujamos perpendiculares a C .

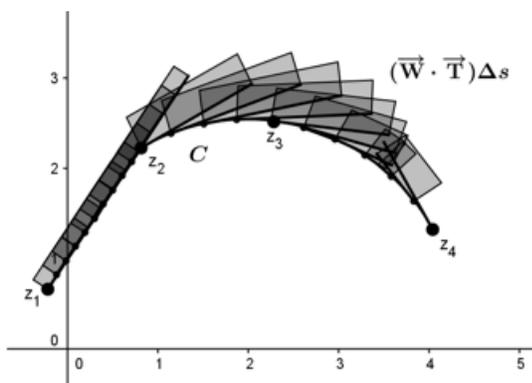


Figura 3.8: Visualización de $\vec{W} \cdot \vec{T}$ y $\sum \vec{W} \cdot \vec{T}$ sobre C

La Figura 3.8 nos permite visualizar la suma $\sum(\vec{W} \cdot \vec{T})\Delta s$ sobre C en términos de áreas de rectángulos orientados. Tomando Δs pequeños se visualiza aproximadamente la integral $\int(\vec{W} \cdot \vec{T})ds$. Así tenemos la interpretación geométrica,

$$\int_C \vec{W} \cdot \vec{T} ds = \underbrace{\left(\begin{array}{l} \text{Suma neta de las áreas de los rectángulos} \\ \text{tangentes a } C, \text{ formados por las proyecciones} \\ \vec{W} \cdot \vec{T} \text{ y los diferenciales de arco } ds \text{ sobre } C \end{array} \right)}_{\text{En el plano complejo}} \quad (3.8)$$

Desplazándonos sobre la curva según su orientación y usando la regla frente-atrás para determinar el signo de las áreas, podemos explorar o estimar en algunos casos el valor de $\int (\vec{W} \cdot \vec{T}) ds$. En la Figura 3.8 visualizamos que dicha integral debe ser positiva.

Tomando más rectángulos tangentes, y realizando una transformación similar a la realizada en la Figura 3.4 (a) y (b). La curva C la transformamos en un segmento horizontal con longitud igual a la longitud de arco de la curva. Los rectángulos tangentes los transformamos en rectángulos verticales. Los puntos $(s, \vec{W} \cdot \vec{T})$ con $0 \leq s \leq L$ generan una curva proyecciones de $\vec{W} \cdot \vec{T}$ o curva de componentes tangenciales sobre $[0, L]$, donde L es la longitud de arco de la curva C . Esto se muestra en la Figuras 3.9 (a) y (b).

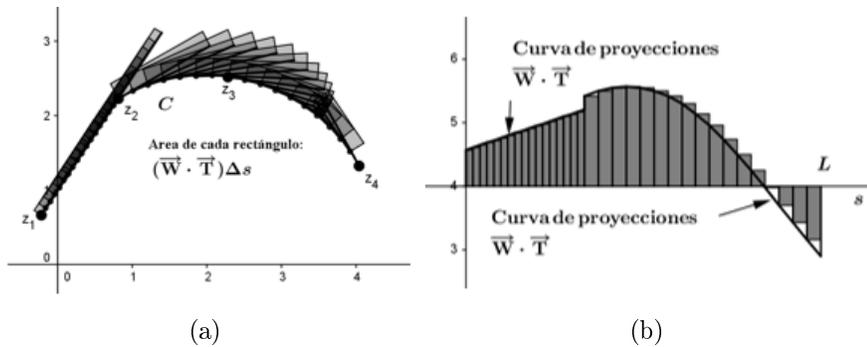


Figura 3.9: Visualización aproximada de $\int_C \vec{W} \cdot \vec{T} ds$, (a) Como áreas netas de rectángulos en el plano complejo sobre C , (b) Como área neta bajo la curva de componentes tangenciales en el plano de longitud de arco s .

Así, la integral $\int_C \vec{W} \cdot \vec{T} ds$ que visualizamos aproximadamente en el plano complejo de la Figura 3.9 (a), también la podemos visualizar aproximadamente en la Figura 3.9 (b) sobre la longitud de arco. Pero en este nuevo sistema se visualiza como la suma neta de áreas de rectángulos diferenciales con altura $\vec{W} \cdot \vec{T}$ y base ds .

Por lo que obtenemos la equivalencia de integrales,

$$\underbrace{\int_C \vec{W} \cdot \vec{T} ds}_{\text{En el plano complejo}} = \underbrace{\int_0^L \vec{W} \cdot \vec{T} ds}_{\text{En el plano de longitud de arco}} \quad (3.9)$$

Equivalencia que nos permite asignar la interpretación geométrica,

$$\int_C \vec{W} \cdot \vec{T} ds = \underbrace{\left(\begin{array}{c} \text{Área neta bajo la curva de} \\ \text{componentes tangenciales en } [0, L] \end{array} \right)}_{\text{En el sistema de coordenadas de longitud de arco}} \quad (3.10)$$

Finalmente, de (3.2) y (3.10) tenemos la interpretación en términos de área neta bajo una curva y correspondiente visualización,

$$\operatorname{Re} \left[\int_C f(z) dz \right] = \underbrace{\left(\begin{array}{c} \text{Área neta bajo la curva de} \\ \text{componentes normales en } [0, L] \end{array} \right)}_{\text{En el sistema de coordenadas de longitud de arco}} \quad (3.11)$$

Por lo que, si disponemos de representaciones geométricas de las áreas bajo la curva de componentes normales en el plano de longitud de arco, mencionada en (3.11), como se muestra en la Figura 3.9(b), de ella podemos obtener o inducir cierta información acerca de la parte real de la integral de línea compleja. Nuestro objetivo es crear demostraciones que desplieguen pantallas con tales representaciones geométricas.

3.1.3. Partes real e imaginaria

Las visualizaciones aisladas de las partes real e imaginaria de $\int_C f(z) dz$ en su representación de segmentos asociados a proyecciones tangentes y normales del campo de Polya de $f(z)$ que se presentan en las Figuras 3.6 y 3.2 en el plano complejo, podemos visualizarlas de forma conjunta como se ilustra en la Figura 3.10. Las componentes tangentes aparecen en rojo y las componentes normales en azul. Notemos que las proyecciones tangentes sobre el segmento $z_1 z_2$ quedan sobre el mismo segmento y apuntando al frente.

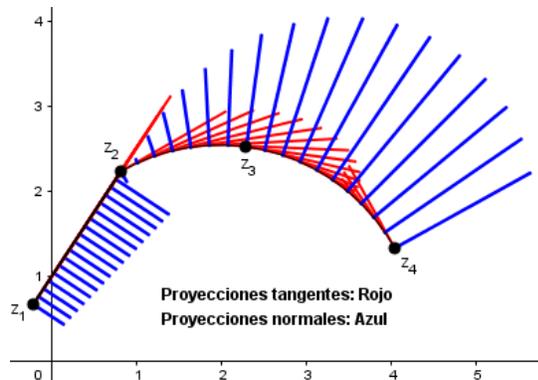


Figura 3.10: Visualización conjunta de $\operatorname{Re} \left[\int_C f(z) dz \right]$ e $\operatorname{Im} \left[\int_C f(z) dz \right]$.

De acuerdo a lo venimos discutiendo, usando la regla *frente-atras* para la parte real, y la regla *de mano derecha* para la parte imaginaria en la Figura 3.10 podemos imaginar y formar rectángulos orientados tangentes y normales a la curva C en el plano complejo y visualizar las interpretaciones geométricas que exponen las Ecuaciones (3.12) y (3.13) que siguen.

$$\int_C f(z)dz = \underbrace{\int_C \vec{W} \cdot \vec{T} ds + i \int_C \vec{W} \cdot \vec{N} ds}_{\text{En el plano complejo}} \quad (3.12)$$

$$\int_C f(z)dz = \underbrace{\left(\begin{array}{l} \text{Suma neta de las áreas de los rectángulos} \\ \text{tangentes a } C \text{ formados por las proyecciones} \\ \vec{W} \cdot \vec{T} \text{ y los diferenciales } ds \text{ sobre } C \end{array} \right)}_{\text{En el plano complejo}} \quad (3.13)$$

$$+ i \underbrace{\left(\begin{array}{l} \text{Suma neta de las áreas de los rectángulos} \\ \text{normales a } C \text{ formados por las proyecciones} \\ \vec{W} \cdot \vec{N} \text{ y los diferenciales } ds \text{ sobre } C \end{array} \right)}_{\text{En el plano complejo}}$$

Así, usando las representaciones, de la Figura 3.10 inferimos que la parte real debe ser positiva y la parte imaginaria debe ser negativa de la integral de línea compleja que allí se representa.

Las representaciones de la Figura 3.10, podemos transformarlas y visualizarlas en sus representaciones de parte real e imaginaria en el plano cartesiano de longitud de arco, como se ilustran en las Figura 3.11(a) y (b).

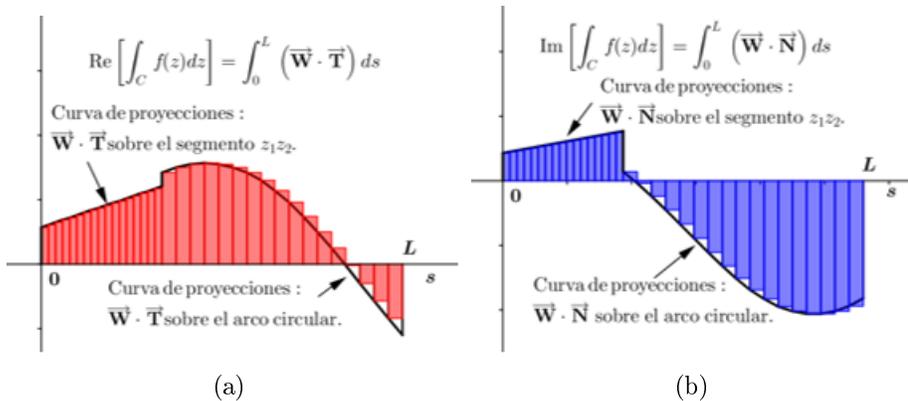


Figura 3.11: Visualización de (a) $\text{Re} \left[\int_C f(z)dz \right]$, y (b) $\text{Im} \left[\int_C f(z)dz \right]$, en los planos de longitud de arco.

Las Figuras 3.11(a) y (b) son representaciones de (3.14) y (3.15), siguientes.

$$\int_C f(z)dz = \underbrace{\int_0^L \vec{\mathbf{W}} \cdot \vec{\mathbf{T}} ds + i \int_0^L \vec{\mathbf{W}} \cdot \vec{\mathbf{N}} ds}_{\text{En los sistemas de coordenadas de longitud de arco}} \quad (3.14)$$

$$\int_C f(z)dz = \underbrace{\left(\begin{array}{l} \text{Área neta bajo la curva de} \\ \text{componentes tangenciales de} \\ \text{Pólya en el intervalo } [0, L] \end{array} \right) + i \left(\begin{array}{l} \text{Área neta bajo la curva de} \\ \text{componetes normales de} \\ \text{Pólya en el intervalo } [0, L] \end{array} \right)}_{\text{En los sistemas de longitud de arco}} \quad (3.15)$$

Con las representaciones en los sistemas de longitud de arco de la Figura 3.11, observamos inmediatamente de un "solo vistazo" que la parte real de la integral de línea compleja allí representada debe ser positiva, y que la parte imaginaria debe ser negativa.

Más adelante, usando demostraciones que generen curvas de componentes tangenciales y normales del campo de Pólya sobre la longitud de arco, ilustramos como explorar –inmediata y fácilmente– valores y algunas propiedades de integrales de línea y contorno cerrado complejas.

3.2. Integrales de contorno cerrado

Las fórmulas y representaciones visuales establecidas sobre integrales de línea compleja, las extendemos a integrales de contorno cerrado complejas,

$$\oint_C f(z)dz = \underbrace{\oint_C \vec{\mathbf{W}} \cdot \vec{\mathbf{T}} ds + i \oint_C \vec{\mathbf{W}} \cdot \vec{\mathbf{N}} ds}_{\text{En el plano complejo}} \quad (3.16)$$

donde C es un contorno cerrado con orientación positiva.

En la Figura 3.12 visualizamos la representación de (3.16) con punto inicial y final A . Las componentes tangenciales $\vec{\mathbf{W}} \cdot \vec{\mathbf{T}}$ están pintadas en rojo y las componentes normales $\vec{\mathbf{W}} \cdot \vec{\mathbf{N}}$ en azul.

Para establecer el signo del segmento tangente asociado a $\vec{\mathbf{W}} \cdot \vec{\mathbf{T}}$ usamos el mismo criterio descrito para integrales de línea; mientras que, para establecer el signo del segmento normal asociado $\vec{\mathbf{W}} \cdot \vec{\mathbf{N}}$ usamos el criterio, es *positivo*

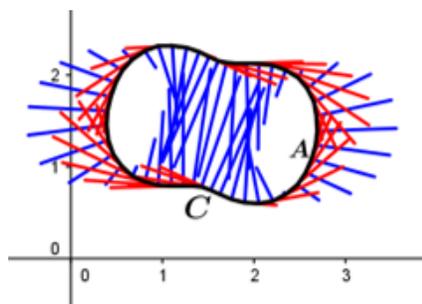


Figura 3.12: Visualización de $\operatorname{Re} [\oint_C f(z)dz]$ e $\operatorname{Im} [\oint_C f(z)dz]$ en el plano complejo

si el segmento normal apunta hacia *afuera* del contorno cerrado, y *negativo* cuando apunta hacia *adentro*.

Como se viene discutiendo, imaginando construir rectángulos tangentes y normales a C , tenemos la interpretación geométrica,

$$\oint_C f(z)dz = \underbrace{\left(\begin{array}{l} \text{Suma neta de las áreas de los rectángulos} \\ \text{tangentes a } C \text{ formados por las proyecciones} \\ \overline{\mathbf{W}} \cdot \overline{\mathbf{T}} \text{ y los diferenciales } ds \text{ sobre } C \end{array} \right)}_{\text{En el plano complejo}} + i \underbrace{\left(\begin{array}{l} \text{Suma neta de las áreas de los rectángulos} \\ \text{normales a } C \text{ formados por las proyecciones} \\ \overline{\mathbf{W}} \cdot \overline{\mathbf{N}} \text{ y los diferenciales } ds \text{ sobre } C \end{array} \right)}_{\text{En el plano complejo}} \quad (3.17)$$

Las representaciones geométricas correspondientes a las partes real e imaginaria en los planos de longitud de arco, asociadas a la representación en el plano complejo de la Figura 3.12, se muestran en las Figuras 3.13 y 3.14, respectivamente.

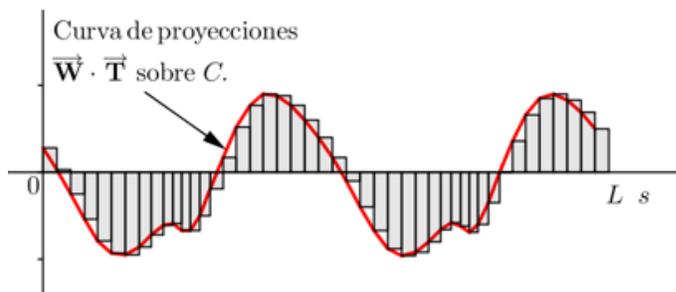


Figura 3.13: Visualización de $\operatorname{Re} [\oint_C f(z)dz] = \int_0^L (\overline{\mathbf{W}} \cdot \overline{\mathbf{T}}) ds$ en el plano de longitud de arco

De manera conjunta las Figuras 3.13 y 3.14 ilustran la interpretación de (3.18), siguiente.

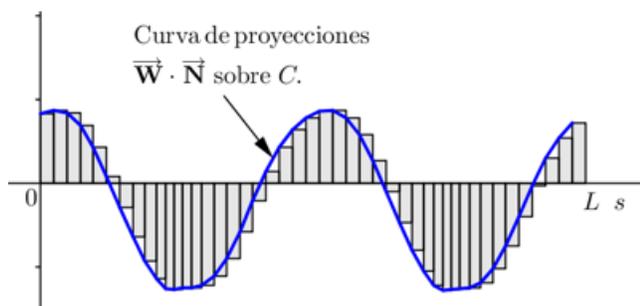


Figura 3.14: Visualización de $\text{Im} \left[\oint_C f(z) dz \right] = \int_0^L (\overline{\mathbf{W}} \cdot \overline{\mathbf{N}}) ds$ en el plano complejo de longitud de arco

$$\oint_C f(z) dz = \left(\begin{array}{l} \text{Área neta bajo la curva de} \\ \text{componentes tangenciales de} \\ \text{Pólya en el intervalo } [0, L] \end{array} \right) \quad (3.18)$$

$$+ i \left(\begin{array}{l} \text{Área neta bajo la curva de} \\ \text{componentes normales de} \\ \text{Pólya en el intervalo } [0, L] \end{array} \right)$$

En los sistemas de longitud de arco

Más adelante, por medio de demostraciones desarrolladas en el ambiente de geometría dinámica del *GeoGebra*, mostramos cómo aprovechar algunas ventajas de las representaciones geométricas presentadas, tanto en el plano complejo como el plano cartesiano de longitud de arco, para explorar algunas integrales complejas de contorno cerrado, o para explorar algunas propiedades importantes de integración compleja.

