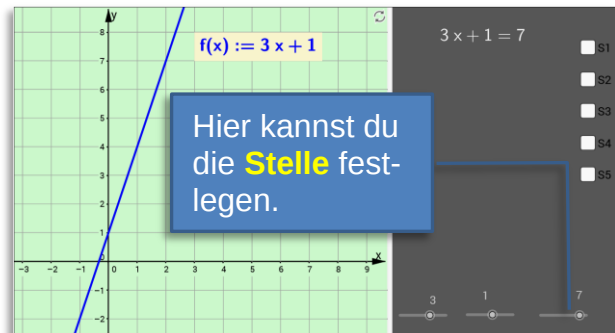


Aufgabenserie

(Begriff: Nullstelle linearer Funktionen)

Wir erfinden neue mathematische Begriffe. Zum Beispiel die „**7-Stelle**“ der Funktion f mit $f(x) = 3x + 1$.



Ergebnis: Die „**7-Stelle**“ der Funktion f ist die Zahl 2.

Aufgabe 1

Beschreibe, wie man die „**7-Stelle**“ der Funktion f *rechnerisch* bestimmen kann.

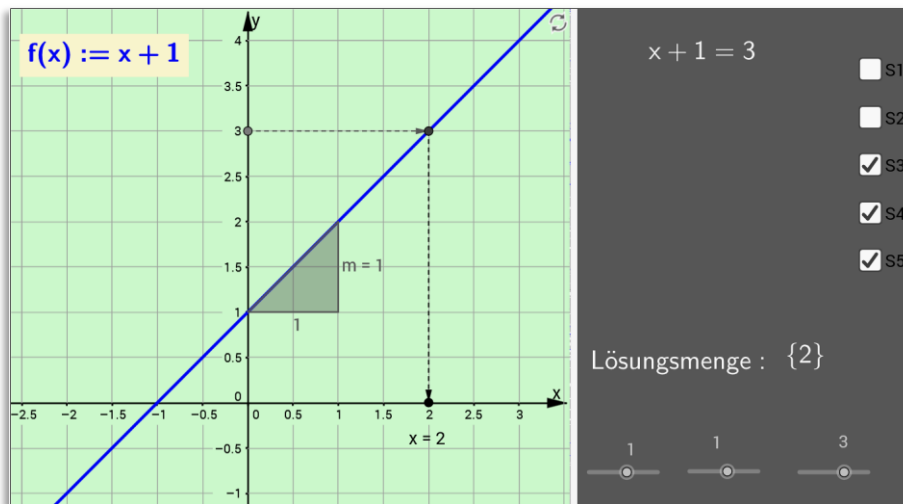
Aufgabe 2

Beschreibe, wie man die „**7-Stelle**“ der Funktion f *zeichnerisch* bestimmen kann.

Weitere Beispiele illustrieren neue mathematische Begriffe

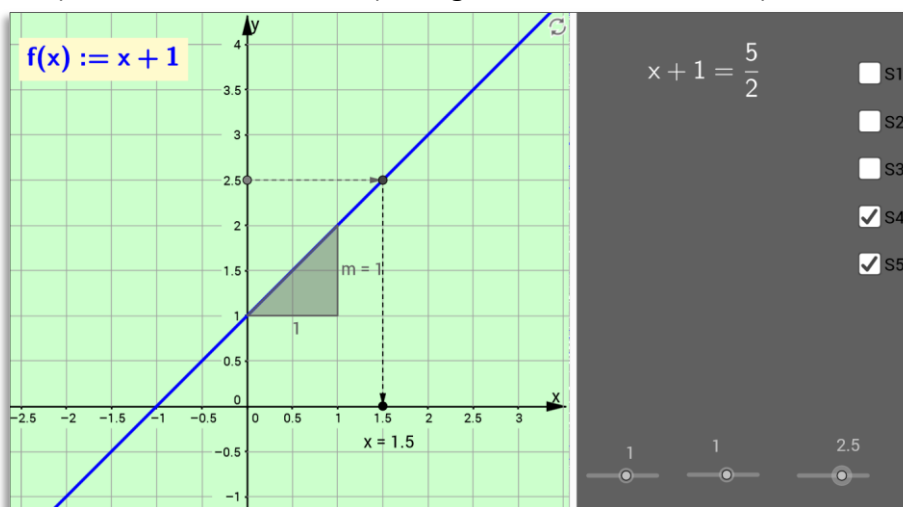
Gegeben: Lineare Funktion f mit $f(x) = x + 1$.

a) Gesucht: „3-Stelle“ der Funktion f .



