**Egy japán elemi geometria feladat:**

**A feladat:**

Legyen adott az *ABCD* húrnégyszög. Mit állíthatunk az *ABC, ABD, BCD, BCA* háromszögek beírt köreinek a középpontjairól?

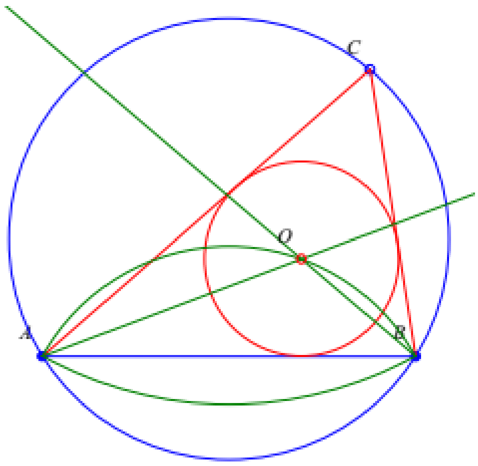
Sejtés: A háromszögek beírt köreinek a középpontjai egy téglalap csúcsai.

Rész-feladatok:

1. Legyen adott a *k* körön az *A* és *B* pont. Fusson végig a *C* pont az *AB* köríven. Milyen mértani helyet ír le ez alatt az *ABC* háromszög beírt körének a középpontja?
2. Adott az *ABCD* húrnégyszög. A köréírt kör íveinek a felezőpontjai legyenek rendre $F_1$, $F_2$, $F_3$, $F_4$. Az *ACD* és *ABD* háromszögek beírt köreinek középpontjai rendre $K_1$ és $K_3$ Igazoljuk, hogy $F_1F_3$ és $K_1K_3$ párhuzamosak!
3. Adott az *ABCD* húrnégyszög. A köréírt kör íveinek a felezőpontjai legyenek rendre $F_1$, $F_2$, $F_3$, $F_4$. Igazoljuk, hogy $F_1F_3 \perp F_2F_4$

A rész-feladatok megoldásai, és következményük:

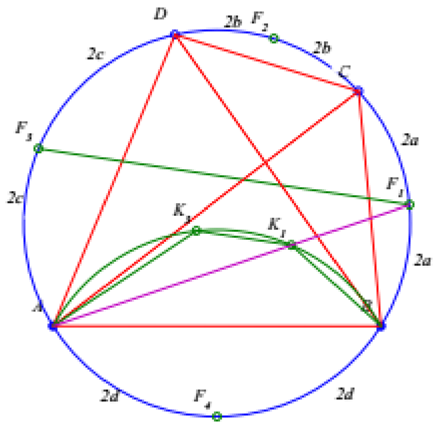
1. Legyen adott a *k* körön az *A* és *B* pont! Fusson végig a *C* pont az *AB* köríven. Milyen mértani helyet ír le ez alatt az *ABC* háromszög beírt körének az *O* középpontja?




Legyenek a háromszög szögei rendre $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.

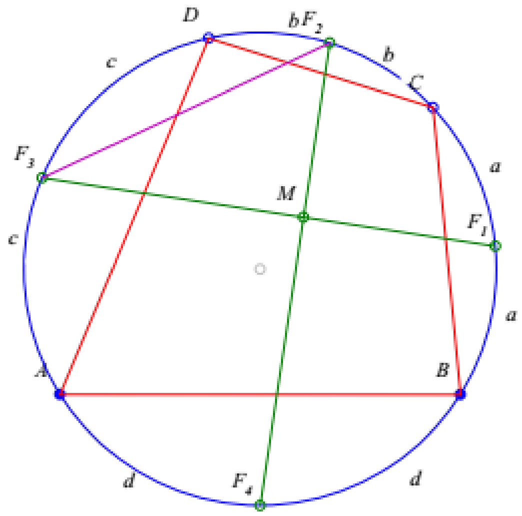
$AOB\sphericalangle = 180° - \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 180° - \left(90° - \frac{\gamma}{2}\right) = 90° + \frac{\gamma}{2}$, vagyis állandó, így a keresett mértani hely az *A* és *B* pontokhoz, valamint a $90° + \frac{\gamma}{2}$ ill. $\gamma > 90°$ esetben $180° - \frac{\gamma}{2}$ szögekhez tartozó látókörív. (Megjegyezzük, hogy e körívek középpontjai a *k* körre illeszkednek.)

2. Adott az *ABCD* húrnégyszög. A köréírt kör íveinek a felezőpontjai legyenek rendre $F_1$, $F_2$, $F_3$, $F_4$! Az *ACD* és *ABD* háromszögek beírt köreinek középpontjai rendre $K_1$ és $K_3$ Igazoljuk, hogy $F_1F_3$ és $K_1K_3$ párhuzamosak!




A *k* kört az *A, B, C, D* húrnégyszög csúcsai és az $F_1$, $F_2$, $F_3$,$F_4$. felezőpontok nyolc részre osztják. Legyen e körívek hossza rendre $BF_1 = F_1C = 2a$, $CF_2 = F_2D = 2b$, $DF_3 = F_3A = 2c$ és $AF_4 = F_4B = 2d$. Így az e körívekhez tartozó bármely kerületi szög rendre *a, b, c, d* nagyságú. Az előző feladat eredményére hivatkozva mondhatjuk, hogy az $ABK_1K_3$ négyszög is húrnégyszög, így mivel $ABK_1\sphericalangle = \frac{ABC\sphericalangle}{2} = \frac{2b+2c}{2} = b + c$, az $ABK_1K_3$ húrnégyszögben a vele szemközti szög $K_1K_3A\sphericalangle = 180° - (b + c)$. Ugyanígy $K_3AB\sphericalangle = \frac{DAB\sphericalangle}{2} = a + b$, így $K_3AK_1\sphericalangle = a + b - a = b$. Ezért az $AK_1K_3\Delta$ harmadik szöge $AK_1K_3\sphericalangle = 180° - \big(180° - (b + c)\big) - b = c$. De ugyancsak $F_3F_1A\sphericalangle = c$, és mivel e két egyenlő szög egyik-egyik szára egyirányú félegyenes, ezért a másik száraik is egyirányúak, azaz $F_1F_3 \parallel K_1K_3$.

3. Adott az *ABCD* húrnégyszög. A köréírt kör íveinek a felezőpontjai legyenek rendre $F_1$, $F_2$, $F_3$, $F_4$. Igazoljuk, hogy $F_1F_3 \perp F_2F_4$!




Használjuk az előző feladat jelöléseit! Vegyük szemügyre például az $F_1F_3M\,\Delta$ szögeit: $F_2F_3F_1\sphericalangle = a + b$ és $F_3F_2F_4\sphericalangle = c + d$. Mivel a teljes körhöz $4a+4b+4c+4d = 360°$-nyi középponti szög tartozik, ezért $F_2F_3F_1\sphericalangle + F_3F_2F_4\sphericalangle = a + b + c + d = 90°$, vagyis az $F_2F_3M\Delta$ derékszögű háromszög, és ezt akartuk igazolni.

A 2. és 3. feladat eredményét összegezve $K_1K_3 \parallel F_1F_3$, ugyanígy $K_1K_2 \parallel F_1F_4$, másrészt $F_1F_3 \perp F_2F_4$, vagyis a $K_1K_2K_4K_3$ négyszög valóban téglalap.