Capítulo 4

Interpretación física

Supongamos que el campo de Pólya \vec{W} de $f(z)$ representa un campo de velocidad de un fluido en el plano complejo. Consideremos la curva cerrada C inmersa en cierto campo de Pólya, como se ilustra en la Figura 4.1

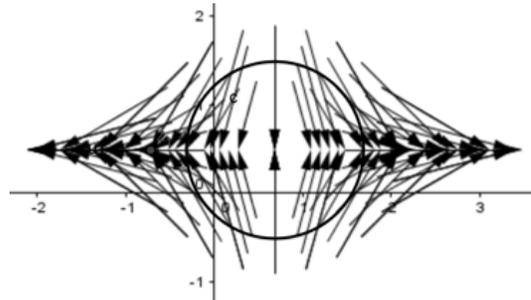


Figura 4.1: Vectores de \vec{W} vistos como un campo de velocidad y una circunferencia dispuesta en dicho campo.

Ahora, consideremos solamente los vectores de \vec{W} que se ubican sobre C , como se ilustra en la Figura 4.2.

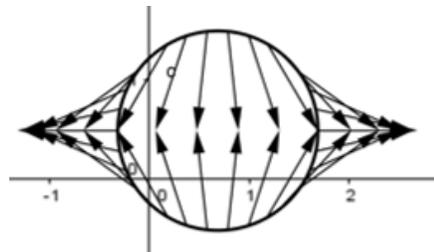


Figura 4.2: Vectores de \vec{W} ubicados sobre C .

Podemos asociar interpretaciones físicas a las partes real e imaginaria de las integrales línea y contorno cerrado (con orientación positiva) a la relación

de integrales propuesta por Pólya en el plano complejo que desarroyamos en el Capítulo 3, $\oint_C f(z)dz = \oint_C \vec{W} \cdot \vec{T} ds + i \oint_C \vec{W} \cdot \vec{N} ds$,

Como se muestra en la Figura 4.3, los vectores $(\vec{W} \cdot \vec{T})\vec{T}$ (en línea continua) representan las componentes tangentes a la curva del campo de velocidades \vec{W} (en línea punteada), de modo que la integral $\vec{W} \cdot \vec{T} ds$ se interpreta como el flujo tangencial neto del campo de Pólya sobre la curva, o la cantidad de fluido neto que circula a lo largo de la curva.

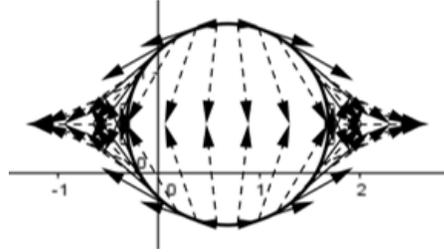


Figura 4.3: Flujo tangencial neto que circula sobre C .

Mientras que, como vemos en la Figura 4.4, los vectores $(\vec{W} \cdot \vec{N})\vec{N}$ (en línea continua) representan las componentes normales a la curva del campo de velocidades \vec{W} (vectores punteados), por lo que la integral $\vec{W} \cdot \vec{N} ds$ representa el flujo normal neto del campo de Pólya a la curva o la cantidad de fluido neto que atraviesa a la curva.

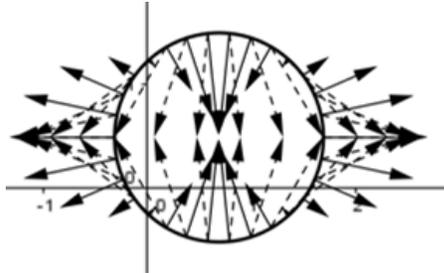


Figura 4.4: Flujo normal neto del campo de Pólya que cruza a C .

Así, es común asociar a una integral de línea o una integral de contorno cerrado compleja, las siguientes interpretaciones físicas en el plano complejo [?] y [?].

$$\oint_C f(z)dz = \underbrace{\left(\begin{array}{l} \text{Flujo neto del campo de Pólya que} \\ \text{circula a largo del contorno cerrado} \end{array} \right) + i \left(\begin{array}{l} \text{Flujo neto del campo de Pólya que} \\ \text{cruza el contorno cerrado} \end{array} \right)}_{\text{En el plano complejo}} \quad (4.1)$$

En términos de integrales de flujo, tenemos la ecuación 4.2.

$$\oint_C f(z)dz = \underbrace{\begin{pmatrix} \text{Integral del flujo de} \\ \text{Pólya tangencial} \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \text{Integral del flujo de} \\ \text{Pólya normal} \end{pmatrix}}_{\text{En el plano complejo}} \quad (4.2)$$

Finalmente, relacionando las interpretaciones físicas con las representaciones geométricas de las integrales de Pólya, obtenemos sus correspondientes interpretaciones en términos de áreas netas bajo las curvas de flujo que circula sobre el contorno y bajo la curva de flujo que atraviesa el contorno. Dichas áreas netas se calculan integrando sobre la longitud de arco de la curva en el plano cartesiano de longitud de arco.

$$\oint_C f(z)dz = \underbrace{\begin{pmatrix} \text{Área neta bajo la curva del} \\ \text{flujo de Pólya tangencial} \\ \text{en el intervalo } [0, L] \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \text{Área neta bajo la curva del} \\ \text{flujo de Pólya normal} \\ \text{en el intervalo } [0, L] \end{pmatrix}}_{\text{En los sistemas de longitud de arco}} \quad (4.3)$$

Similares interpretaciones físicas se pueden asociar a las partes real e imaginaria para el caso de integrales de línea.

En el Capítulo 6 veremos demostraciones en las que ilustramos el uso de estas interpretaciones físicas para explorar de integrales de línea y contorno cerrado complejas.

Capítulo 5

Generalidades de las demostraciones

Ya desde los años cercanos a 1987, Branden [?], y en años más recientes Needham [?, pág. 483], decían que las técnicas de computación gráfica podían usarse para ayudar a los estudiantes para visualizar y estimar integrales de línea complejas a través de sus interpretaciones geométricas de campos de Pólya.

En años más recientes, aparecen publicaciones de trabajos sobre visualizaciones de dichas interpretaciones usando distintos softwares matemáticos con ambientes dinámicos e interactivos, desarrollados en Mathematica [?] y, elaborado en Cabri II Plus [?]. Cada uno de ellos con sus intenciones didácticas específicas, ventajas y limitaciones.

Las herramientas de construcción geométrica que ofrece, el procesamiento aritmético y algebraico con complejos que permite, las posibilidades de representación gráfica que permite elaborar, y su ambiente dinámico e interactivo que ofrece *Geogebra*; constituyen algunos elementos básicos que han sido aprovechados por varios autores para elaborar demostraciones o aplicaciones visuales sobre diversas representaciones geométricas de integrales de línea complejas.

En los capítulos siguientes presentamos un conjunto de demostraciones elaboradas en *Geogebra*, intencionadas para visualizar interpretaciones geométricas de integrales de línea y contorno cerrado complejas en términos de campos de Pólya. Con fines didácticos elaboramos dos grupos de demostraciones.

- En las demostraciones del grupo I se visualizan integrales de línea y contorno cerrado, muy específicas, usando sus campos de Pólya en el plano complejo, y
- Las demostraciones del grupo II, operan en dos vistas gráficas. En la Vista 1, se visualizan los vectores de Pólya y sus componentes tangencial y normal sobre la curva de integración en el plano complejo. Trabajando simultáneamente con la Vista 1, en la Vista 2, las áreas netas bajo las

curvas de componentes tangencial y normales se usan para visualizar las partes real e imaginaria, como anteriormente explicamos. También muestran los valores aproximados de las partes real e imaginaria obtenidas de las áreas netas como sumas de Riemann a partir de procesamientos geométricos y aritméticos del *Geogebra*.

Los procesamientos geométricos y aritméticos en las demostraciones se elaboraron seleccionando cierta discretización numérica, proceso finito de construcción geométrica, y bajo las limitaciones de redondeo de decimales que maneja el *Geogebra*. Como veremos más adelante, su uso adecuado depende de la imagen apropiada que se pueda generar en las vistas gráficas del *Geogebra*. Logramos su control, generalmente, ajustando los valores de las variables de entrada y/o limitando las regiones de deslizamientos de algunos parámetros. Esto es un problema general que se tiene en visualización gráfica [?], ellas involucran una técnica muy sutil en cuando a la selección apropiada de las variables de entrada y variables de salida para obtener una representación gráfica apropiada. Situación que es fuente de posibles interpretaciones incorrectas de lo que se visualiza en pantalla.

En cuanto a motivaciones pedagógicas, ellas proporcionan al usuario un ambiente de arrastre dinámico de objetos geométricos allí presentes brindándole cierto grado de participación interactiva reflexiva. Por medio de tales características de participativa activa, esperamos, proporcionar al usuario actividades de exploración, estimación, generación de conjeturas y de justificación sobre integración compleja, actividades que podrían favorecer el aprendizaje inicial y elemental de la teoría de integración en variable compleja.

Capítulo 6

Demostraciones en el plano complejo

Iniciamos con demostraciones elaboradas para visualizar integrales de algunas funciones en su representación del plano complejo. Su presentación inicial y selectiva la consideramos pertinente, principalmente, si se opta por una secuencia de enseñanza basado en el enfoque de campos de Pólya. Veamos tres de ellas.

6.1. Dem. de integrales de línea

La Figura 6.1 muestra una pantalla de un caso particular de la demostración creada para visualizar campos de Pólya construida sobre una rejilla rectangular.

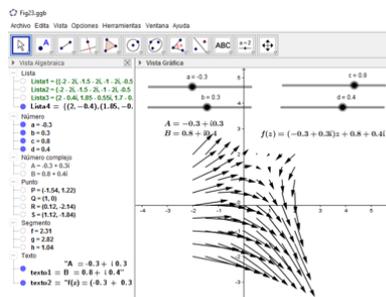


Figura 6.1: Campo de Pólya de $f(z) = (0.3+0.3i)z+(0.8 + 0.8i)$.

Variando las partes real e imaginaria de los parámetros $A = a + ib$ y $B = c + id$ por medio de los deslizadores, se exploran campos de funciones lineales. Por ejemplo, para $A = 0$ y $B = -0.5+i0.4$, la Figura 6.2 muestra el campo de Pólya constante de $f(z) = -0.5+i0.4i$ (función analítica).

Trazando trayectorias apropiadas en dicho campo, visualizamos los signos o

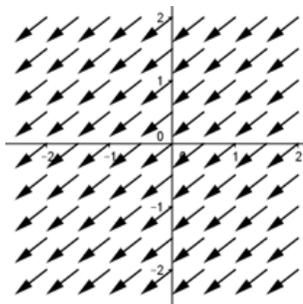


Figura 6.2: Campo de Pólya de $f(z) = -0.5 + 0.4i$.

nulidad de las partes real e imaginaria de integrales de algunas funciones sobre dichas trayectorias. Por ejemplo, la Figura 6.3 muestra el campo de Pólya de la función constante $f(z) = -0.5 + 0.4i$, y la trayectoria con orientación positiva C compuesta por la unión de los segmentos \overline{PQ} , \overline{QR} y \overline{RS} , perpendiculares y tangentes al campo.

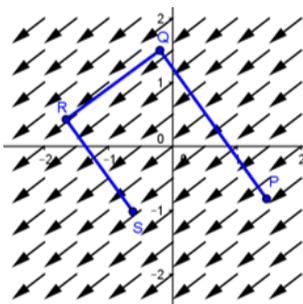


Figura 6.3: Visualización de $\int_C (-0.5 + 0.4i) dz$, $C : \overline{PQ} \cup \overline{QR} \cup \overline{RS}$.

Exploremos la integral $\int_C (-0.5 + 0.4i) dz$. Usando los criterios sobre signos de las componentes tangentes y normales del campo de Pólya sobre las trayectorias (o bien criterios de flujo tangente o normal), podemos visualizar que su parte real debe ser positiva y su parte imaginaria debe ser negativa. Visualizamos que valor de integral se puede obtener de la expresión $|f(z)|[d(Q, R) + i(d(R, S) - d(P, Q))]$.

Por otra parte, si invertimos la orientación de C , es decir, ahora con $-C: \overline{SR} \cup \overline{RQ} \cup \overline{QR}$, determinamos que el signo del valor de la integral cambia, de este modo visualizamos la propiedad elemental, $\int_C f(z) dz = -\int_{-C} f(z) dz$

La Figura 6.4 muestra el campo de Pólya de la función no analítica en ningún punto del plano, $f(z) = 0.4\bar{z}$ (esto es el campo ordinario de $f(z) = 0.4z$) y dos trayectorias diferentes, en rojo y en azul, desde $z = -0.5 - 0.5i$ a $z = 0.5 + 0.5i$.

Estimemos la integral de línea, $\int_C 0.4\bar{z} dz$ sobre tales trayectorias. Sobre la azul, su parte real es cero, y su parte imaginaria es negativa. Sobre la roja, su

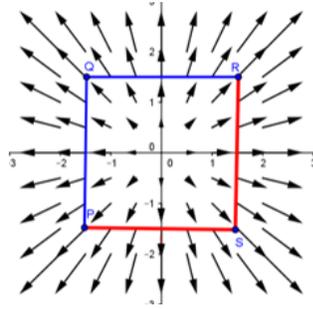


Figura 6.4: Visualización de $\int_{C:PQR} 0.4\bar{z}dz$, $\int_{C:PSR} 0.4\bar{z}dz$

parte real es cero, y su parte imaginaria es positiva. Vemos así que la integral de $f(z) = 0.4\bar{z}dz$ a lo largo de dos trayectorias diferentes, nos da dos resultados diferentes. En este caso, la integración depende de la trayectoria.

Si consideramos la integral de contorno cerrado, $\oint_C = 0.4\bar{z}dz$ con C el perímetro del cuadrado con orientación positiva, vemos que su parte real es cero y su parte imaginaria positiva.

Ahora, consideremos el campo de Pólya de la función entera $f(z) = 0.4iz$ y las dos trayectorias azul y roja mostradas en la Figura 6.5.

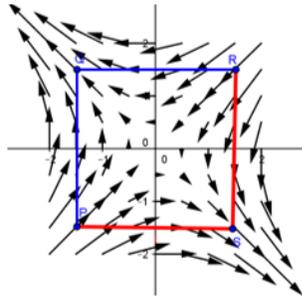


Figura 6.5: Visualización de $\int_{C:PQR} 0.4zdz$, $\int_{C:PSR} 0.4zdz$

La integral de línea, $\int_C 0.4 izdz$ sobre cada una de las trayectorias parece ser nula. En este caso vemos que el valor de la integral es igual para ambas trayectorias.

Además, si consideramos la integral de contorno cerrado $\oint_C 0.4 izdz$ con C el perímetro del cuadrado con orientación positiva, vemos que su parte real y su parte imaginaria deben ser cero. O también, viendo el flujo neto de Pólya que cruza el cuadrado, determinamos que esta integral debe ser cero.

Deformando el cuadrado en otro rotado, y más grande como se muestra en la Figura 6.6. Vemos que la integral $\int_C 0.4 izdz$ calculada sobre cualquiera de las dos trayectorias de P a R es cero. Así, también determinamos que $\oint_C 0.4 izdz = 0$ con C el perímetro del cuadrado.

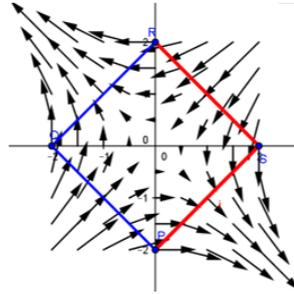


Figura 6.6: Visualización de $\int_{C:PQR} 0.4zdz$, $\int_{C:PSR} 0.4zdz$

Notemos que las visualizaciones con éstas demostraciones nos dan la posibilidad de motivar discusiones iniciales sobre *independencia de la trayectoria*, el teorema de *Cauchy-Goursat* y *deformación de contorno*. Esto puede realizarse desde etapas tempranas de enseñanza de integración compleja elemental.

6.2. Dem. de integrales de contorno cartesianas

Visualicemos integrales de la forma $\oint dz/z^n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, con C el perímetro de un cuadrado con orientación positiva. El usuario puede elegir el valor de n y construir o transformar los cuadrados. Las Figuras 6.7, 6.8 y 6.9 muestran para los casos en los que $n = 0$, $n = 1$ y $n = 2$ respectivamente.

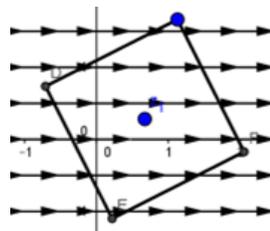


Figura 6.7: Visualización de $\oint_C dz/z^n$, $n = 0$.

En la Figura 6.7, para $n = 0$, el flujo del campo de Pólya que entra es igual al que sale del perímetro de cualquier cuadrado, por lo que $\oint_C dz/z^n$, $n = 0$.

