

6

Proporcionalitat



Abans de començar



INVESTIGA

En època de rebaixes, ben segur que has vist en els aparadors cartells com el de la fotografia. Si les sabates que t'agraden valien 55 € i ens fan un descompte del 20%, quant estalviaràs? Quant pagaràs realment?



Per elaborar aquest pastís és necessari mantenir les proporcions entre els seus ingredients.



Els plànols han de dibuixar-se mantenint les proporcions amb la realitat.

1. Raó i Proporció

RAÓ ENTRE DOS NOMBRES

Estem acostumats a donar informació sobre situacions de la vida quotidiana utilitzant nombres. Hi ha vegades on un únic nombre no és suficient i hem de comparar-lo amb una altra quantitat per a poder comprendre millor la situació. Quan comparem dues quantitats formen una raó.

Raó és el quocient entre dos nombres a i b.
S'escriu a/b i es llegeix "a és a b".

Una raó no té unitats i serveix per comparar: indica el nombre de vegades que una quantitat és més gran que una altra.

Observa que una raó no és una fracció, en una raó els nombres poden ser decimals i en una fracció són enters.

El pot de pintura gran pesa 4,5 kg i el xicotet 1,5 kg.

Quina és la raó entre el pes del pot gran i el pes del pot xicotet?. Què indica?



$$\frac{\text{Pes pot gran}}{\text{Pes pot xicotet}} = \frac{4,5}{1,5} = 3$$

La **raó** és **3** i ens **indica** que el pot gran pesa 3 vegades més que el xicotet.

PROPORCIÓ

Una proporció és una igualtat entre dues raons:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{"a és a b com c és a d"}$$

- a i d s'anomenen extrems
- b i c s'anomenen mitjos

Les proporcions complixen la següent relació fonamental:

En una proporció el producte de mitjos és igual al producte d'extrems.

$$a \cdot d = c \cdot b$$

CÀLCUL DE LA QUARTA PROPORCIONAL

Donat que el producte de mitjos és igual al d'extrems, podem calcular qualsevol terme d'una proporció coneixent els altres tres.

- S'anomena quarta proporcional al terme que desconexem en una proporció. El representarem amb la lletra x. Observa a la dreta com es calcula.

Troba la quarta proporcional

$$\frac{x}{24} = \frac{6}{4} \Rightarrow x = \frac{6 \cdot 24}{4} = 36$$

$$\frac{7}{2} = \frac{x}{16} \Rightarrow x = \frac{7 \cdot 16}{2} = 56$$

$$\frac{16}{x} = \frac{8}{7} \Rightarrow x = \frac{16 \cdot 7}{8} = 14$$

PROPORCIONALITAT

Exercicis resolts

1. Un rectangle mesura 50 cm d'amplada i 20 cm de alçada. Troba la raó entre la seua amplada i la seua alçada.

Què ens indica la raó?

Solució: Calculem el quocient amplada del rectangle/alçada = $50/20=2,5$

La raó és 2,5 i indica que l'amplada és 2,5 vegades l'alçada.

2. Una bossa gran de magdalenes costa 5,2 € i una bossa xicoteta costa 1,3 €. Trobar la raó entre el preu de la bossa gran i el de la xicoteta.

Explica què indica la raó.

Solució: Calculem el quocient preu bossa gran/preu bossa xicoteta = $5,2/1,3= 4$.

La raó és 4 i indica que el la bossa gran costa 4 vegades més que la bossa xicoteta.

3. Una xiqueta té 15 anys i el seu pare 45. Trobar la raó entre l'edat de la filla i l'edat del pare. Explica què significa la raó.

Solució: Calculem el quocient edat filla/edat pare = $15/45 = 1/3$

La raó és $1/3$ i indica que l'edat de la filla és la tercera part de l'edat del pare.

4. Formen proporció les següents raons?

a) $\frac{12}{60}$ i $\frac{2}{3}$ b) $\frac{3}{2}$ i $\frac{6}{4}$ c) $\frac{5}{4}$ i $\frac{25}{20}$

Solució: a) $12 \cdot 3 \neq 60 \cdot 2 \Rightarrow$ No formen proporció

b) $3 \cdot 4 = 2 \cdot 6 \Rightarrow$ Si que formen proporció

c) $5 \cdot 20 = 4 \cdot 25 \Rightarrow$ Si que formen proporció

5. Trobar la quarta proporcional de les següents proporcions:

a) $\frac{x}{4} = \frac{8}{2}$ b) $\frac{32}{x} = \frac{8}{5}$ c) $\frac{9}{7} = \frac{x}{7}$ d) $\frac{5}{12} = \frac{10}{x}$

Solució: a) $x = \frac{4 \cdot 8}{2} = \frac{32}{2} = 16$ b) $x = \frac{32 \cdot 5}{8} = \frac{160}{8} = 20$

c) $x = \frac{7 \cdot 9}{7} = \frac{63}{7} = 9$ d) $x = \frac{10 \cdot 12}{5} = \frac{120}{5} = 24$



2. Proporcionalitat directa

MAGNITUDS DIRECTAMENT PROPORCIONALS

Magnitud és una propietat que es pot mesurar i expressar amb nombres.