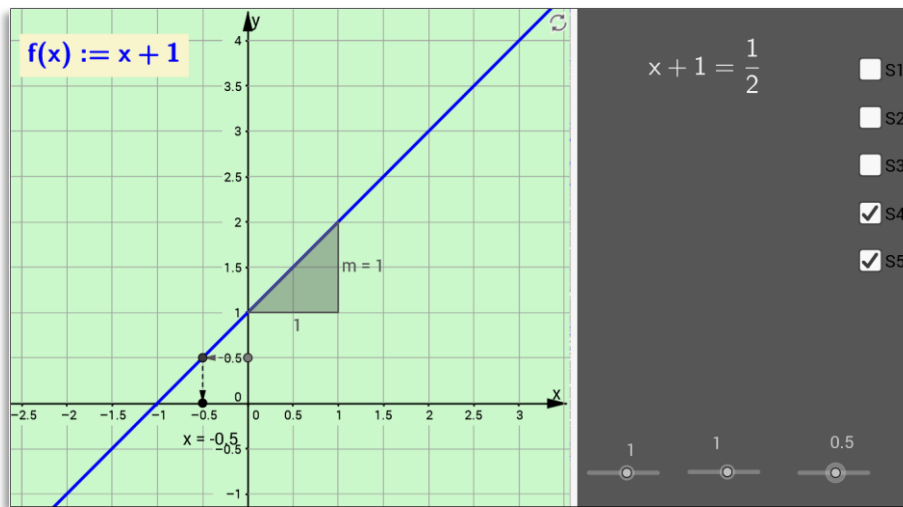
Ergebnis: Die „3-Stelle“ der Funktion f ist die Zahl 2.

b) Gesucht: „5/2-Stelle“ (auch genannt die „2.5-Stelle“) der Funktion f .



Ergebnis: Die „5/2-Stelle“ der Funktion f ist die Zahl 1.5.

c) Gesucht: „ $1/2$ -Stelle“ (auch genannt die „ 0.5 -Stelle“) der Funktion f .



Ergebnis: Die „ $1/2$ -Stelle“ der Funktion f ist die Zahl -0.5 .

Aufgabe 3

Gegeben: f mit $f(x) = x + 1$

- Verallgemeinere. Setze mit eigenen Beispielen die Begriffsbildung von oben fort. Verwende dabei durchgängig dieselbe Funktion f .
- Illustriere rechnerisch und zeichnerisch den Begriff „ **0 -Stelle von f** “. Gibt es noch andere „ **0 -Stellen von f** “? Begründe.

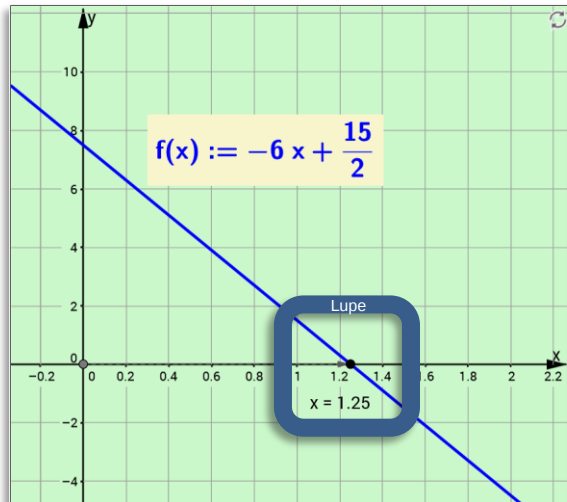
Aufgabe 4

Denke dir neue lineare Funktionen aus, die sich alle mit dem obigen Applet darstellen lassen. Illustriere für jede ausgedachte lineare Funktion den Begriff „ 0 -Stelle von ...“. rechnerisch und zeichnerisch. Begründe deine Antworten. Orientiere dich am nachfolgenden Beispiel.

Beispiel: Neue lineare Funktion f mit $f(x) = -6x + \frac{15}{2}$.

Gib die „0-Stelle von f “ („Nullstelle von f “) an.