En la Figura 6.8, para $n = 1$, con C el perímetro de cualquier cuadrado con centro en el origen, las componentes de los vectores tangentes sobre los lados del cuadrado se cancelan por lo que la parte real es cero, y las componentes normales son siempre positivas por lo que su parte imaginaria es positiva¹.

En la Figura 6.9 para $n = 2$, con C el perímetro de cualquier cuadrado con vértices sobre los ejes coordenados, visualizamos que el flujo del campo de

¹Si C es el perímetro de un cuadrado horizontal con centro en el origen, de lados $2a$, dejamos al lector interesado mostrar la identidad $\oint_C dz/z = -8i \int_a^0 adx/(x^2 + a^2) = 2\pi i$.

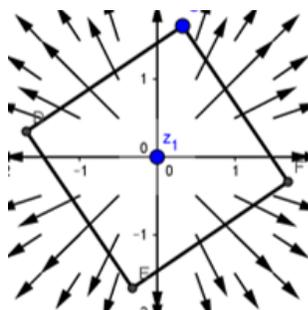


Figura 6.8: Visualización de $\oint_C dz/z^n, n = 1$.

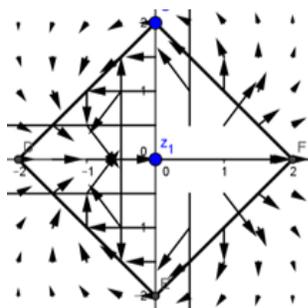


Figura 6.9: Visualización de $\oint_C dz/z^n, n = 2$.

Pólya que entra se aprecia que es igual al que sale del perímetro del cuadrado por lo que $\oint_C dz/z^2 = 0$.

Observemos una característica especial de los campos de Pólya de $f(z) = 1/z^n$, para los casos particulares de $n = 0, 1$, y 2 . Desplazándose sobre el perímetro de cuadrados en sentido positivo antes descritos (ver Figs. 6.7, 6.8 y 6.9). Para $n = 0$, los vectores son paralelos e iguales, no giran. Para $n = 1$, los vectores giran una vuelta completa en sentido positivo. Y para $n = 2$ los vectores giran dos vueltas completas en sentido positivo. Estos hechos geométricos ayudan a explicar y justificas los valores de las integrales sobre los perímetros de los citados cuadrados. Más adelante, discutiremos para otros valores de n .

Se pueden obtener visualizaciones para valores enteros de n distintos a $0, 1$ y 2 , pero para estos casos los vectores de sus campos de Pólya se entrecruzan, dificultando su correcta visualización. En estos casos es útil apoyarse como complemento de sus campos normalizados. Situación que no la discutiremos.

En general, con las Demostración de las Secciones 6.1 y 6.2, podemos visualizar campos de Pólya o sus campos normalizados, en rejillas rectangulares, de funciones complejas consideradas como familias de funciones complejas, y sobre ellas, explorar integrales de línea o contorno cerrado específicas.

6.3. Dem. de integrales de contorno-polares

Esta demostración está elaborada para visualizar la familia de integrales $\oint dz/(z-z_0)^n$ con $n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ y $C : |z - z_0| = r$ sobre rejillas circulares.

El usuario puede interactuar con ella por medio de las siguientes acciones (no necesariamente en el orden que aparecen),

- seleccionar la función eligiendo los valores de $n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$,
- desplazar el punto z_0 ,
- variar el radio de la circunferencia y
- seleccionar visualizar el campo ordinario de Pólya o su campo normalizado.

En las Figuras de 6.10 – 6.14, se muestran respectivamente, los campos ordinarios y normalizados de Pólya de las funciones $f(z) = 1/(z-z_0)^n$, con $n = -1, 0, 1, 2$ y 3 ; sobre circunferencias centradas en un z_0 particular. Para otros valores de z_0 y otras circunferencias se generan visualizaciones con patrones geométricos similares.

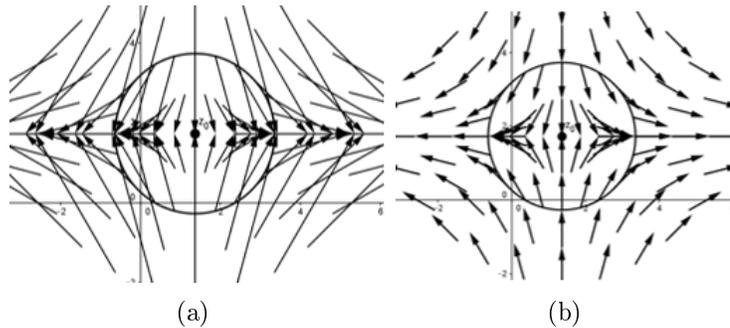


Figura 6.10: Visualización de $\oint_C dz/(z - z_0)^{-1} = 0, C : |z - z_0| = r$, (a) Campo ordinario de Pólya (b) Campo normalizado de Pólya.

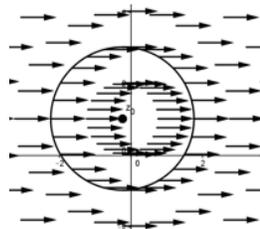


Figura 6.11: Visualización de $\oint_C dz/(z - z_0)^0 = 0, C : |z - z_0| = r$, Campo ordinario y normalizado de Pólya de $f(z)$.

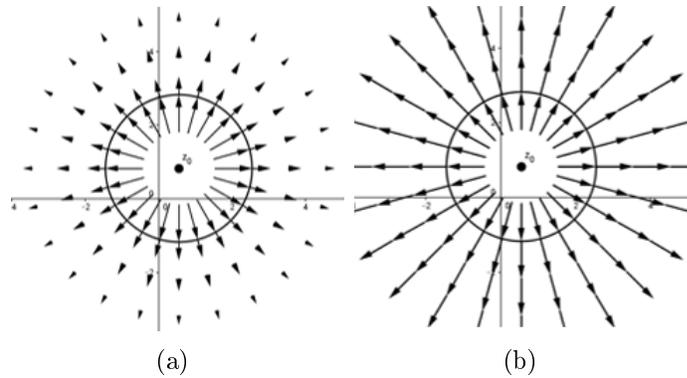


Figura 6.12: Visualización de $\oint_C dz/(z - z_0)^1 = 2\pi i, C : |z - z_0| = r$, (a) Campo ordinario de Pólya (b) Campo normalizado de Pólya.

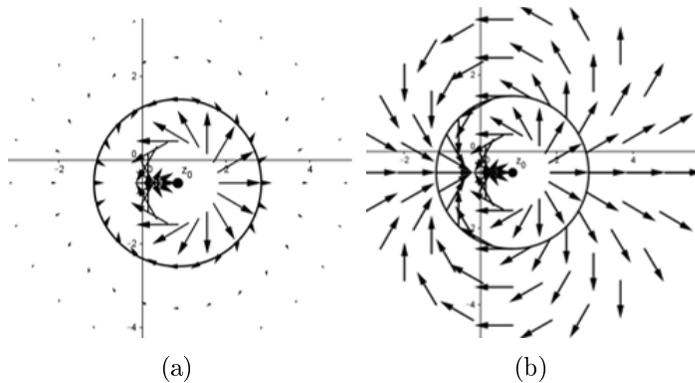


Figura 6.13: Visualización de $\oint_C dz/(z - z_0)^2 = 0, C : |z - z_0| = r$, (a) Campo ordinario de Pólya (b) Campo normalizado de Pólya.

Dado que las rejillas circulares y las circunferencias están centradas en z_0 , podemos visualizar la magnitud y la variación de la dirección de los vectores de Pólya sobre las circunferencias.

Señalemos algunas características en relación a la magnitud y dirección de los vectores de Pólya sobre las circunferencias las cuales nos ayudan a visualizar cada una de las integrales.

Se observa que para cualquier n y cualquier circunferencia, los vectores sobre ella tienen magnitud constante. Debido a esta característica de su magnitud constante, para visualizar los flujos tangenciales y normales a las circunferencias, o el flujo neto que sale de las mismas, y con ello el valor de la integral; nos apoyaremos de la variación de las direcciones de los vectores sobre las circunferencias en los campos normalizados.

En los campos normalizados, desplazándonos sobre la circunferencia una vuelta completa en sentido positivo, los vectores, en general, rotan. De modo que, si trasladamos paralelamente y ubicamos la cola de dichos vectores en z_0 ,

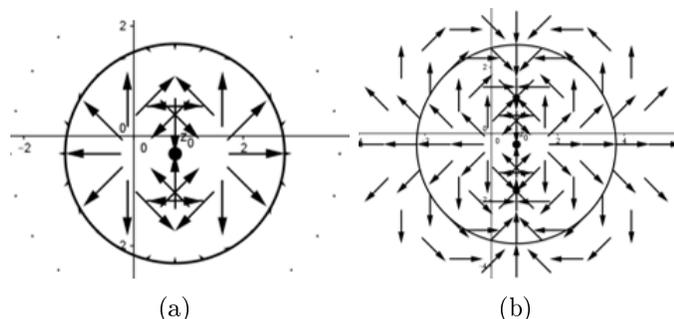


Figura 6.14: Visualización de $\oint_C dz / (z - z_0)^2 = 0$, $C : |z - z_0| = r$, (a) Campo ordinario de Pólya (b) Campo normalizado de Pólya.

para una rotación positiva sobre la circunferencia, estos vectores giran respecto a z_0 un número entero de vueltas; en sentido negativo, no rotan o rotan en sentido positivo según el valor de n .

En el Cuadro 6.1 se resume la relación entre, el valor de n de cada función, el número de rotaciones y sentido de rotación de los vectores de Pólya, y valor de la integral asociado sobre la circunferencia centrada en z_0 .

n	Función	No. de rotaciones completas	$\oint_C f(z) dz$
-1	$f(z) = z - z_0$	1, en sentido negativo	0
0	$f(z) = 1$	0 rotaciones, (no rotan)	0
1	$f(z) = 1/(z - z_0)$	1, en sentido positivo	$2\pi i$
2	$f(z) = 1/(z - z_0)^2$	2, en sentido positivo	0
3	$f(z) = 1/(z - z_0)^3$	3, en sentido positivo	0

Cuadro 6.1: Rotaciones de los vectores de Pólya y valor de la integral

Explorando con otros valores de n en esta demostración, y del Cuadro 6.1, inducimos, que para $n < 0$ los vectores rotan n vueltas completas en sentido negativo, para $n = 0$ no rotan, y para $n > 0$ rotan n vueltas completas en sentido positivo.

De las observaciones sobre magnitud constante y la disposición geométrica rotativa respecto a z_0 de los vectores de Pólya sobre las circunferencias, determinamos que el flujo que sale se cancela con el flujo que entra en cualquier circunferencia si $n \neq 1$. En estos casos el flujo neto es cero (situación que se puede visualizar, también por simple inspección). Por lo que para estos valores de n la integral de contorno cerrado es cero.

Si $n = 1$, en una vuelta completa en sentido positivo sobre las circunferencias, los vectores rotan una vuelta completa, por lo que los vectores se mantienen perpendiculares hacia afuera de las circunferencias y con magnitud constante. Las componentes tangenciales son nulas. La magnitud de las componentes normales es igual a la magnitud de los vectores de Pólya. El radio de la circunferencia es $r = |z - z_0|$, las componentes normales tienen

magnitud $|\overline{f(z)}| = 1/|\overline{(z - z_0)}| = 1/r$. De esto se sigue que el flujo normal de Pólya que sale de la circunferencia es $(1/r) \times (2\pi r) = 2\pi$. Por lo que para $n = 1$ la integral de contorno cerrado debe ser $2\pi i$.

Las anteriores experiencias y conclusiones logradas, nos inducen a formular las conocidas fórmulas de integrales de contorno,

$$\oint_C \frac{dz}{(z - z_0)^n} = \begin{cases} 2\pi i & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \neq 1 \end{cases} \quad (6.1)$$

y también, como en vimos en las exploraciones discutidas en las Secciones 6.1 y 6.2, permiten ir construyendo bases intuitivas e informales de algunas propiedades y teoremas de integrales de contorno.

Capítulo 7

Demostraciones con áreas netas

Para visualizar integrales complejas más generales, y que además nos permita visualizar su parte real e imaginaria de una manera menos costosa y más inmediata; hemos desarrollado demostraciones que muestran simultáneamente sus representaciones geométricas en el plano complejo y en plano de longitud de arco en dos vistas gráficas del *Geogebra*. En la **Vista 1** se visualizan los vectores de Pólya, sus componentes tangenciales y normales sobre la curva de integración. En la **Vista 2** se visualizan las curvas de componentes tangencial (flujo tangencial) y normal (flujo normal), como ya dijimos, las áreas netas bajo ellas representan, respectivamente, la parte real e imaginaria de la integral. Además, muestran los valores numéricos aproximados de dichas áreas netas calculadas como sumas de Riemann, es decir, los valores aproximados de las partes real e imaginaria de la integral. La intención didáctica es que el usuario use las distintas representaciones geométricas y numéricas de las integrales como complementarias y de apoyo entre ellas.

7.1. Dem. de integrales de línea

Ésta demostración, está desarrollada para explorar integrarles de línea $\int_C f(z)dz$ con C formada por un segmento y un arco circular, donde $f(z)$ puede ser analítica o no sobre C . Una pantalla se muestra en la Figura 7.1.

En la **Vista 1**, visualizamos representaciones en el plano complejo de las componentes tangenciales en rojo y componentes normales en azul. En la **Vista 2** visualizamos las representaciones en los planos cartesianos de longitud de arco, la curva de componentes tangencial en rojo y la curva de componentes normal en azul. Así también presenta los valores numéricos de las sumas de Riemann aproximados de las partes real e imaginaria, con un redondeo seleccionado de cifras decimales que proporciona *GeoGebra*.

En esta Demostración el usuario puede,

- ingresar en la línea de comandos establecidos el conjugado de la función $f(z)$ a explorar bajo ciertas limitaciones de visualización apropiadas.

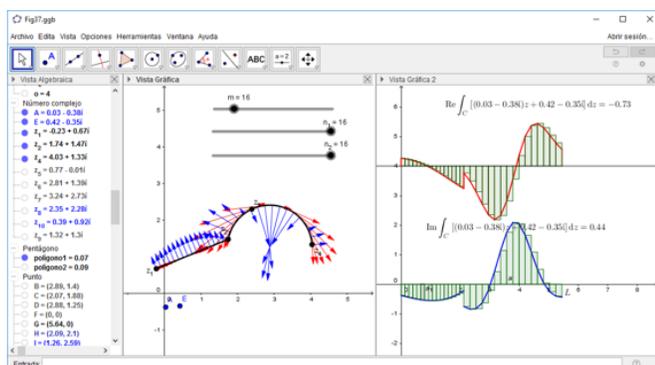


Figura 7.1: Pantalla típica de la Dem. Secc. 7.1.

- elegir los parámetros complejos A y/o E en $f(z)$, arrastrando los puntos A y E en el plano complejo.
- modificar el segmento y/o el arco, arrastrando los puntos z_1, z_2, z_3 y/o z_4 .
- elegir el número total de vectores y rectángulos a visualizar sobre el segmento y arco con el deslizador m , entero positivo.
- construir los vectores sobre C , las áreas netas y los valores acumulados de las integrales sobre el segmento y/o arco ejecutando arrastres en los deslizadores n_1 y/o n_2 , donde $0 \leq n_1 \leq m$ y $0 \leq n_2 \leq m$.

Hacemos notar algunas limitaciones. Se requiere que $|f(z)|$ y la longitud de la curva C tomen valores apropiados a fin de que las representaciones no queden demasiado fuera de las ventanas de las vistas gráficas o demasiado pequeñas y que no se entrecrucen. Esto se logra eligiendo valores apropiados de los parámetros A y E en $f(z)$, y los puntos extremos de la curva.

Iniciemos explicando algunas características del proceso de construcción interactiva de las representaciones de integrales con esta demostración. Al deslizar n_1 y n_2 , la demostración va generando las representaciones geométricas y proporcionando el valor numérico de dichas áreas netas, y con ello los valores de las partes real e imaginaria de la integral.

Veamos algunas pantallas del proceso constructivo para visualizar la integral $\int_C (0.03 - 0.38i)z + 0.42 - 0.35i dz$, con C formado por el segmento de z_1 a z_2 y el arco circular de z_2 a z_4 , con $m = 16$.

En la Figura 7.2 se muestra cuando el deslizador n_1 está en el punto 12 de los 16 puntos en total, y n_2 está en el punto 0 también de los 16 puntos en total.

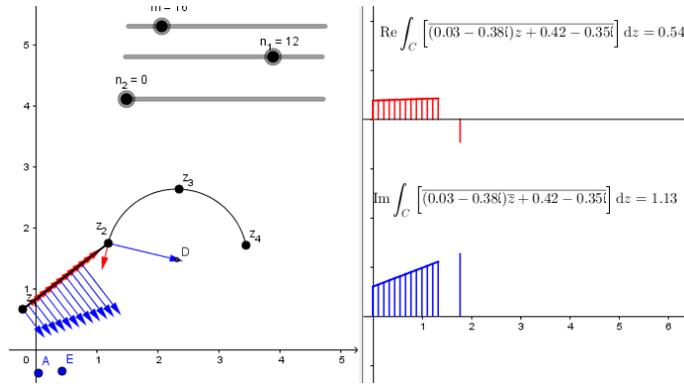


Figura 7.2: Representación parcial de $\int_C \overline{(0.03 - 0.38i)z + 0.42 - 0.35i} dz$.