Exemple de **magnituds** són:

- nombre de llibretes
- Kg de fruita que comprem
- preu a pagar

En ocasions les magnituds estan relacionades.

Dues magnituds són directament proporcionals si, al multiplicar una d'elles per un nombre, l'altra queda multiplicada pel mateix nombre.



Les dues magnituds (nre. pilotes i preu) són directament proporcionals perquè a doble, triple,.. quantitat de la primera li correspon doble, triple,... quantitat de la segona.



Edat i alçada no són directament proporcionals. A doble, triple... edat no li correspon doble, triple, alçada.

CONSTANT DE PROPORCIONALITAT DIRECTA

Les quantitats de dues magnituds que es corresponen amb una taula com aquesta:

Magnitud 1a (x)	a	b	c	...
Magnitud 2a (y)	a'	b'	c'	...

són **directament proporcionals** si es verifica que $a'/a = b'/b = c'/c = \dots = k$, essent **k** la **raó de proporcionalitat**.

La constant de proporcionalitat directa, k, es calcula dividint una quantitat qualsevol de la 2a magnitud entre la corresponent de la 1a.

Exercici resolt

6. Raona si els següents parells de magnituds són o no directament proporcionals

- El nombre d'obrers i el temps que tarden en acabar una obra.
- El nombre d'entrades al cine i el preu que hem de pagar.
- El pes d'una persona i la seua alçada.
- Les distàncies en un mapa i les distàncies reals.

Solució: a) No. Si en l'obra treballen el doble d'obrers no tardaran el doble de temps en acabar-la, al contrari tardaran menys en fer-ho.

b) Sí. Si comprem el doble, triple.. d'entrades haurem de pagar el doble, triple ... de diners.

c) No. Quan una persona dobla la seua alçada no dobla automàticament el seu pes.

d) Sí. Doble, triple... distància en la vida real li correspon doble, triple... distància en el mapa.

PROPORCIONALITAT

7. Donada la següent taula de valors directament proporcionals, completa-la i calcula la constant de proporcionalitat.

x	4		6		9
y		40		64	72

Solució: La constant de proporcionalitat és $72/9=8$

Per tant $\frac{64}{x} = \frac{72}{9} \Rightarrow x = \frac{64 \cdot 9}{72} = \frac{579}{72} = 8$ i així amb totes les raons

x	4	5	6	8	9
y	32	40	48	64	72

MÈTODE DE REDUCCIÓ A LA UNITAT

En molts problemes de la vida real intervenen dues magnituds directament proporcionals. Coneixent tres quantitats ens demanen calcular una quarta dada.

Per a resoldre'ls disposem de dos mètodes, el primer és el mètode de reducció a la unitat, que consta dels passos següents:

- Comprovar que les dues magnituds són directament proporcionals.
- Calculem el valor corresponent a una unitat de la 1a magnitud mitjançant una divisió.
- Multiplicant adequadament es calcula el valor desitjat.

Exercicis resoltos

8. Si 5 llapis costen 2 €. Quant costaran 8 llapis?

Solució:

1^a) Són directament proporcionals. Doble, triple, ... nre. de llapis costaran doble, triple, ...

2^a) Calculem quant costarà un llapis: $2/5=0,40$ €

3^a) Calculem quant costaran 8 llapis: $0,40 \cdot 8 = 3,20$ €



9. Si per 3 hores de treball un obrer cobra 12 €. Quant cobrarà per 7 h?

Solució:

1^a) Són directament proporcionals. Doble, triple, ... nre. de hores cobrarà doble, triple, ...

2^a) Calculem quant cobrarà per una hora: $12/3=4$ €

3^a) Calculem quant cobrarà per 7 hores: $4 \cdot 7 = 28$ €

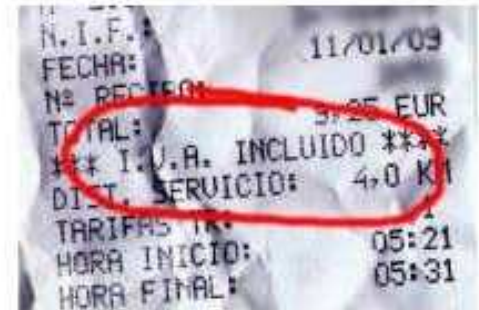


Per saber-ne més

L'IVA

L'IVA és l'impost sobre el valor afegit, i és una taxa que paguem a l'estat per la compra de tots els productes. S'afegeix al valor dels productes i varia d'uns a altres.