Zeichnerische Lösung:

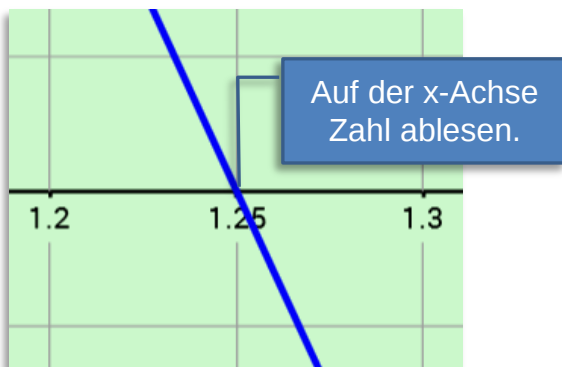


Rechnerische Lösung:

$$\begin{aligned} -6x + \frac{15}{2} &= 0 & \checkmark S1 \\ -6x &= -\frac{15}{2} & \checkmark S2 \\ x &= \frac{5}{4} & \checkmark S3 \\ \text{Lösungsmenge : } &\left\{ \frac{5}{4} \right\} & \checkmark S4 \end{aligned}$$

Diese Zahl ist die Nullstelle von f .

Feinere Skalierung der x-Achse:



Ergebnis: Die Nullstelle der Funktion f ist die Zahl $\frac{5}{4}$, denn $f\left(\frac{5}{4}\right) = -6 \cdot \frac{5}{4} + \frac{15}{2} = 0$.

Eine andere Nullstelle gibt es nicht, denn der Graph von f ist eine Gerade und schneidet die x-Achse nur an der Stelle $\frac{5}{4}$.

Definition: Jede Zahl a , die man für x in die Funktionsgleichung $f(x) = m \cdot x + c$ einsetzen darf, sodass $f(a) = 0$ gilt, heißt **Nullstelle der linearen Funktion f** .

Aufgabe 5

Beweise den...

Satz: Jede lineare Funktion f mit $f(x) = m \cdot x + c$ hat *genau* eine Nullstelle.
Die Nullstelle von f ist die Zahl $-\frac{c}{m}$.

Lösungsvorschlag für 1

Beschreibung: Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 3x + 1$.

Um die *7-Stelle* der Funktion f rechnerisch zu bestimmen, kann man so vorgehen:

Schritt 1: Setze den Funktionsterm $f(x)$ gleich 7: $f(x) = 7$.

Schritt 2: Löse die Gleichung $3x + 1 = 7$.

$$3x + 1 = 7$$

$$3x = 6$$

$$x = 2$$

Die *7-Stelle* von f ist die Zahl 2, denn $f(2) = 3 \cdot 2 + 1 = 7$.

Lösungsvorschlag für 2

Beschreibung: Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 3x + 1$.

Um die *7-Stelle* der Funktion f zeichnerisch zu bestimmen, kann man so vorgehen:

Schritt 1: Zeichne den Graphen der Funktion f in ein x-y-Koordinatensystem.

Schritt 2: Markiere auf der y-Achse die Stelle 7.

Schritt 3: Gehe zum Punkt $P = (x_0, 7)$, der auf dem Graphen von f liegt.

Schritt 4: Lies auf der x-Achse die Stelle x_0 ab. Es ist die *7-Stelle* von f .

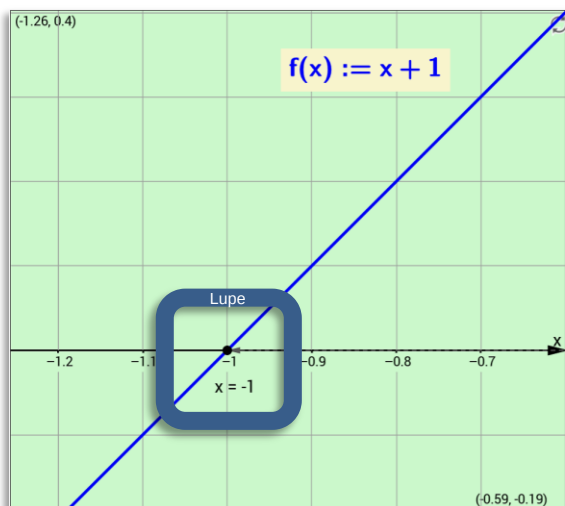
Lösungsvorschlag für 3a

Individuelle Lösungen anhand der Funktion f mit $f(x) = x + 1$.