Con $n_1 = 16$ y $n_2 = 8$, se obtienen las representaciones de la integral sobre el segmento de z_1 a z_2 y el arco circular de z_2 a z_3 que muestra la Figura 7.3.

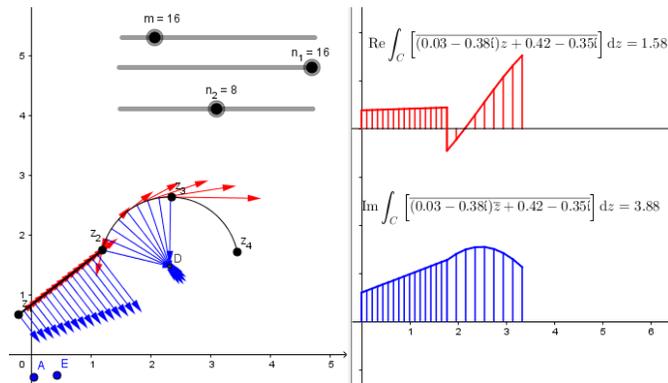


Figura 7.3: Representación parcial de $\int_C \overline{(0.03 - 0.38i)z + 0.42 - 0.35i} dz$.

Finalmente, la Figura 7.4 muestra una pantalla del proceso de integración concluido sobre C completa. Como lo indicamos las representaciones de la integral se construyen ejecutando arrastres en la pantalla. La demostración va proporcionando punto a punto, las representaciones y valores numéricos parciales y total de la integral de línea a explorar.

Ahora, veamos algunas exploraciones que podemos realizar con esta demostración. Para esta misma integral $\int_C \overline{(0.03 - 0.38i)z + 0.42 - 0.35i} dz$, $f(z)$ no analítica en ningún punto del plano. Mantengamos los puntos extremos de C fijos y deformemos la curva C arrastrando z_2 o z_3 hacia distintas ubicaciones, (siempre que no se obtengan representaciones inapropiadas) vemos que el valor de la integral cambia. Por ejemplo, ubicando z_2 en la posición indicada en la Figura 7.5, vemos que el valor de la parte imaginaria no es igual al valor obtenido en la Figura 7.4.

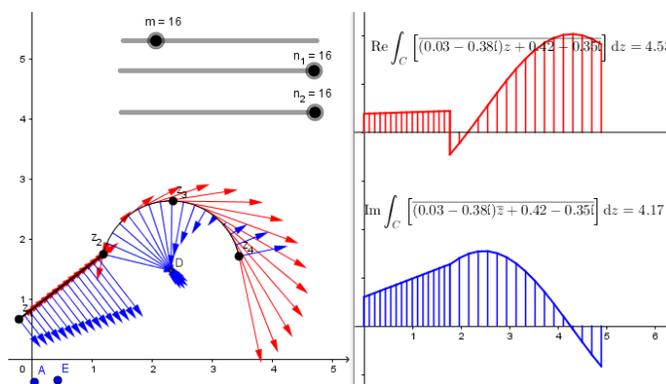


Figura 7.4: Representación completa de $\int_C \overline{(0.03 - 0.38i)z + 0.42 - 0.35i} dz$.

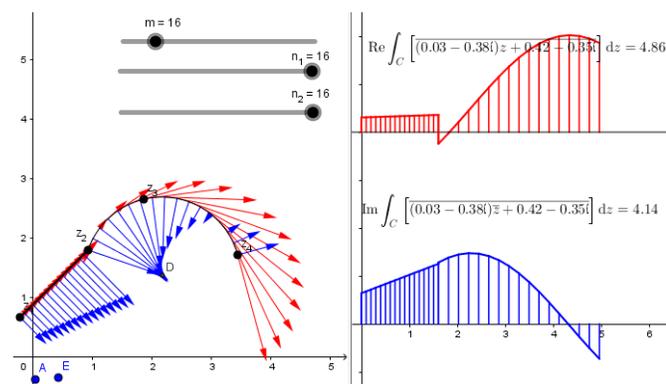
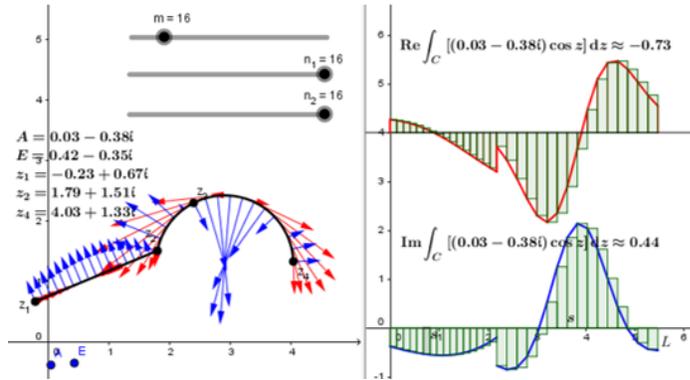
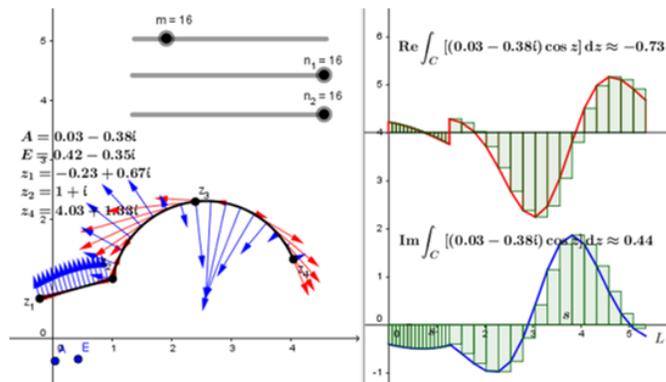


Figura 7.5: Representación completa de $\int_C \overline{(0.03 - 0.38i)z + 0.42 - 0.35i} dz$.

Mientras que si exploremos la integral de $f(z) = A \cos(z)$, sobre C . En este caso $f(z)$ es entera. Manteniendo fijos los puntos extremos y deslizando y ubicando z_2 y/o z_3 hacia otras posiciones, por ejemplo, como las que se muestran en las Figuras 7.6 y 7.7. En ellas observamos que ante la deformación de C , las curvas de componentes tangente y normal cambian, pero el área neta bajo cada una de ellas se mantiene constante. El valor de la integral de la función entera $f(z) = A \cos(z)$, parece que *no depende* de la trayectoria C .

Figura 7.6: Visualización de $\int_C \cos(z) dz$.Figura 7.7: Visualización de $\int_C \cos(z) dz$.

Con exploraciones como las expuestas en las Figuras 7.4, 7.5, 7.6 y 7.7; ingresando funciones analíticas o no analíticas en el comando correspondiente de esta demostración, podemos explorar e ilustrar la relación entre de la independencia de la trayectoria de la integral y analiticidad.

Realizando ciertas modificaciones en esta Demostración, podemos adaptarla para explorar, casos particulares de la definición de la función logarítmica, $\text{Log} z = \int_1^z d\xi/\xi = \text{Ln}|z| + \text{Arg}(z)$, donde C es el segmento que une los puntos 1 y z . Esta trayectoria se puede deformar en la unión del segmento de $z_1 = 1$ a $z_2 = r \geq 1$ sobre el eje real y el arco circular centrado en el origen de z_2 a z . Las Figuras 7.8 y 7.9 ilustran para el caso $\text{Ln}(3 - 2i)$. Nuevamente se ilustra la independencia de la trayectoria de la integral de línea para una función analítica en cierto dominio.

Las exploraciones anteriores con esta Demostración, nos ilustran la posibilidad de la puesta en acción de actividades de enseñanza en ambiente dinámico e interactivo que favorecen, la exploración visual de algunas propiedades de integración compleja; tales como, independencia de la trayectoria y analiticidad, discusiones sobre el teorema de Cauchy-Goursat, y establecimiento de condi-

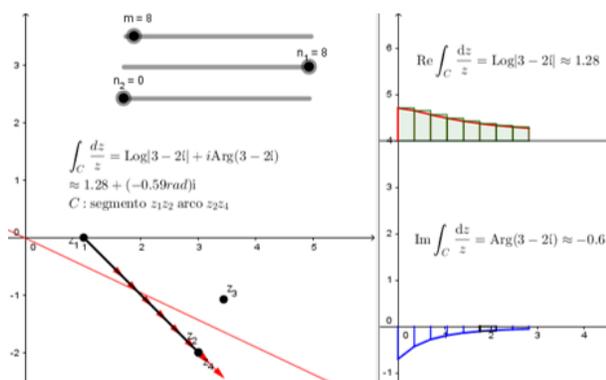


Figura 7.8: Visualización de $\text{Log}z = \int_1^z d\xi/\xi$, C : segmento de 1 a z_4

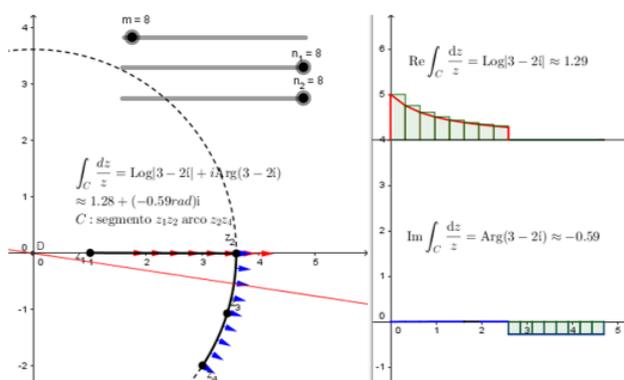


Figura 7.9: Representación completa de $\text{Log}z = \int_1^z d\xi/\xi$, C : segmento de 1 a z_2 y arco de z_2 a z_4

ciones de aplicación y verificación del teorema fundamental del cálculo en su forma compleja.

7.2. Dem. de integrales de contorno I

Esta demostración se ha creado principalmente, para explorar los resultados concretos de integrales de contorno cerrado, expuestas en las Ecuaciones (7.1) y (7.2) siguientes.

$$\oint_{|z-A|=r} \frac{dz}{(z-z_0)^n} = \begin{cases} 2\pi i & \text{si } n = 1, \text{ con } B \text{ dentro de } C \\ 0 & \text{si } n \neq 1, \text{ con } B \text{ dentro de } C \end{cases} \quad (7.1)$$

$$\oint_{|z-A|=r} \frac{dz}{(z-z_0)^n} = 0, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \text{ con } B \text{ fuera de } C \quad (7.2)$$

La Figura 7.10 muestra una pantalla final de esta Demostración.

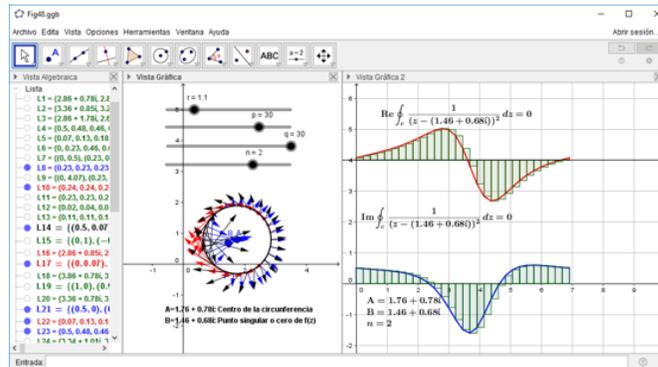


Figura 7.10: Pantalla típica de la Demostración 7.2

Como ya mencionamos, en la **Vista 1**, visualizamos las representaciones en el plano complejo. En la **Vista 2** se visualizan las representaciones en los planos de longitud de arco, la curva de componentes tangencial en rojo y la curva de componentes normal en azul. Así también presenta los valores numéricos de las sumas de Riemann aproximados de las partes real e imaginaria.

El usuario dispone de varias posibilidades de participación activa,

- deslizar p y q , para seleccionar el número de puntos-vectores a visualizar.
- arrastrar el punto A , centro de la circunferencia.
- arrastrar el punto-parámetro B de $f(z) = 1/(z - B)^n$,
- variar el radio de la circunferencia, arrastrando r .
- seleccionar el valor del exponente entero n , deslizando $-5 \leq n \leq 5$,
- Activar o desactivar la visibilidad los objetos que muestra.

Con los deslizamientos de, A , B o r ; el usuario puede ubicar B , dentro, sobre o fuera de la circunferencia. Aunque, como veremos, no para todas las posiciones se obtienen visualizaciones adecuadas.

Con el deslizador p establecemos el número total de puntos equidistantes sobre C en los que se evalúan y aproximan los elementos diferenciales de las integrales. Deslizando q de 0 a p , el usuario construye o genera consecutiva y simultáneamente, punto a punto, las representaciones parciales y final en ambas vistas.

Debido al número de variantes a considerar, condiciones, relaciones y opciones presentes, con la intención de ordenar su descripción, análisis y obtención de conclusiones, y atendiendo a problemas y visualizaciones inapropiadas que

se generan; para visualizar las integrales de 7.1 y 7.2 con esta demostración, establecemos la siguiente secuencia exploraciones.

Para la Ecuación 7.1,

- Exploración 1. $B = A, n = 1$,
- Exploración 2. $B = A, n \neq 1$,
- Exploración 3. $B \neq A, B$ dentro de $C, n < 1, f(z)$ entera,
- Exploración 4a. $B \neq A, B$ dentro de C y no cerca de $C, n = 1, f(z)$ no analítica dentro de C , (apropiada),
- Exploración 4b. $B \neq A, B$ dentro de C y no cerca de $C, n > 1, f(z)$ no analítica dentro de C (apropiada),
- Exploración 4c. $B \neq A, B$ dentro de C y cerca de $C, n > 0, f(z)$ no analítica dentro de C (inapropiada).

Para la Ecuación 7.2,

- Exploración 5a, B fuera de $C, n < 1, f(z)$ entera,
- Exploración 5b, B fuera de C y no cerca de $C, n \geq 1, f(z)$ analítica dentro de C (apropiada),
- Exploración 5c, B fuera de C y cerca de $C, n \geq 1, f(z)$ analítica dentro de C (inapropiada).

Es importante señalar que la Demostración 7.2, permite al usuario, por medio de una sola acción, ejecutar varias exploraciones consecutivas en una secuencia distinta a la indicada. Inclusive, por ejemplo, con deslizamientos de B , pasarse de exploraciones de la Ecuación 7.1 a exploraciones de la Ecuación 7.2. Veamos algunas de ellas.

7.2.1. Exploración 1: $\oint_{|z-B|=r} dz/(z-B) = 2\pi i, n = 1$

Ubicando en el plano complejo $A = B = 1 + i$, seleccionando $p = 30$ puntos sobre $C, n = 1$ y $r = 1$. Deslizandoo q de 0 a 30, visualizamos una secuencia de representaciones parciales y final de $\oint_C dz/(z - (1 + i)), C : |z - (1 + i)| = 1$. Presentamos tres de ellas en las Figuras 7.11, 7.12 y 7.13; para $q = 0$ (listo para iniciar la exploración), $q = 15$ (estado de la exploración en el punto 15) y $q = 30$ (representaciones finales de la integral con 30 puntos) respectivamente.

La Figura 7.12, ilustra el acontecer de la acción de deslizar q , cuando $q = 15$. Llevamos aproximadamente la mitad del proceso de exploración de la integral.

En el plano complejo observamos, aproximadamente, sobre la semicircunferencia superior las componentes normales. Las componentes tangenciales son

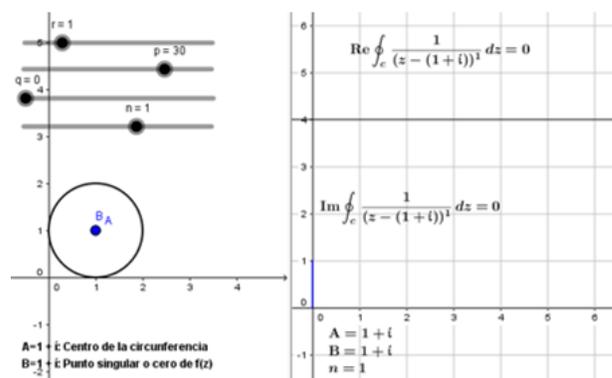


Figura 7.11: Representación inicial de $\oint_C dz/(z - (1 + i))$, $C : |z - (1 + i)| = 1$, (listo para explorar, $q = 0$)

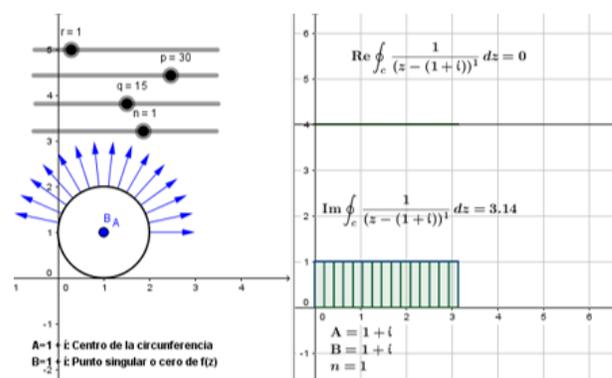


Figura 7.12: Representación parcial de $\oint_C dz/(z - (1 + i))$, $C : |z - (1 + i)| = 1$, (explorando, $q = 15$)

nulas. La magnitud de las componentes normales parece ser 1. Esto nos induce a pensar que sobre la semicircunferencia superior la integral es aproximadamente igual a πi .