T'has fixat que hi ha diferents tipus d'IVA? Saps quin percentatge d'IVA s'aplica a cada producte?



IVA SÚPER REDUÏT (4%)

S'aplica a béns i serveis de primera necessitat: pa, verdures, fruites, llet, formatges, ous, hortalisses, ... que no hagin estat modificats de cap forma. Llibres, periòdics i revistes no publicitàries; medicaments; cadires de rodes per minusvàlids i pròtesis; Habitatges de Protecció Oficial.

IVA REDUÏT (10%)

S'aplica a entrades a museus, galeries d'art, ... aigua; perruqueries; dentistes; serveis d'hostaleria; transport de viatgers; edificis, habitatges i places de garatge; complements per al diagnòstic o alleujament malalties i aliments no inclosos en l'IVA súper reduït ...

IVA NORMAL (21%)

S'aplica a electrodomèstics, roba, calçat, bricolatge, tabac, begudes alcohòliques, etc.

Autoavaluació ✓

1. En un institut hi ha 42 xiquets i 21 xiquetes. Troba la raó entre el nombre de xiquets i el nombre de xiquetes. Què indica la raó?
2. L'edat d'una persona i el seu pes, són magnituds directament proporcionals?
3. Formen proporció les següents raons? $8/3$ i $64/24$
4. Calcula la quarta proporcional de la següent proporció: $2/9 = 16/x$
5. Si 7 DVDs valen 14 euros, quant valdran 2 DVDs? L'has de resoldre utilitzant el mètode de reducció a la unitat.

6. Si 3 DVDs valen 24 euros, quant valdran 5 DVDs? Utilitzant una regla de tres.
7. El 35% dels arbres d'un parc es van plantar en abril. Si en total hi ha 600 arbres, quants es van plantar en abril?
8. Un videojoc valia 8 euros i he pagat 6 euros. Quin percentatge m'han rebaixat?
9. Una agència de viatges ha venut 560 places d'un avió, la qual cosa suposa un 28% del total. De quantes places disposa l'avió?
10. Un sofà que valia 5500 euros s'ha rebaixat un 12%. Quant pagarem ara?

Recorda

1. Raó i Proporció

Raó: quocient entre dos nombres.

Proporció: igualtat entre dos raons

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Es llegeix: "a és a b com c és a d"

a i d s'anomenen **extrems**

b i c s'anomenen **mitjos**

Propietat fonamental de les proporcions:

El producte de mitjos és igual al producte

d'extrems: $a \cdot d = b \cdot c$

3. Percentatges

Percentatge o **tant per cent** es la quantitat que hi ha en cada 100 unitats.

S'expressa mitjançant el símbol %.

Un percentatge és equivalent a una **raó de denominador 100** i també al **nombre decimal** corresponent.

Per resoldre problemes utilitzarem les proporcions, recorda que:

1. La quantitat desconeguda s'anomena **x**.
2. El **100%** correspon sempre al **total**.

2. Proporcionalitat directa.

Dues magnituds són **directament proporcionals** si al el doble, triple de la primera li correspon doble, triple de la segona...

La constant de proporcionalitat directa, **k**, és el quocient entre una quantitat qualsevol de la 2a magnitud i la corresponent de la 1a.

Reducció a la unitat

- 1) Veure que les dues magnituds són directament proporcionals.
- 2) Dividint trobar el valor d'una de les dues magnituds que correspon a una unitat de l'altra.
- 3) Multiplicant es troba el valor demanat.

Regla de tres simple directa

- 1) Veure que les dues magnituds són directament proporcionals.

- 2) S'escriu

Magnitud 1		Magnitud 2
a	-----	b
c	-----	x

- 3) Es calcula $x = \frac{c \cdot b}{a}$

4. Proporcionalitat inversa

Dues magnituds són **inversament proporcionals** si al multiplica o divideix una d'elles per un nombre, l'altra queda dividida o multiplicada pel mateix nombre.

Si a un valor m_1 de la primera magnitud li correspon un valor m_2 de la segona magnitud, es pot comprovar que el producte d'aquests dos valors és sempre constant. A aquest producte se l'anomena **constant de proporcionalitat inversa**.

$$\text{Constant de proporcionalitat} = m_1 \cdot m_2$$