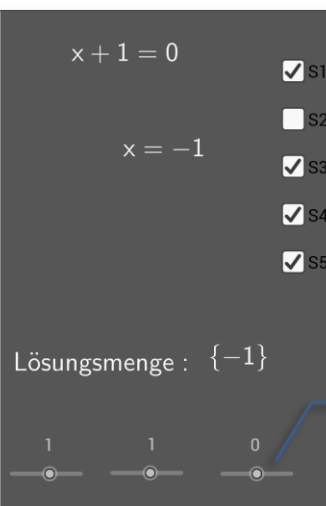
Lösungsvorschlag für 3b

Bestimmung der Nullstelle von f .

Zeichnerische Lösung:

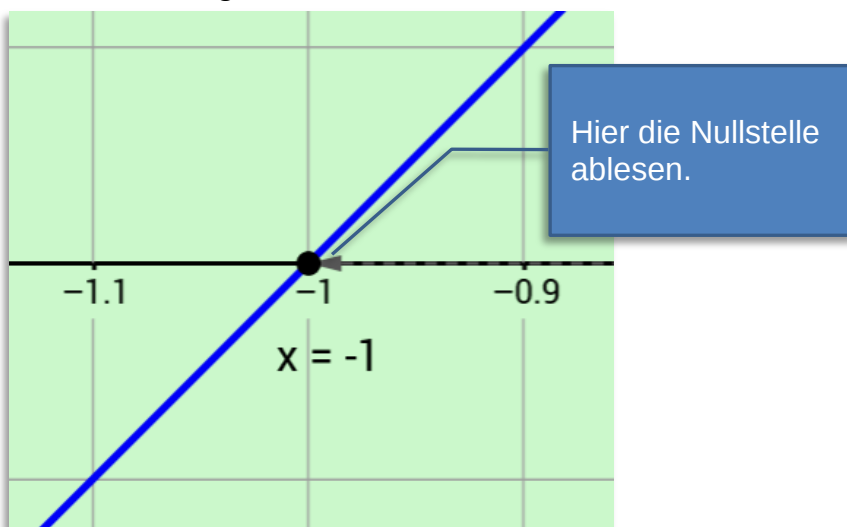


Rechnerische Lösung:



Setze den rechten Schieberegler auf null.

Feinere Skalierung der x-Achse:



Ergebnis: Die Nullstelle von f ist die Zahl -1 , denn $f(-1) = -1 + 1 = 0$. Eine andere Nullstelle von f kann es nicht geben, denn der Graph einer jeden linearen Funktion ist eine Gerade, die die x-Achse an genau einer Stelle schneidet.

Lösungsvorschlag für 4

Individuelle Lösungen

Lösungsvorschlag für 5

Wir kennen die...

Definition: Jede Zahl a , die man für x in die Funktionsgleichung $f(x) = m \cdot x + c$ einsetzen darf, sodass $f(a) = 0$ gilt, heißt *Nullstelle der linearen Funktion f* .

Beweis zu

Satz: Jede lineare Funktion f mit $f(x) = m \cdot x + c$ hat *genau* eine Nullstelle.
Die Nullstelle von f ist die Zahl $-\frac{c}{m}$.

Voraussetzung: $f(x) = m \cdot x + c$ und $m \neq 0$.

Behauptung 1: f hat *genau* eine Nullstelle.

Behauptung 2: Nullstelle von f hat den Wert $-\frac{c}{m}$.

Beweistext: $f(x) = m \cdot x + c$

Wenn $x = -\frac{c}{m}$, dann $f(-\frac{c}{m}) = 0$.

Einsetzen für x ergibt:

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{c}{m}\right) &= m \cdot \left(-\frac{c}{m}\right) + c \\ &= -\frac{m \cdot c}{m} + c \\ &= -c + c \\ &= 0 \end{aligned}$$

(Vergleiche mit Behauptung 2.)

Eine andere Nullstelle von f kann es nicht geben, denn der Graph einer jeden linearen Funktion ist eine Gerade, die die x-Achse an genau einer Stelle schneidet.

(Vergleiche mit Behauptung 1.)

w.z.b.w.