En el plano de longitud de arco de la parte real. La curva de componentes tangentes es nula. La parte real debe ser cero.

En el plano de longitud de arco de la parte imaginaria. El área del rectángulo es aproximadamente 3,14. Sabiendo que la base del rectángulo es π (mitad del perímetro de la circunferencia), su área debe ser igual a π .

Todo esto no induce a conjeturar qué en esta etapa del proceso de integración, sobre la semicircunferencia superior, la integral debe ser igual a πi .

Veamos y analicemos la representación final que se muestra en la Figura 7.13.

En el plano complejo. Las componentes tangenciales no aparecen. Las componentes normales parecen tener magnitud constante, 1. Esto nos induce a pensar que sobre la circunferencia de perímetro 2π , la integral debe ser igual a $2\pi i$.

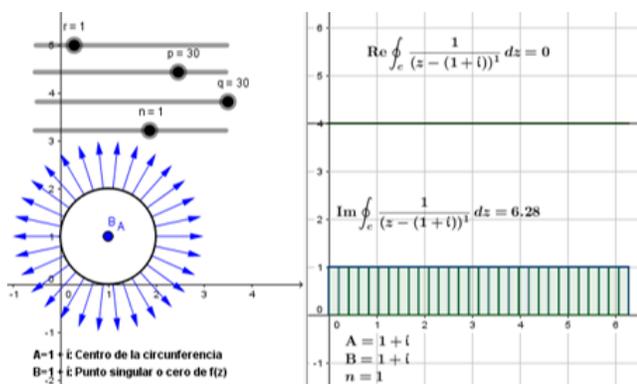


Figura 7.13: Representación parcial de $\oint_C dz/(z-(1+i)) = 2\pi i$, $C : |z-(1+i)| = 1$, (explorando, $q = 30$)

En el plano de longitud de arco de la parte real. La curva de componentes tangentes y el área bajo ella son ambas nulas.

En el plano de longitud de arco de la parte imaginaria. La curva de componentes normales es constante e igual a 1. El área del rectángulo es según aproximación numérica, 6.28. Pero sabiendo que la base del rectángulo es 2π , nos induce a pensar que dicha área debe ser igual a 2π .

De esta discusión, establecemos la aproximación, $\oint_C dz/(z-(1+i)) \approx 6.28i$ y conjeturamos $\oint_C dz/(z-(1+i)) = 2\pi i$ con $C : |z-(1+i)| = 1$.

La Figura 7.14, muestra la representación final para $B = A = 1.76 + 0.78i$, con $r = 0.7$,

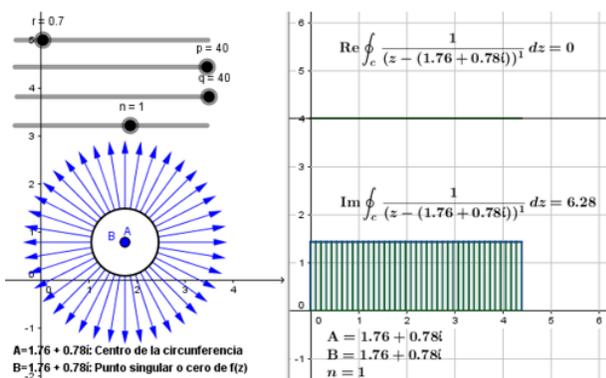


Figura 7.14: Representación parcial de $\oint_C dz/(z-B) = 2\pi i$, $C : |z-B| = r$, (explorando, $q = 30$)

Analicemos las representaciones de la Figura 7.14.

En el plano complejo. Las componentes tangenciales no aparecen. Las componentes normales parecen tener magnitud constante, digamos k . Esto nos induce a pensar que sobre la circunferencia de perímetro $2\pi \times 0.7$, la integral debe

ser igual a $2\pi \times 0.7 \times ki$.

En el plano de longitud de arco de la parte real. La curva de componentes tangentes es nula y por consecuencia el área bajo ella también es nula.

En el plano de longitud de arco de la parte imaginaria. La curva de componentes normales es constante e igual a k . El área del rectángulo es aproximadamente 6.28. Pero sabiendo que la base del rectángulo es $2\pi(0.7)$, nos induce a pensar que su altura debe ser $k = 1/0.7$, y que dicha área debe ser igual a 2π .

De esta discusión, conjeturamos que $\oint_C dz/(z-B) = 2\pi i$ con $C : |z-B| = r$, para los B y r seleccionados en esta Figura.

Ejecutando experiencias variadas como la siguientes, o sus combinaciones,

- Con $A = B$ y $r \neq 1$ fijos, construyendo las representaciones parciales y finales con el deslizador q ; y observando la tendencia final hacia los mismos valores numéricos de las partes real e imaginaria, 0 y 6.28, respectivamente (podrían ser con más cifras decimales),
- Con $A = B$ y teniendo construidas las representaciones finales; variando r , visualizando la generación de representaciones geométricas con patrones invariantes, y observando, ante la acción de variar r , la invariancia de los valores aproximados de las partes real e imaginaria 0 y 6.28, respectivamente.

Esperamos que el usuario conjeture, $\oint_{|z-B|=r} dz/(z-B) = 2\pi i$.

7.2.2. Exploración 2: $\oint_{|z-B|=r} dz/(z-B)^n = 0, n = 0, -1, \pm 2, \dots, \pm 5$

Ubicando $A = B$, seleccionando $n = 0, -1, \pm 2, \dots, \pm 5$, construyendo las representaciones parciales y finales con el deslizamiento de q , y variando r ; exploremos la integral de contorno cerrado $\oint_C dz/(z-B)^n, C : |z-B| = r, n = 0, -1, \pm 2, \dots, \pm 5$.

Las figuras 7.15 y 7.16 muestran representaciones finales para los casos particulares de $n = 0$ y $n = 3$ respectivamente.

Analicemos las representaciones en las Figuras 7.15 y 7.16.

En el plano complejo. Al desplazarnos una vuelta completa en sentido positivo, siguiendo el criterio frente-atrás observamos su cancelación simétrica de las componentes tangenciales en rojo. Así la parte real debe ser cero. En lo que respecta a las componentes normales, para $n = 0$ observamos una aparente cancelación de las componentes que entran y salen, así la parte imaginaria para este caso debe ser cero. Para $n = 3$, no logramos observar que las componentes que entran cancelen a las componentes que salen.

En el plano de longitud de arco. Las curvas de componentes tangencial nos inducen a pensar que deben ser sinusoides y las curvas de componentes normales cosinusoides, ambas con ciclos completos sobre el perímetro de la

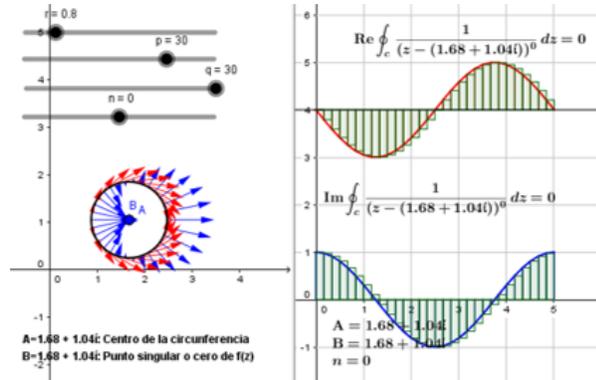


Figura 7.15: Representación parcial de $\oint_C dz/(z-A)^0 = \oint_C dz = 0, C: |z-A|=r$.

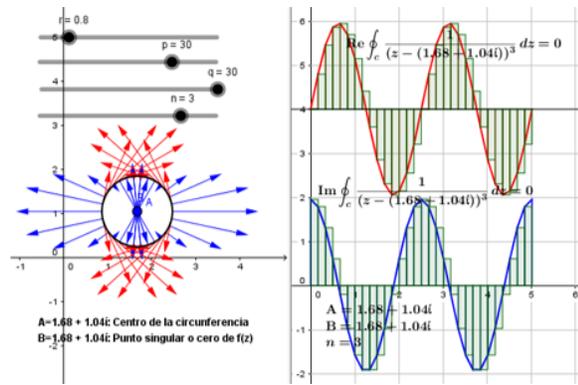


Figura 7.16: Representación de $\oint_C dz/(z-A)^3 = 0, C: |z-A|=r$.

circunferencia. Las áreas netas son cero. Esto lo confirman los valores aproximados de las sumas de Riemann calculadas. Por lo que las integrales deben ser cero.

Explorando con otros valores de $n = 0, -1, \pm 2, \dots, \pm 5$ siempre con $A = B$ y variando el radio de la circunferencia, en el plano de longitud de arco, las curvas de componentes tangenciales y normales generadas, deben ser respectivamente, sinusoides y cosinusoides, con $|n-1|$ ciclos completos sobre el intervalo $[0, 2\pi r]$ ¹, por lo que las áreas netas bajo ellas son cero. Así ambas partes real e imaginaria de la integral son cero. Esto lo confirman los valores aproximados de las sumas de Riemann.

Así, con tales experiencias creemos que el usuario puede ir construyendo conjeturas sobre las integrales, $\oint_{|z-B|=r} dz/(z-B)^n = 0, n \neq 1$.

¹Dejamos al lector interesado mostrar que, si $A = B = 0$ y $r = 1$, las curvas de las proyecciones tangente y normal de Pólya son respectivamente, $T(\beta) = \sin[(n-1)\beta]$ y $N(\beta) = \cos[(n-1)\beta], 0 \leq \beta < 2\pi, \beta = \text{Arg}(z), z$ sobre C .

7.2.3. Exploración 3: $\oint_{|z-A|=r} dz/(z-B)^n = 0, n = 0, -1, -2, \dots, -5;$
 B dentro de C

Con $B \neq A$ y $-5 \leq n \leq 0$. En estos casos $f(z)$ es entera (analítica dentro y sobre C). Seleccionando un valor de $n < 1$, deslizando $B \neq A$ dentro de la circunferencia, y variando r , obtenemos pantallas finales como se muestran en las Figuras 7.17 y 7.18, para $n = 0$ y $n = -3$ respectivamente.

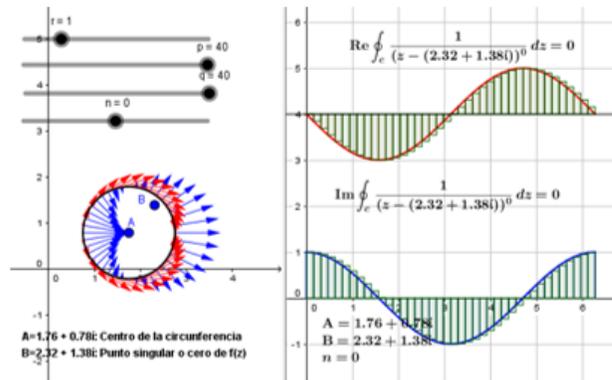


Figura 7.17: Visualización de $\oint_C dz/(z-A)^0 = 0, C : |z-A| = r$, con B dentro de C .

En la Figura 7.17, todas las representaciones geométricas y numéricas nos inducen a pensar que se debe cumplir $\oint_C dz/(z-A)^n = 0$, con $n = 0$.

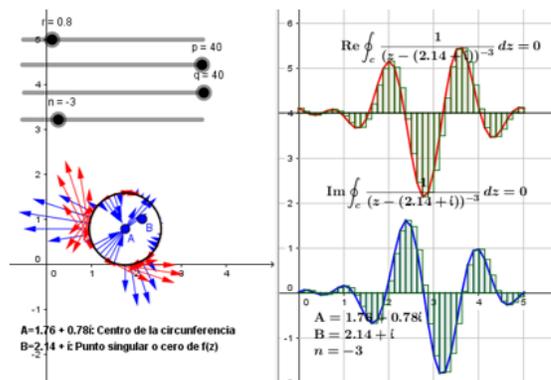


Figura 7.18: Visualización de $\oint_C dz/(z-A)^{-3} = 0, C : |z-A| = r$, con B dentro de C .

En la Figura 7.18, las sumas de Riemann de las partes real e imaginaria son aproximadamente cero. Estos resultados parecen evidenciarse observando las áreas netas bajo las curvas de componentes tangencial y normal. Observaciones y resultados similares se obtienen explorando para $n = -1, -2, \dots, -5$.

Con exploraciones intencionadas en las cuales $-5 \leq n \leq 0$, deslizando $B \neq A$ dentro de la circunferencia, variando r y deslizando $0 \leq q \leq p$, en las

que se observa la tendencia del valor final de las sumas de Riemann a cero, y la invariancia de este valor final a los desplazamientos de B y variación de r , esperamos que el usuario conjeture el resultado, $\oint_C dz/(z - B)^n = 0, -5 \leq n \leq 0, C : |z - A| = r$, con B dentro de C .

7.2.4. Exploración 4a: $\oint_{|z-A|=r} dz/(z - B) = 2\pi i, n = 1$, con B dentro de C y cerca de A

Ahora exploremos los casos $A \neq B, n = 1, B$ dentro de la circunferencia y cercano al centro, (más adelante veremos la razón de esta restricción).

Deslizando el polo B alrededor del centro de la circunferencia, o el centro de la circunferencia A alrededor del polo B , o cambiando el radio de la circunferencia bajo la condición de que B no esté relativamente cerca del perímetro; se visualizan imágenes finales como la mostrada en la Figura 7.19.

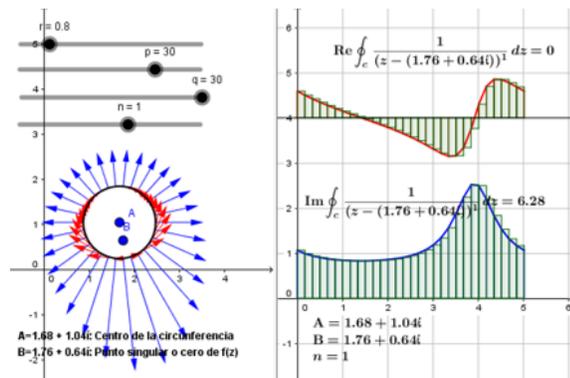


Figura 7.19: Visualización de $\oint_C dz/(z - B)$, con B cerca de A .

En el plano complejo, las componentes tangenciales parecen cancelarse simétricamente respecto a la recta que une a los puntos A y B , indicándonos que la parte imaginaria debe ser cero. Los vectores normales todos apuntan hacia afuera, esto nos indica que la parte imaginaria debe ser positiva.

En los planos de longitud de arco. El área neta bajo la curva de proyecciones tangencial debe ser cero, esto por cancelación simétrica con respecto al eje de las abscisas. El área bajo la curva de proyecciones normal se mantiene positiva. Las sumas de Riemann correspondientes son cero y 6.28 aproximadamente.

Con acciones de deslizar B en las cercanías de A , y observar que, aunque la curva de componentes tangentes cambia en su naturaleza de variación, por simetría el área neta bajo ella siempre es cero; y observar también que, aunque la curva de componentes normales cambia de naturaleza de variación, el área bajo ella que proporciona la suma de Riemann se mantiene igual a 6.28 aproximadamente. Esperamos ayudar al usuario a inferir que, $\oint_C dz/(z - B) = 2\pi i$, con el polo B dentro de la circunferencia $C : |z - A| = r$ y relativamente no cercano a ella.

7.2.5. Exploración 4b: $\oint_{|z-A|=r} dz/(z-B)^n = 0, n = 1, 2, \dots, 5$; con B dentro de C y cerca de A

Exploremos con $B \neq A, B$ dentro de la circunferencia, pero relativamente no “muy” próximo a ella, y $n > 1$, (como dijimos, más adelante veremos la razón de esta restricción). En estos casos $f(z)$ tiene un polo de orden n dentro de la circunferencia.

Deslizando $B (\neq A)$ dentro de la circunferencia, pero no próximo a ella y variando r , obtenemos pantallas finales como se muestran en las Figuras 7.20 y 7.21, para $n = 2$ y $n = 4$ respectivamente.

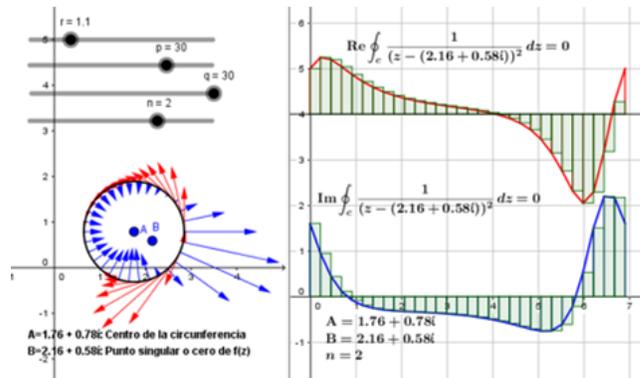


Figura 7.20: Visualización de $\oint_C dz/(z-B)^2$, con B cerca de A dentro de C .

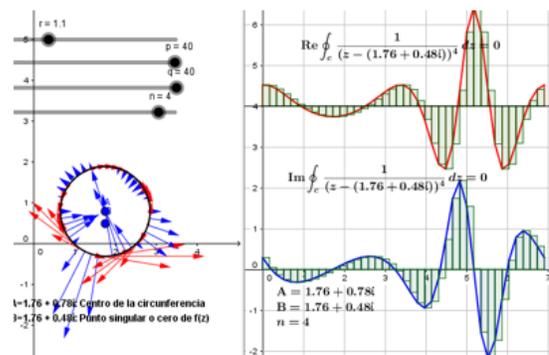


Figura 7.21: Visualización de $\oint_C dz/(z-B)^4$, con B cerca de A dentro de C .

En las Figuras 7.20 y 7.21, los valores aproximados de sumas de Riemann nos informan que ambas partes real e imaginaria de la integral son cero. Esta aproximación parece confirmarse, observando la disposición geométrica de las curvas de componentes tangenciales y normales sobre el eje horizontal en las que las áreas netas bajo dichas curvas deben ser cero.

Exploraciones con otros valores de n , en los que, $2 \leq n \leq 5$ generan representaciones similares. Basados en estas exploraciones y resultados, esperamos

que el usuario conjeture, $\oint_C dz/(z-B)^n = 0, 2 \leq n \leq 5, C : |z-A| = r$, con B dentro de C y no muy cerca de ella.

7.2.6. Exploración 4c: $\oint_{|z-A|=r} dz/(z-B)^n, n = 0, -1, -2$ con B dentro y cerca de C

Ahora veamos las representaciones geométricas que se generan cuando $f(z) = 1/(z-B)^n, 1 \leq n \leq 5$, con B está dentro de C y relativamente cercana a ella. La Figura 7.22 muestra un caso particular para $n = 3$.

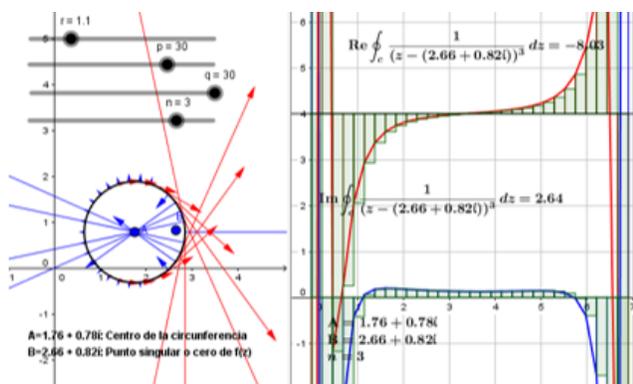


Figura 7.22: Visualización inadecuada y errada de $\oint_C dz/(z-B)^3, C : |z-A| = r$, con B en el interior de C cercano a su perímetro.

Para puntos z sobre C cercanos a B , $|z-B|$ es pequeña, las componentes de los vectores de Pólya de $f(z) = 1/(z-B)^3$ toman valores grandes. Estos valores generan representaciones geométricas no adecuadas en ambas vistas gráficas. Además, las características propias de construcción y operación de la Demostración, junto con las limitaciones de procesamiento aritméticos (divisiones con denominadores “muy” pequeños) del *GeoGebra* generan valores numéricos errados. Situación que se empeora cuando n toma los valores mayores o conforme B se acerca C y se ubica sobre un punto de ella.

En experiencias informales realizadas con estudiantes sobre visualizaciones como la presentada en la Figura 7.2, quienes ya habían trabajado anteriormente con las Exploraciones 4a y 4b, la mayoría cree que la integral debe ser igual a 0 para cualquier punto B dentro de la circunferencia, aunque no pueden justificarlo correctamente. Mientras que para otros es fuente de confusiones e interpretaciones falsas.

Consideramos que esta situación problemática de enseñanza generada con la Demostración 5, puede motivar la necesidad de estudio y prueba formal de la teoría correspondiente a la Ecuación 7.1.

Finalmente, aún con sus deficiencias, creemos que, con la participación guiada y activa del estudiante en exploraciones similares a las 4a, 4b y 4c; y organizando las conclusiones obtenidas en ellas, podemos ayudarle a generar

conjeturas significativas sobre la Ecuación (7.1) y promover la necesidad de su verificación formal.

7.2.7. Exploración 5a: $\oint_{|z-A|=r} dz/(z - B)^n = 0, n = 0, -1, -2$ con B afuera y no cerca de C

Pasando a exploraciones de la Ecuación (7.2), visualicemos algunos casos de la integral $\oint_{|z-A|=r} dz/(z - B)^n, n = 0, -1, -2$ con B afuera de C . En estos casos $f(z)$ es entera. Las Figuras 7.23 y 7.24 muestran las representaciones de las integrales para $n = -1$ y $n = -2$, respectivamente.

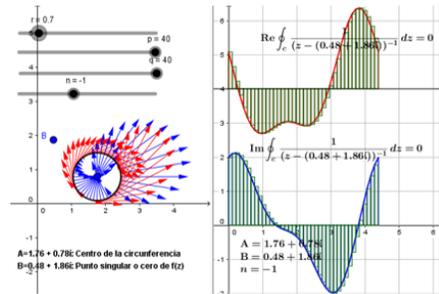


Figura 7.23: Visualización de $\oint_{|z-A|=r} dz/(z - B)^{-1} = 0, B$ fuera de C .

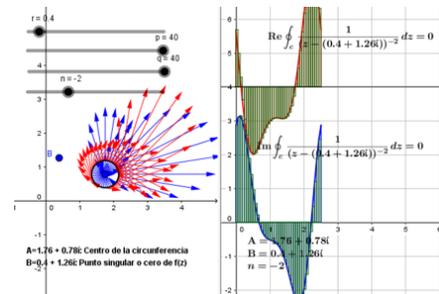


Figura 7.24: Visualización de $\oint_{|z-A|=r} dz/(z - B)^{-2} = 0, B$ fuera de C .

En las Figuras 7.23 y 7.24, los valores aproximados de las sumas de Riemann nos informan que ambas partes real e imaginaria de la integral deben ser cero. Aunque de las áreas netas, visualmente no podemos confirmarlo.

Para $n = 0, f(z) = 1$, no depende de la ubicación del punto-parámetro B , se generan representaciones similares a la mostrada en la Figura 7.15. Ella nos da indicios visuales que la integral es cero, como lo confirman las sumas de Riemann.

Para valores de $-5 \leq n < -2$, los valores de las sumas de Riemann son también cero, y la disposición de las curvas de componentes tangentes y normal

nos da algunos indicios de porqué la integral debe ser cero. Pero para estos casos, las curvas en el plano de longitud de arco pueden aparecer traslapadas, dificultando su visualización apropiada.

7.2.8. Exploración 5b: $\oint_{|z-A|=r} dz/(z-B)^n = 0, n = 1, 2, \dots, 5;$ con B afuera y no cerca de C

Visualicemos algunos casos particulares de la integral para $1 \leq n \leq 5$, con B fuera de C pero no próxima a ella. En estos casos $f(z)$ no es entera pero analítica dentro y sobre C . Las Figuras 7.25 y 7.26 muestran las representaciones para $n = 1$ y 2.

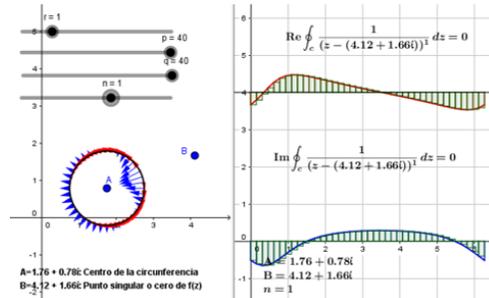


Figura 7.25: Visualización de $\oint_{|z-A|=r} dz/(z-B) = 0, B$ fuera y no cerca de C .

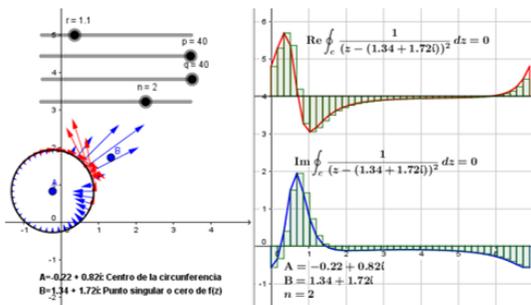


Figura 7.26: Visualización de $\oint_{|z-A|=r} dz/(z-B)^2 = 0, B$ fuera y no cerca de C .

En la Figura 7.25 con $n = 1$, la curva de componentes tangentes nos da indicios visuales que la parte real debería ser igual a cero. Las aproximaciones de las sumas de Riemann son ambas cero y se mantienen invariantes ante deslizamientos de B y A con B fuera de C y a variaciones de r .

En la Figura 7.26 con $n = 2$, la disposición de las curvas respecto al eje horizontal no ofrece suficientes elementos para afirmar que la integral es cero. Las aproximaciones de ambas sumas de Riemann son cero. Lo importante a

señalar es que estas aproximaciones permanecen iguales a cero, ante deslizamientos relativos de A y B , manteniendo B fuera y relativamente lejos de la circunferencia y ante variaciones de su radio.

7.2.9. Exploración 5c: $\oint_{|z-A|=r} dz/(z-B)^n, n = 1, 2, \dots, 5$; con B afuera y cerca de C

Visualicemos algunos casos particulares de la integral para $1 \leq n \leq 5$, con B fuera y relativamente cerca de C , o sobre un punto de C . En estos casos $f(z)$ no es entera pero analítica dentro y sobre C . Las Figura 7.27 muestra las representaciones para $n = 2$.

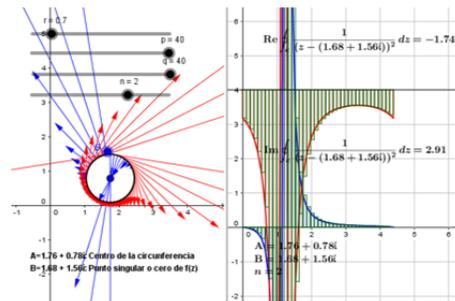


Figura 7.27: Visualización de $\oint_{|z-A|=r} dz/(z-B)^2, B$ fuera y cerca de C .

Las representaciones de la integral mostrada en la Figuras 7.27, son inapropiadas y contienen errores. Como explicamos anteriormente, esto se debe a limitaciones de procesamiento aritmético del Geogebra que generan valores numéricos errados al efectuar cocientes con denominares muy pequeños.

Cabe reiterar, de manera similar como lo señalamos anteriormente, que en experiencias informales realizadas con estudiantes que ya habían trabajado anteriormente con las Exploraciones similares a 5a y 5b, un grupo cree que la integral de la Figura 7.27 debe ser igual a 0 para cualquier punto B fuera de la circunferencia. Mientras para otro grupo, fue fuente de desconcierto e interpretaciones falsas.

Creemos que mediante la participación activa y reflexiva en secuencias de aprendizaje organizadas y guiadas en torno a exploraciones como las descritas 5a, 5b y 5c, el usuario puede elaborar conjeturas significativas y correctas sobre la Ecuación (7.2) Adicionalmente puede motivarle la necesidad de su estudio analítico formal.

Finalmente, aún con sus deficiencias, consideramos que exploraciones visuales en los que $f(z)$ es analítica dentro y sobre el contorno, proporcionan posibilidades de puesta en acción de actividades didácticas destinadas para poner en discusión inicial e informal cuestiones sobre el teorema de Cauchy-Goursat, previas a su formalización analítica, o como actividades de su verificación.

7.3. Dem. de integrales de contorno II

Las Exploraciones 3, 4 y 5 anteriormente presentadas, posiblemente promuevan inquietudes sobre el valor de la integral $\oint_{|z-A|=r} dz/(z-B)$ cuando el punto singular B está sobre sobre C . La demostración de la Sección 7.2 no es apropiada para explorar y conjeturar respuestas a esa pregunta. Hemos elaborado la Demostración de integrales de contorno cerrado II para este propósito.

7.3.1. Exploración: $\oint_{|z-A|=r} dz/(z-B) = \pi i$, con B sobre C , (apropiada)

La Figura 7.28, ilustran una de las representaciones finales de algunas exploraciones de la Demostración 7.3, apropiadas.

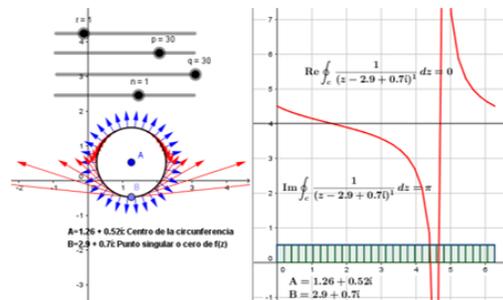


Figura 7.28: Visualización de $\oint_{|z-A|=r} dz/(z-B) \approx \pi i$, con B sobre C .

En la Figura 7.28, las representaciones en el plano complejo junto con las representaciones en los sistemas de longitud de arco y cálculos numéricos, nos sugieren que la integral debe ser igual a πi

7.3.2. Exploración: $\oint_{|z-A|=r} dz/(z-B)$, con B sobre C , (inapropiada)

Las Figuras 7.29 y 7.30, ilustran representaciones finales de algunas exploraciones de la Demostración 7.3, que generan errores.

En la Figura 7.29, nuevamente, las representaciones geométricas y la aproximación numérica de la parte imaginaria nos hacen pensar que la integral es igual a πi , aunque la aproximación numérica de la parte real no es correcta, esto sucede cuando B se ubica sobre algunos puntos de C .

En la Figura 7.30, las representaciones geométricas sugieren que la parte imaginaria debe ser cero y que la parte real debe positiva e igual al área del rectángulo de base 2π y altura aproximadamente $1/2$. Los valores numéricos aparecen indefinidos debido a la división por cero en $1/(z-B)$ cuando $z = B$. Esta situación se presenta cuando B se posiciona en cualquiera de los 30

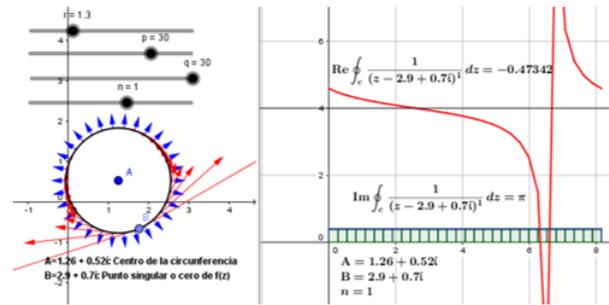


Figura 7.29: Visualización de $\oint_{|z-A|=r} dz/(z-B) \approx \pi i$, con B sobre C , con error en la parte real.

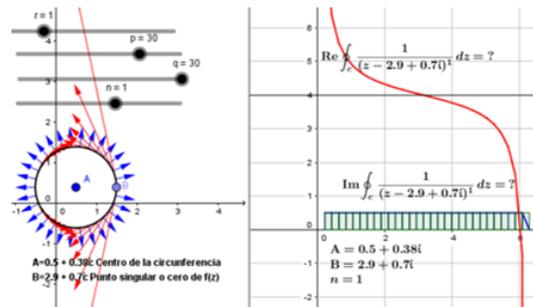


Figura 7.30: Visualización deficiente de $\oint_{|z-A|=r} dz/(z-B)$, con B sobre C .

puntos muestras establecidos para el cálculo de las sumas de Riemann, sobre la circunferencia.

Para otras posiciones de B sobre C , se generan representaciones similares a las presentadas. Las componentes tangenciales se cancelan respecto a la recta que pasa por A y B . Las componentes normales son radiales de magnitud constante sobre la circunferencia. El área neta bajo las curvas de componentes tangenciales parece ser nula, esto atendiendo a la simetría de la curva en rojo. El área neta bajo la curva de componentes normales, es igual al área de un rectángulo, cuyo valor es aproximadamente π .

Esperamos que, con exploraciones guiadas con la Demostración 7.3, ayudemos al usuario a conjeturar la integral $\oint_{|z-A|} dz/(z-B) = \pi i$, con B sobre C^2 . Así también promover discusiones sobre el valor principal de Cauchy.

La Demostración 7.3, permite generar también algunas conjeturas sobre el valor de $\oint -|z-A| = r1/(z-B)^n$, con B sobre C y $n > 1$. Estas exploraciones no las discutimos en este documento.³

²Invitamos al lector a deducir que con $B = 0$ y $A = r = 1$, las curvas de componentes tangencial y normal son respectivamente $T(\beta) = -\tan(\beta/2)/2$ y $N(\beta) = 1/2, 0 < \beta < \pi, \pi < \beta < 2\pi$.

³Animamos al lector a deducir que con $B = 0$ y $A = r = 1$, las curvas de componentes tangencial y normal son respectivamente, $T(\beta) = \sin[(n/2 - 1)\beta]/(2^n \cos^n(\beta/2))$ y $N(\beta) =$

7.4. Dem. de integrales de contorno III

Con la intención de proponer exploraciones que motiven discusiones sobre el principio de deformación del contorno, hemos elaborado esta demostración para visualizar las integrales $\oint_C dz/(z - B), n = 0, \pm 1, \pm 2 \pm \dots$, con C un cuadrilátero. El cuadrilátero se deforma deslizando sus vértices. El punto B puede deslizarse dentro del cuadrilátero. Las representaciones geométricas y numericas se generan con un deslizador. Veamos algunas exploraciones.

7.4.1. Exploración: $\oint_C dz/(z - B) = 2\pi i$, C : cuadrilátero, B dentro C

La Figura 7.31 presenta las representaciones finales para $n = 1$ y B dentro de C .

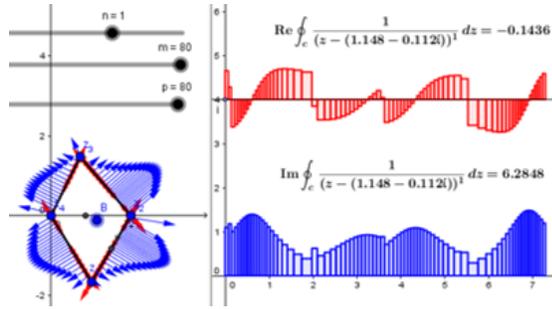


Figura 7.31: Visualización de $\oint_C dz/(z - B) \approx 2\pi i$, C : cuadrilátero, B dentro de C .

Deslizando los vértices del cuadrilátero o deslizando el punto B dentro de C , se obtienen representaciones similares a la mostrada en la Figura 7.31. Todas las componentes normales siempre apuntan hacia afuera, indicando que la parte real debe ser positiva. La aproximación numérica del área neta bajo la curva tangencial varía alrededor de cero, el área neta bajo la curva de componentes tangencial debe ser cero. El área neta bajo la curva normal es positiva y su valor numérico aproximado varía alrededor de 6.28. Estas observaciones sugieren que la integral debe ser igual a $2\pi i$ independientemente de la forma del cuadrilátero.

7.4.2. Exploración: $\oint_C dz/(z - B)^n = 0, n \neq 1$ C : cuadrilátero, B dentro C

La Figuras 7.32 y 7.33 muestran las representaciones finales de exploraciones para $n = 2$ y $n = -1$, con B dentro de C .

Como se muestran en las Figuras 7.32 y 7.33, deslizando de B dentro de C o deformando el cuadrilátero, las aproximaciones numéricas bajo las curvas tangencial y normal varían cerca de cero, las áreas netas bajo ellas deben ser

$$\cos[(n/2 - 1)\beta]/2^n \cos^n(\beta/2), 0 \leq \beta < \pi, \pi < \beta \leq 2\pi.$$

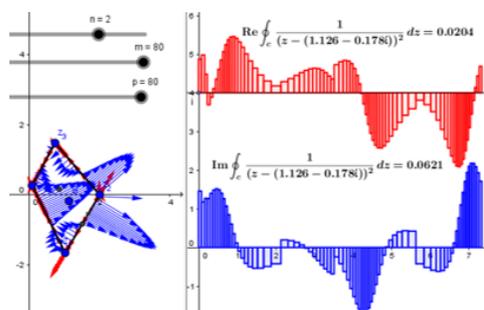


Figura 7.32: Visualización de $\oint_C dz(z - B)^2 \approx 0$, C : cuadrilátero, B dentro de C .

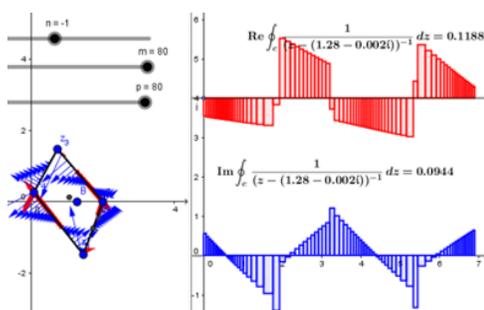


Figura 7.33: Visualización de $\oint_C dz/(z - B)^{-1} \approx 0$, C : cuadrilátero, B dentro de C .

cero. Estas exploraciones nos sugieren que la integral debe ser igual a cero independientemente de la forma o disposición del cuadrilátero.

Para otros valores de n , con B dentro del cuadrilátero, en general, se obtienen representaciones y resultados similares a las presentadas.

7.5. Dem. de integrales de contorno IV

Para reforzar y/o complementar las discusiones y resultados sobre el principio de deformación del contorno obtenidas con la demostración descrita en la Sección 7.3, elaboramos esta demostración en la que se visualizan las integrales $\oint_C dz/(z - B)^n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, con C una curva más general aproximada por medio de un polígono. El usuario puede deformar el polígono y generar las representaciones por medio de deslizadores. El punto B puede ubicarse dentro o fuera del polígono. Veamos algunas exploraciones.

7.5.1. Exploración: $\oint_C dz/(z - B) = 2\pi i$, $n = 1$ C : polígono, B dentro de C

La Figura 7.34 muestra la representación final para de la integral para $n = 1$, de ella se induce que $\oint_C dz/(z - B) = 2\pi i$

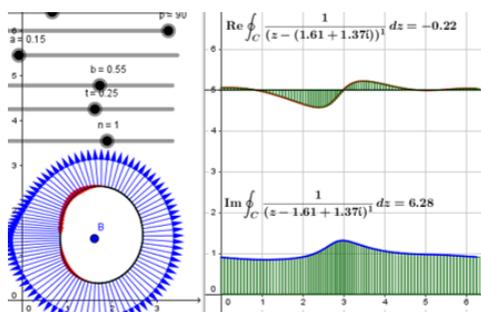


Figura 7.34: Visualización de $\oint_C dz/(z - B) \approx 2\pi i$, C : polígono, B dentro de C .

7.5.2. Exploración: $\oint_C dz/(z - B)^2 = 0$, $n \neq 1$ C : polígono, B dentro de C

La Figura 7.34 muestra la representación final para de la integral para $n = 2$, de ella se induce que $\oint_C dz/(z - B) = 0$

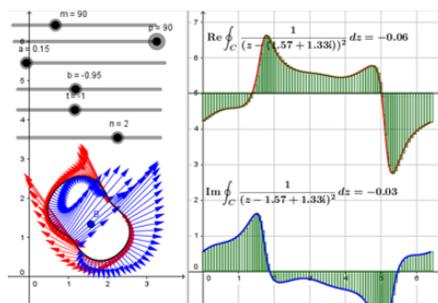


Figura 7.35: Visualización de $\oint_C dz/(z - B)^2 \approx 0$, C : polígono, B dentro de C .

En las exploraciones de las dos secciones anteriores (Figuras 7.34 y 7.35), haciendo observaciones y reflexiones similares a las realizadas con integrales sobre circunferencias y cuadriláteros, esperamos que usuario conjeture, tanto sobre el valor de las integrales, como sobre la invariancia del mismo ante deformaciones de la curva de integración.

Así también, esperamos que, a través de la participación activa del usuario en exploraciones dinámicas de una misma integral sobre circunferencias, cuadriláteros o curvas más generales, similares a las presentadas, vaya construyendo ideas primarias sobre, y familiarizándose con, el principio de deformación del contorno en integración compleja.

7.6. Dem. de integrales de contorno V

Esta demostración ha sido creado para explorar ejemplos particulares de integrales de contorno de funciones $g(z) = f(z)/(z - B)$, que tienen explícitamente

un único punto singular dentro del contorno y $f(z)$ analítica dentro y sobre dicho contorno.

En ellas el usuario desliza el punto B sobre el eje real dentro del contorno cerrado y observa la generación de gráficas de las partes real e imaginaria en función de B .

7.6.1. Exploración: $\oint_C \sin(2\pi z) dz / (z - B) = 2\pi i \sin(2\pi B)$, B real dentro de C .

La Figura 7.36 muestra las representaciones finales de, $\oint_{|z|=r} \sin(2\pi z) dz / (z - B)$, B real dentro de C .

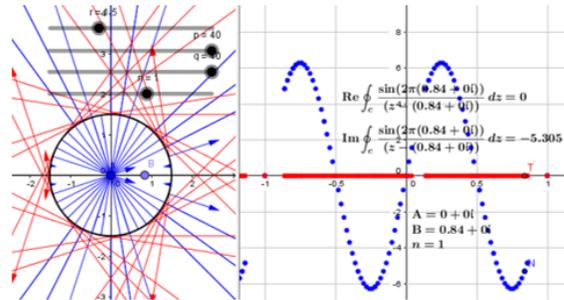


Figura 7.36: Visualización de $\oint_C \sin(2\pi z) dz / (z - B) \approx 2\pi i \sin(2\pi B)$, B real dentro de C .

Al arrastrar B dentro de C sobre el eje real, la parte real (línea roja) se mantiene en cero, la parte imaginaria varía con el desplazamiento de B (curva punteada en azul), la gráfica de esta función parece ser $f(B) = 6,28 \sin(2\pi B)$ aproximadamente, por lo que, $\oint_C \sin(2\pi z) dz / (z - B) \approx 6,28i \sin(2\pi B)$. Esto nos invita a pensar que $\oint_C \sin(2\pi z) dz / (z - B) = 2\pi i \sin(2\pi B)$.

En ésta exploración, en las gráficas vemos para $B = 0$, $\oint_C \sin(2\pi z) / z = 0$, esto nos dice que $f(z) = \sin(2\pi z) / z$ debe tener una singularidad removible en $z = 0$ y su residuo debe ser cero.

7.6.2. Exploración: $\oint_C z^3 dz / (z - B) = 2\pi i B^3$, B real dentro de C .

La Figura 7.37 muestra las representaciones finales de, $\oint_{|z|=r} z^3 dz / (z - B)$, B real dentro de C .

El contorno puede deformarse con los deslizadores a, b o t . Los vectores componentes sobre el contorno se han ocultado para observar este contorno más libremente.

Al arrastrar B dentro de C sobre el eje real, la parte real (línea roja) es casi cero, la parte imaginaria varía con el desplazamiento de B (curva punteada en azul), la gráfica de esta función parece ser aproximadamente $f(B) = 6,28B^3$,

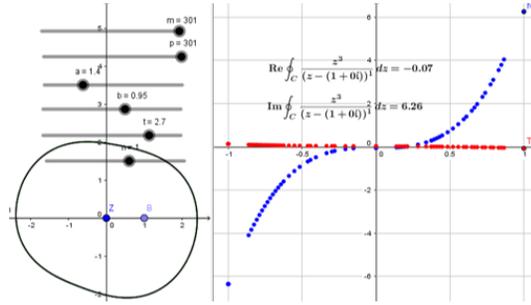


Figura 7.37: Visualización de $\oint_{|z|=r} z^3 dz / (z - B) \approx 2\pi i B^3$, B real dentro de C .

por lo que $\oint_{|z|=r} z^3 dz / (z - B) \approx 2\pi i B^3$, B real dentro de C . Esto nos sugiere pensar que $\oint_{|z|=r} z^3 dz / (z - B) = 2\pi i B^3$.

En demostraciones complementarias, explorando integrales de $g(z) = f(z)/(z - B)$, $f(z)$ analítica dentro del contorno. Con B complejo fijo dentro del contorno, con deslizamientos de q de 0 a p , o deformando el contorno. O bien con un contorno fijo y ubicando B en distintos puntos dentro del contorno, vemos que los valores numéricos que proporcionan las sumas de Riemann de la parte real e imaginaria, respectivamente, cumplen aproximadamente con $\text{Re}[2\pi i f(B)]$ e $\text{Im}[2\pi i f(B)]$.

Creemos que la participación activa y reflexiva del usuario en actividades exploratorias dinámicas similares a las presentadas con esta demostración, pueden ayudarle a construir ideas primarias e informales sobre la fórmula de la integral de Cauchy para $n = 1$.

7.7. Dem. Teo. de Cauchy-Goursat

Como última demostración, veamos una demostración diseñada para explorar el teorema de Cauchy-Goursat para dominios múltiplemente conexos.

Consideremos las visualizaciones de las integrales asociadas a las Figuras 7.38, 7.39 y 7.40. La Figura 7.38 muestra representaciones de $\oint_{|z|=1.3} dz / (z^2 + 1/2)$. En este caso ambos polos simples de $f(z)$ están dentro de C . Aquí, todas las representaciones de la integral nos sugieren que tanto parte real como imaginaria deben ser cero.

En la Figura 7.39 muestra representaciones de $\oint_{C_1} dz / (z^2 + 1/2)$, $C_1 : |z - A| = 0.5$. En este caso el polo simple $z = i/\sqrt{2}$ está dentro de C_1 . Las aproximaciones de las sumas de Riemann de las parte real e imaginaria sugieren de la integral sobre C_1 son aproximadamente igual a 4.44 y cero respectivamente

La Figura 7.40 muestra representaciones de $\oint_{C_2} dz / (z^2 + 1/2)$, $C_2 : |z - A| = 0.5$. En este caso el segundo polo simple $z = -i/\sqrt{2}$ está dentro de C_2 . Las aproximaciones de las sumas de Riemann de las parte real e imaginaria sugieren

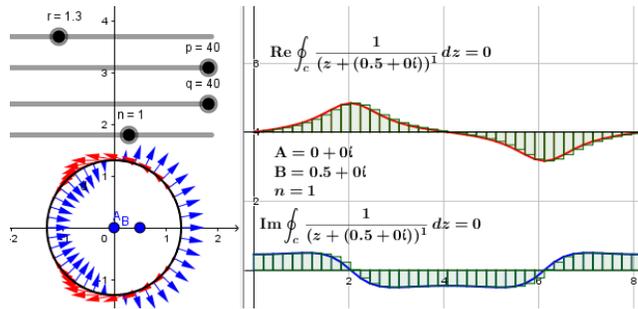


Figura 7.38: Visualización de $\oint_C dz/(z^2 + 1/2) = 0, C : |z| = 1$.

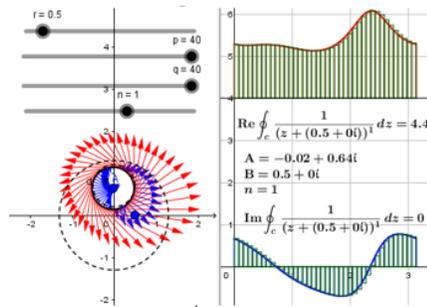


Figura 7.39: Visualización de $\oint_{C_1} dz/(z^2 + 1/2) \approx 4,44, C_1 : |z - A| = 0.5$.

de la integral son aproximadamente igual a -4.44 y cero respectivamente.

Notamos que las representaciones visuales y numéricas que muestran las Figuras 7.38, 7.39 y 7.40; ilustran un caso particular del teorema de Cauchy-Goursat para dominios múltiplemente conexos, esto es, se verifica en este caso particular que: $\oint_C dz/(z^2 + 1/2) = \oint_{C_1} dz/(z^2 + 1/2) + \oint_{C_2} dz/(z^2 + 1/2)$ con C, C_1 y C_2 indicadas.

Realizando experiencias similares, se puede explorar activa y dinámicamente este teorema, arrastrando y ubicando B en otras posiciones, variando los radios de las circunferencias y ubicando A en otras posiciones siempre que se satisfagan con las condiciones de dicho teorema.

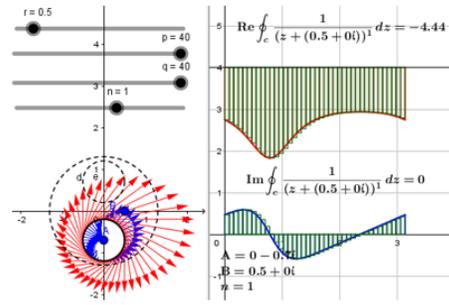


Figura 7.40: Visualización de $\oint_{C_2} dz/(z^2 + 1/2) \approx -4,44$, $C_2 : |z - A| = 0.5$.

Capítulo 8

Discusión y comentarios

Como describimos, las demostraciones presentadas, ofrecen varias posibilidades de uso, como herramienta didáctica apropiada para un fin específico; u organizarlas para proponer actividades de ilustración, exploración, verificación o aún más, de establecimiento de conjeturas, de algunos conceptos relevantes de integración compleja, en un ambiente de enseñanza, visual, interactivo y dinámico.

Con dichas demostraciones esperamos proponer situaciones de enseñanza interactivas donde el estudiante pueda visualizar interpretaciones geométricas de algunas integrales complejas asociadas al campo de Polya. Pero también, creemos que es posible adecuarlas u organizarlas para explorar, inducir o verificar, relaciones y propiedades relativas a; independencia de la trayectoria, teorema fundamental del cálculo en variable compleja y teorema de Cauchy-Goursat; el valor principal y la fórmula de la integral de Cauchy; y el principio de deformación del contorno. O también, para introducir el concepto de residuo y justificar el estudio de la expansión de Laurent.

En cuanto a algunos aspectos problemáticos potenciales que podrían presentarse durante su uso, señalamos principalmente,

- Necesidad de estudio adicional. Su puesta en acción requiere estudio adicional de contenidos relativos a campos de Polya y construcción de interpretaciones geométricas de integrales desde esa perspectiva. Su presentación coordinada dentro de los contenidos de un curso habitual de variable compleja podría dificultarse, en parte, por su ausencia en algunos textos comerciales de uso común (p.ej. [?] y [?]).
- Demostraciones no apropiadas y fuente de errores. Debido a características propias de construcción y operación de algunas demostraciones, junto con las limitaciones de procesamiento aritméticos del *GeoGebra*, éstas tienen rangos de operación restringidas en las que son confiables o aceptables. Bajo ciertas condiciones de operación pueden generar representaciones no apropiadas y valores numéricos erróneos que inducen confusiones conclusiones falsas.

- Representaciones deficientes. En algunas demostraciones, de las representaciones geométricas generadas no se pueden visualizar resultados o propiedades de las integrales. De ellas no se puede establecer conjeturas deseadas de manera directa. En estos casos, el usuario debe recurrir a sus representaciones numéricas y otras acciones para inferir los resultados y propiedades deseadas.
- Posible rechazo a las demostraciones. Debido a que, según Eisenberg y Dreyfus, (1991), las demandas cognitivas en visualización son superiores a las requeridas en tratamientos algorítmicos ([?]), y al enfoque habitual centrado en el uso de representaciones simbólicas (analíticas) en la enseñanza de variable compleja, se tiene el riesgo de rechazo por algunos estudiantes. De estas dificultades, es posible que algunos usuarios no logren visualizar lo deseado con cierto éxito como se espera, o que de ellas concluyan en resultados deficientes o incorrectos.
- Actividades tediosas y confusas. Exploraciones caso por caso, el número de parámetros a considerar, condiciones y acciones a realizar, podrían resultar en actividades tediosas y/o crear confusiones en cuanto a la organización de resultados visualizados y relaciones entre ellos.

En relación a su puesta a prueba inicial en cursos de variable compleja elemental de ingeniería, solamente disponemos de observaciones empíricas. Hemos observado, reacciones positivas, sentimientos de motivación, sorpresa, interés y convencimiento estudiantil, tanto durante actividades de demostración pasiva como en actividades de exploración activa. En cuanto a formación o evolución de conocimientos, hemos notado que algunos estudiantes, hacen observaciones o interpretaciones erróneas, presentan dificultades con relacionar correctamente información visual, y dificultades con el traslado correcto de información entre representaciones visual y analítica; obviamente para estos estudiantes, las demostraciones les genera confusión u obstáculos en su aprendizaje. Sin embargo, para otros estudiantes, el grado de interacción dinámica que ofrecen las demostraciones propuestas, constituyen apoyo adicional en la construcción significativa de algunos conceptos involucrados en la teoría de integración compleja.

Animamos, a los interesados, elaborar de demostraciones similares a las descritas en *GeoGebra* o algún software con ambiente dinámico e interactivo. Recomendamos, explorarlas, determinar sus potencialidades, limitaciones o conflictos didácticos que puedan generar. Sugerimos su uso reflexivo en actividades de establecimientos de conjeturas o como herramientas visuales alternativos de apoyo o fortalecimiento de conceptos y relaciones de integración compleja discutidas en su representación simbólica analítica. También recomendamos comparar sus ventajas y deficiencias con respecto a otras demostraciones en *GeoGebra* que usan otras representaciones, como por ejemplo las desarrolladas en [?].

Finalmente, es posible realizar mejoras en algunas demostraciones propuestas, rechazar las deficientes, o elaborar otras, a fin de crear en un conjunto efectivo, el cual pueda usarse como herramienta de ayuda exitosa en algunas secuencias didácticas. Aún, confiando en lo que afirman [?], [?] y [?] en relación a sus aspectos beneficios del uso de demostraciones visuales en la enseñanza de la matemática en general[?], falta, a la luz de teorías recientes en aprendizaje visual y dinámico, realizar investigaciones específicas y detalladas, sobre su influencia y efectividad en la construcción del conocimiento estudiantil sobre integración compleja a nivel introductorio.

Apéndice A

Comandos de Demostración 7.1

Comandos para generar demostraciones visuales de $\oint_C dz/(z-B)^n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
 C : circunferencia de radio r con centro en A y B complejos.

Características dinámicas interactivas

Punto complejo A deslizable en el plano complejo. Centro de la circunferencia

Punto complejo B deslizable en el plano complejo, parámetro de $f(z)$. Si es necesario se pueden introducir otros deslizadores para otros puntos singulares.

Deslizador r (radio de la circunferencia) $r > 0$.

Deslizador n , entero incrementos de 1 ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) Para el exponente de expresiones. Si es necesario se pueden introducir otros deslizadores para otros exponentes.

Deslizador p , entero positivo incremento en 1. Para generar el número de puntos equidistantes sobre la circunferencia, aquí se tomado intervalo con Mínimo 4, Máximo 50 (por ejemplo)

Deslizador q , entero positivo incremento en 1. Para generar el número de puntos equidistantes sobre la circunferencia, aquí se tomado intervalo con Mínimo 0, Máximo p

Nota: Los productos aparecen indicados con un espacio entre los factores.

Crear objetos de arrastre o deslizables

Puntos complejos: A y B (con estos nombres). (visibles)

Deslizadores: r , mínimo = 0, máximo = 5,

Deslizador: n , mínimo -5, máximo = 5, incremento 1,

Deslizador: p , mínimo = 8, máximo = 50, incremento 1,

Deslizador: q , mínimo = 0, máximo = p ,

Circunferencia: Centro en A radio r (visible).

Crear listas y objetos

Lista de puntos complejos sobre la circunferencia (invisible).

~ > L1 = Secuencia($A + r e^{i 2 \pi k / p}$, k, 0, p)

Lista de puntos complejos de las imágenes de los puntos sobre la circunferencia de $\overline{f(z)}$, aquí se ingresa el conjugado de la función $f(z)$ (invisible).

~ > L2 = Secuencia($\text{conjugado}(1 / (\text{Elemento}(L1, k) - B)^n) + \text{Elemento}(L1, k)$, k, 1, q + 1)

Lista de puntos complejos en la punta del vector tangente unitario a la circunferencia (invisible).

~ > L3 = Secuencia($\text{Elemento}(L1, k) + e^{i \pi / 2} (\text{Elemento}(L1, k) - A) / \text{abs}(\text{Elemento}(L1, k) - A)$, k, 1, q + 1)

Lista de componentes de vectores de, $\overline{f(z_k)}$ sobre la normal.

~ > L4 = Secuencia($\text{abs}(\text{Elemento}(L2, k) - \text{Elemento}(L1, k)) \text{sen}(\arg(\text{Elemento}(L3, k) - \text{Elemento}(L1, k)) - \arg(\text{Elemento}(L2, k) - \text{Elemento}(L1, k)))$, k, 1, q + 1)

Lista de componentes de vectores de, $\overline{f(z_k)}$ sobre la tangente.

~ > L5 = Secuencia($\text{abs}(\text{Elemento}(L2, k) - \text{Elemento}(L1, k)) \text{cos}(\arg(\text{Elemento}(L3, k) - \text{Elemento}(L1, k)) - \arg(\text{Elemento}(L2, k) - \text{Elemento}(L1, k)))$, k, 1, q + 1)

Lista de puntos de partición del perímetro de la circunferencia.

~ > L6 = Secuencia($2 \pi \text{abs}(\text{Elemento}(L1, 1) - A) k / p$, k, 0, q + 1)

Abrir **Vista grafica 2**.

Lista de puntos sobre la gráfica de la curva de flujo de la parte imaginaria, (vista 2, invisible).

~ > L7 = Secuencia($(\text{Elemento}(L6, k), \text{Elemento}(L4, k))$, k, 1, q + 1)

Lista de segmentos para graficar la curva de flujo de la parte imaginaria (vista 2, visible)

~ > L8 = Secuencia($\text{Segmento}(\text{Elemento}(L7, k), \text{Elemento}(L7, k + 1))$, k, 1, q)

Lista de puntos sobre la gráfica de la curva de flujo de la parte real, (vista 2, invisible).

~ > L9 = Secuencia($(\text{Elemento}(L6, k), \text{Elemento}(L5, k) + 4)$, k, 1, q + 1)

Lista de segmentos para graficar la curva de flujo de la parte real (vista 2, visible).

```

~ >L10 = Secuencia(Segmento(Elemento(L9, k + 1), Elemento(L9, k)), k, 1, q)

# Lista de m incrementos sobre la circunferencia,  $\Delta l \approx \Delta s$ 
~ >L11 = Secuencia(2 pi abs(Elemento(L1, 1) - A) / p + 0 k, k, 1, q + 1)

# Lista de cálculo de área de rectángulo,  $\Delta l$  por componente sobre normal.
~ >L12 = Secuencia((Elemento(L5, k + 1) + Elemento(L5, k)) pi abs(Elemento(L1,
1) - A) / p, k, 1, q)

# Lista de cálculo de área de rectángulo,  $\Delta l$  por componente sobre la tangente.
~ >L13 = Secuencia((Elemento(L4, k + 1) + Elemento(L4, k)) pi abs(Elemento(L1,
1) - A) / p, k, 1, q)

# Lista de vectores del campo de Pólya sobre la circunferencia, (color negro,
vista 1, invisible).
~ >L14 = Secuencia(Vector(Elemento(L1, k), Elemento(L2, k)), k, 1, q)

# Lista de vectores tangentes unitarios a la curva (vista 1, invisible).
~ >L15 = Secuencia(Vector(Elemento(L1, k), Elemento(L3, k)), k, 1, q)

# Lista de puntos de componentes de Pólya sobre el vector tangente unitario,
(vista 1, invisible).
~ >L16 = Secuencia(Elemento(L1, k) + Elemento(L5, k) Elemento(L15, k), k, 1,
q]

# Lista de vectores tangentes de Pólya, (color rojo, vista 1, visible).
~ >L17 = Secuencia(Vector(Elemento(L1, k), Elemento(L16, k)), k, 1, q)

# Lista de puntos en la punta del vector normal a la circunferencia, (vista 1,
invisible).
~ >L18 = Secuencia(Elemento(L1, k) + (Elemento(L3, k) - Elemento(L1, k))
e^(-í pi / 2), k, 1, q)

# Lista de vectores normales unitarios a la circunferencia, (vista 1, invisible).
~ >L19 = Secuencia(Vector(Elemento(L1, k), Elemento(L18, k)), k, 1, q)

# Lista de puntos de componentes de Pólya sobre el vector normal unitario,
(vista 1, invisible).
~ >L20 = Secuencia(Elemento(L1, k) + Elemento(L4, k) Elemento(L19, k), k, 1,
q)

```

```
# Lista de vectores normales de Pólya, (color azul, vista 1, visible).
~ >L21 = Secuencia(Vector(Elemento(L1, k), Elemento(L20, k)), k, 1, q)

# Segmentos de componentes tangentes, (en vista 2, visible).
~ >L22 = Secuencia(Segmento((Elemento(L6, k), 4), Elemento(L9, k)), k, 1, q
+ 1)

# Segmentos de componentes normales, (en vista 2, visible).
~ >L23 = Secuencia(Segmento((Elemento(L6, k), 0), Elemento(L7, k)), k, 1, q
+ 1)

# recta, (vista 2, visible).
~ >y = 4

# Área neta bajo la curva de componentes tangenciales.
~ >Re = Suma(L12)

# Área neta bajo la curva de componentes normales.
~ >Im = Suma(L13)
```

Bibliografía

- [1] Amado, N. y Carreira, S. "Proceedings of the 12th International Conference on Technology in Mathematics Teaching ICTMT 12", Hdl.handle.net, 2017. [En línea]. Available: <http://hdl.handle.net/10400.1/6081> [Accedido: 18- Mayo- 2017].
- [2] Blinder, S."Wolfram Demonstrations Project", Wolfram Demonstrations Project, 2017. [En línea]. Disponible: <http://demonstrations.wolfram.com/ContourIntegralAroundASimplePole/> [Accessed: 18- May- 2017].
- [3] Braden, B. "Polya's Geometric Picture of Complex Contour Integrals". Mathematical Association of America, Maa.org, 1987. [En línea]. Disponible: <http://www.maa.org/programs/maa-awards/writing-awards/polya-as-geometric-picture-of-complex-contour-integrals>. [Accedido: 18- May- 2017].
- [4] Burm, J y Peterson, A. " Interpretation of the complex contour integral". Resources for teaching complex analysis. 1998. [Online]. Disponible: <http://faculty.gvsu.edu/fishbacp/complex/polya2.PDF> [Accedido: 18- May- 2017].
- [5] Cabri II Plus 1.4. Grenoble, Francia: CABRILOG SAS, 2009. <http://www.cabri.com>. [Accedido: 18-May-2017]
- [6] Custy, J. "Wolfram Demonstrations Project", Wolfram.com, 2017. [En línea]. Disponible: <http://demonstrations.wolfram.com/TheGeometryOfIntegratingAPowerAroundTheOrigin/>. [Accedido: 19- May- 2017].
- [7] Geogebra. International GeoGebra Institute, 2017. <https://www.geogebra.org/> [Accedido: 19-Mayo-217]
- [8] "GeogebraTube", GeogebraTube.org, 2017. <http://www.geogebraTube.org>. [Accedido: 19- May- 2017].

- [9] Karadag, Z., Martinovic, D. and Birni, S. "The net generation and the affordances of dynamic and interactive mathematics learning environments: working with fractions", in Proceedings of the 12th International Conference on Technology in Mathematics Teaching., University of Algarve Faculty of Sciences and Technology, 2015. Faro Portugal. pp. 103-105 [En línea] Disponible: <http://hdl.handle.net/10400.1/6081> [Accedido: 23-mayo-2017]
- [10] Kawski, M. "Dynamic visualization in advanced undergraduate courses". Department of mathematics and statistic, Arizona State University, 2017. [En línea] <https://math.la.asu.edu/~kawski/kawski.html> [Accedido: 23 de mayo de 2017]
- [11] Krug, D. and Wilkinson, S. "Wolfram Demonstrations Projects", Wolfram.com, 2017. [En línea]. <http://demonstrations.wolfram.com/PolyaVectorFieldAndComplexIntegrationAlongClosedCurves/> [Accedido: 19- May- 2017].
- [12] Mathematica. Wolfram Mathematica, <https://www.wolfram.com/mathematica/> [Accedido: 20-Mayo-2017]
- [13] Miki, S. Dynamic Visualization of Complex Integrals with Cabri II Plus. "Dynamic Visualization of Complex Integrals with Cabri II Plus ", 2004, [En línea] <http://epatcm.any2any.us/10thAnniversaryCD/EP/2004/2004C195/fullpaper.pdf> [Accedido 21-Mayo-2017]
- [14] Needham, T. Visual complex analysis, 1st ed. Oxford: Clarendon Press, 2012, pp. 472-504.
- [15] Nehari, Z. Conformal Mapping, New York, Dover Publications, 1952, pp. 81-84.
- [16] Pólya, G, Latta, G. Complex variables, John Wiley y Sons. Inc., 1974, pp. 143-146. [En línea]. Disponible: <https://es.scribd.com/doc/135345562/36537555-Complex-Variables-George-Polya-Gordon-Latta> [Accedido: 23 de mayo de 2017]
- [17] Saquimux, J. "Demostraciones visuales de integrales complejas", 2013. [En línea]. Disponible: <http://www.centroedumatematica.com/memorias-icemacyc/55-399-2-DR-C.pdf> [Accedido: 21- May- 2017].
- [18] Tall, D., Smith, D. y Piez, C. "Technology and Calculus ", 2008, [En línea]. Disponible: <http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/downloads.html> [Accedido: 21-Mayo-2017]

- [19] Tamošiūnas, R. "Visualizing complex integration with GeoGebra". 2013. Vilnius University. Lithuania. [En línea]. Disponible: <https://ggijro.wordpress.com/issues/vol-2-no-2/> [Accedido: 23 de mayo de 2017]
- [20] Tamošiūnas, R. "Using GeoGebra for visualizing complex variable" 2013. [En línea]. Disponible: <https://sites.google.com/site/visualcomplexanalysis> [Accedido: 17 de mayo de 2017]
- [21] Ward, J y Churchill, R. "Variable compleja y aplicaciones", 7ma. ed. Madrid: Mc Graw-Hill/Interamericana de España, S. A. U., 2004, pp. 111-113.
- [22] Wolfram Demonstrations. 2017. [En línea] Disponible: <http://demonstrations.wolfram.com> [Accedido: 07 de mayo de 2017]
- [23] Zill, D. Shanahan, P. "Introducción al análisis complejo con aplicaciones". 2da. Ed. México. Cengage Learning. 2011, pág. 235.